объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4-93-136

С.А.Воропаев, М.Бордаг*

РОЛЬ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ЭФФЕКТЕ ААРОНОВА — БОМА ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ

Направлено в «Журнал экспериментальной и теоретической физики»

---

*Университет г. Лейпцига, Германия

1993

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение эффекта Ааронова — Бома (АБ) [1], широко обсуждавшегося в свое время в связи с ролью электромагнитных потенциалов в квантовой механике, сейчас получило новое значение из-за интересных аналогий с поведением частиц в окрестности космической струны [2] в частности и с особенностями квантовой теории для пространств, имеющих конические черты [3], — в целом. В исходной модели Ааронова — Бома данный эффект возникает как рассеяние квантовых бесспиновых заряженных частиц на бесконечно тонком и длинном соленоиде, содержащем конечный магнитный поток Ф. Поскольку магнитное поле вне такой «струны» отсутствует, постольку в классическом смысле нет и сил, действующих на частицу. Отметим, что кроме вышеперечисленных ситуаций подобный «топологический» характер взаимодействия встречается также и при рассеянии электронов проводимости на линейных дефектах кристаллической решетки твердых тел — дислокациях и дисклинациях [4]. Существуют интересные применения эффекта Ааронова — Бома в теории анионов, развиваемой сейчас в целях объяснения высокотемпературной сверхпроводимости [5].

Учет спина в такого рода эффектах оказывается далеко не простой проблемой, требующей тщательного анализа граничных условий задачи. В противном случае возникает угроза некорректного описания динамической эволюции частиц из-за нарушения условия самосопряженности гамильтониана. Впервые на это обратили внимание Джекив и Герберт в работах, посвященных поведению фермионов в окрестности космической струны [6], и Хаген при изучении рассеяния АБ для релятивистских частиц со спином 1/2, $g = 2$ [7]. Суперсимметрическое взаимодействие, возникающее в данном рассеянии, допускает значительное упрощение анализа спектра дираковского гамильтониана: в частности, легко показать существование N мод с нулевой энергией $E = 0$, по одной на каждый квант магнитного потока, заключенного в соленоиде [8]. (Мы полагаем здесь $f = \Phi/\Phi_0 = N + \delta$, где $N = [\Phi/\Phi_0]$ и $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/e_0$ — квант магнитного потока.)

В данной работе мы анализируем случай $g \neq 2$. Существование аномального магнитного момента у частицы нарушает суперсимметрию взаимодействия и, как мы покажем далее, приводит как к переходу вышеупомянутых нулевых мод в обычные связанные состояния, так и к появлению дополнительного уровня энергии. Мы ограничимся нерелятивистским случаем. При анализе спектра гамильтониана Паули и граничных условий, накладываемых на волновую функцию частицы в области источника поля, используется метод самосопряженных расширений операторов, развитый в теории δ-потенциалов, или потенциалов малого радиуса действия [9]. Показана необходимость введения специальной гармоники, и прослежено влияние характеристик ее сингулярного поведения на различные физические ситуации для частиц вне источника. Мы исследуем также предел $R \to 0$ (R — радиус трубки магнитного поля) и, тем самым, возможность использования модели магнитной «струны» для адекватного описания рассеяния фермионов в поле Ааронова — Бома.

2. АНАЛИЗ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И СПЕКТРА

Рассмотрим нерелятивистский электрон с массой M, зарядом $e = -e_0$ и магнитным моментом $\boldsymbol{\mu} = g\,\mu_B \mathbf{S}$ ($(g-2)/2 \equiv a_e > 0$) в окрестности магнитной струны с электромагнитным потенциалом Ааронова — Бома

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi A_\varphi(\rho),\; A_\varphi(\rho) = \frac{\Phi}{2\pi}\frac{1}{\rho}$$

и магнитным полем

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_z H_z,\;\; H_z = \Phi\,\delta(x)\,\delta(y).$$

В этом случае уравнение Паули

$$\left[\frac{1}{2M}(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e_0}{c}\mathbf{A})^2 - (\boldsymbol{\mu}\,\mathbf{H})\right]\Psi(\mathbf{r}) = E\,\Psi(\mathbf{r})$$

можно представить в виде

$$[-\tilde{\Delta} - \frac{2M}{\hbar^2}|\mu|\,\Phi\,\delta(\rho)\,]\Psi(\rho) = \frac{2M}{\hbar^2}E\,\Psi(\rho),$$

$$\tilde{\Delta} \equiv \left(\hat{\nabla} + i\,\frac{e_0}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2, \tag{1}$$

где мы выбираем $p_z = 0$ и $s_z = -\frac{1}{2}\hbar$. (Легко увидеть, что в противном случае —$\mathbf{S}\uparrow\uparrow\mathbf{H}$ — не будет никаких интересных физических следствий.) Попробуем избежать трудностей, вносимых δ-потенциалом, введя оператор $\hat{H}_0$:

$\hat{H}_0 = -\tilde{\Delta};\; D(\hat{H}_0 = \{\forall\Psi \in L^2(R^2);\, \Psi(0) = 0\},$

т.е. определенный только на регулярных в источнике волновых функциях. Однако если, используя скалярное произведение в $L^2(R^2)$

$$(g, \hat{H}_0 f) = (\hat{H}_0^* g, f) \Rightarrow \int d\mathbf{r}\; g^* \hat{H}^0 f = \int d\mathbf{r}\; [\hat{H}_0^* g]^* f,$$

построить оператор $\hat{H}_0^*$, сопряженный исходному $\hat{H}_0$, то легко показать, что

$$\hat{H}_0^* = \hat{H}_0,\;\; \text{но}\;\; D(\hat{H}_0^*) = \{\forall\Psi \in L^2(R^2)\},$$

т.е. область определения $\hat{H}_0^*$ шире и поэтому оператор $\hat{H}_0$ не является самосопряженным. Проанализируем, следуя методу фон Неймана, его индексы дефекта. Для этого необходимо отыскать все собственные волновые функции, отвечающие комплексным собственным значениям $\hat{H}_0^*$:

$$\hat{H}_0^* \Psi(\rho) = z^2 \Psi(\rho);\;\; z^2 \in \mathbf{C} \setminus R. \tag{2}$$

Пусть $z^2 = \pm\, ip^2$, где $p^2 > 0$ и имеет размерность энергии. Тогда, разлагая волновую функцию в ряд по угловым гармоникам:

$$\Psi(\rho) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m\, e^{im\varphi} R_m(\rho), \tag{3}$$

где радиальная волновая функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{d\rho^2} R_m(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} R_m(\rho) - \left[\left(\frac{\tilde{m}}{\rho}\right)^2 - z^2\right] R_m(\rho) = 0,$$

$$\tilde{m} \equiv m + f,\; f = \Phi/\Phi_0.$$

Используя условие квадратичной интегрируемости, мы находим, что решения (2) возможны только для гармоники $m = -N$, отвечающей минимальному значению общего углового момента, и выражаются в виде

$$\begin{cases} \Psi_+(\rho) = H_\delta^{(1)}\left(e^{+i\frac{\pi}{4}} p\rho\right) \\ \Psi_-(\rho) = H_\delta^{(2)}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} p\rho\right). \end{cases}$$

В этом случае индексы дефекта равны $(m, n) = (1,1)$ и необходимо ввести однопараметрическое семейство самосопряженных расширений исходного оператора H_0 только для гармоники $m = -N$:

$$\hat{h}_{f,0} \to \hat{h}_{f,d},\;\; (m = -N),$$

где

$$\hat{h}_{f,d} \equiv -\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} + \left(\frac{f}{\rho}\right)^2,$$

$$\hat{h}_{f,d}\Psi_{\pm}(\rho) = (\pm i p^2)\,\Psi_{\pm}(\rho)\,.$$

Причем $\Psi(\rho) \in D(\hat{h}_{f,d})$, если

$$\Psi(\rho) = \Psi_0(\rho) + \mathrm{C}\left[H_\delta^{(1)}\left(\mathrm{e}^{+i\frac{\pi}{4}}\,\frac{\rho}{a_0}\right) + \mathrm{e}^{+i\theta}H_\delta^{(2)}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\,\frac{\rho}{a_0}\right)\right],$$

где $\Psi_0(\rho) \in D(\hat{H}_0)$; C — произвольная комплексная const; θ — параметр, нумерующий варианты самосопряженных расширений; a_0 — размерный параметр ($[a_0] \sim \rho$), пока не определяемый; $H_\nu^{(1,2)}(x)$ — функции Ханкеля 1-го и 2-го рода. Используя хорошо известное асимптотическое поведение функций Бесселя при малых аргументах

$$J_\nu(x)\Big|_{x\to 0} \cong \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\,[1 + o(x^2)],$$

мы можем описать искомое общее поведение волновой функции в окрестности источника как

$$\Psi(\rho)\Big|_{\rho\to 0} \cong A\left(\frac{1}{2}\,\frac{\rho}{a_0}\right)^{-\delta} + B\left(\frac{1}{2}\,\frac{\rho}{a_0}\right)^{\delta} + o\left(\frac{\rho}{a_0}\right)^2, \tag{4}$$

где

$$A = \mathrm{C}\,\frac{(-2)}{\sin(\pi\delta)}\;\mathrm{e}^{+i\frac{\theta}{2}}\;\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\delta\right)}{\Gamma(1-\delta)},$$

$$B = \mathrm{C}\,\frac{2}{\sin(\pi\delta)}\;\mathrm{e}^{+i\frac{\theta}{2}}\;\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4}\delta\right)}{\Gamma(1+\delta)},$$

и поэтому возможна нумерация вариантов самосопряженных расширений одним вещественным параметром

$$\frac{B}{A} = 2\pi d,\ -\infty < d \le +\infty. \tag{5}$$

Проанализируем теперь спектр гамильтониана Паули (1) уже с корректными граничными условиями (4)—(5). Все нетривиальные следствия, касающиеся возможных связанных состояний, можно получить, исследуя структуру резольвенты $\hat{R}$, построенной только для $\hat{h}_{f,d}$ ($m = -N$). Пусть

$$\{\hat{R}(\rho,k) \equiv [\hat{h}_{f,d} - k^2]^{-1}\}\;h(\rho) = f(\rho), \tag{6}$$

где $f(\rho) \in D(\hat{h}_{f,d})$, $k^2 \in \mathrm{C}$. Легко увидеть, что для радиального уравнения резольвента является интегральным оператором с ядром $G(\rho, \rho', k)$:

$$\hat{L}_\rho \equiv [\hat{h}_{f,d} - k^2]\;G(\rho, \rho', k) = \delta(\rho - \rho'). \tag{7}$$

Тогда из (6) следует, что

$$\int_0^\infty G(\rho, \rho', k)\;h(\rho')\;d\rho' = f(\rho). \tag{8}$$

Если $\rho \ne \rho'$, то

$$\hat{L}_\rho G(\rho, \rho', k) = \hat{L}_{\rho'}\,G(\rho, \rho', k) = 0,$$

и мы можем построить функцию Грина $G(\rho, \rho', k)$ как суперпозицию линейно независимых собственных решений уравнения (7)

$$G(\rho, \rho', k) = \begin{cases}\chi_k^{(1)}(\rho)\;\chi_k^{(2)}(\rho'),\ \rho > \rho'\\ \chi_k^{(2)}(\rho)\;\chi_k^{(1)}(\rho'),\ \rho < \rho'\end{cases} \tag{9}$$

с выполнением условия нормировки

$$\int_{\rho-\Delta}^{\rho+\Delta} d\rho'\;\hat{L}_\rho\,G(\rho, \rho', k) = 1. \tag{10}$$

Система соотношений (9)—(10) позволяет нам однозначно определить $G(\rho, \rho', k)$:

$$G(\rho, \rho', k) = \frac{i\pi k}{2}\begin{cases}J_\delta(k\rho)\;H_\delta^{(1)}(k\rho'),\ \ \rho < \rho'\\ H_\delta^{(1)}(k\rho)\;J_\delta(k\rho'),\ \ \rho \ge \rho'\end{cases},$$

и анализ граничного условия для $f(\rho)$ из (8) дает значение $d = +\infty$. Таким образом, мы построили резольвенту $\hat{R}_0(\rho, k)$ для частного случая $\hat{h}_{f,d}$ ($d = \infty$) — так называемого варианта Фридрихса самосопряженного расширения. Резольвенту для произвольного значения d – $\hat{R}(\rho, k)$ можно теперь построить, используя метод Крейна [10],

$$\hat{R}(\rho, k) = \hat{R}_0(\rho, k) + p(k)\int_0^\infty d\rho'\;H_\delta^{(1)}(k\,\rho')(\bullet)H_\delta^{(1)}(k\,\rho),$$

и, анализируя граничное условие для $f(\rho)$ из (8), мы получаем вид $p(k)$:

$$p(k) = \frac{-\left(\frac{\pi k}{2}\right)\;\sin(\pi\delta)\;(ka_0)^\delta}{(ka_0)^\delta\;\mathrm{e}^{-i\pi\delta} + 2\pi d\,\frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(1-\delta)}\,(ka_0)^{-\delta}}.$$

Как хорошо известно, полюс резольвенты позволяет определить связанное состояние. Тогда

$$p(k) \to \infty: \;\; 2\pi d = -(\kappa a_0)^{2\delta} \frac{\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(1+\delta)} < 0; \;\; k = i\kappa$$

или $k^2 = -\kappa^2 = 2ME/\hbar^2 < 0$.

Таким образом, мы можем нормировать нашу шкалу d, положив $a_0 = 1/\kappa$, где κ характеризует энергию связанного состояния, и сказать, что граничное условие (4), накладываемое на волновую функцию ($\rho \to 0$), при значении

$$2\pi d = -\frac{\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(1+\delta)} \tag{11}$$

отвечает связанному состоянию. Отметим при этом, что определить саму величину уровня энергии и его связь с физическими параметрами μ, Φ данный метод не позволяет.

3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ: МОДЕЛИ СТРУНЫ С КОНЕЧНЫМ РАДИУСОМ

Рассмотрим теперь более физический подход, а именно введем модель струны конечного радиуса R с распределенным внутри магнитным полем так, что суммарный магнитный поток по-прежнему равен Φ. Для того чтобы выделить модельно-инвариантные физические результаты, введем три различных распределения магнитного поля, допускающих точные решения.

Модель 1: $H(\rho) = \dfrac{\Phi}{\pi R^2}$ — однородное магнитное поле внутри трубки.

Модель 2: $H(\rho) = \dfrac{\Phi}{2\pi R}\,\dfrac{1}{\rho}\,\theta(R-\rho)$ — "кулоновский" тип поведения.

Модель 3: $H(\rho) = \dfrac{\Phi}{2\pi R}\,\delta(\rho - R)$ — цилиндрическая δ-оболочка радиуса R.

Перепишем уравнение Паули в общем виде

$$\left[\hat{\mathrm{p}}^2 + \frac{e_0}{Mc}(\mathrm{A}\,\mathrm{p}) + \frac{e_0^2}{2Mc^2}(\mathrm{A})^2 + \frac{\sigma g \mu_B H(\rho)}{2}\right]\Psi_\sigma(\mathrm{r}) = E\Psi_\sigma(\mathrm{r}).$$

Здесь $\sigma = \pm 1$ отмечает проекцию спина вдоль (против) направления магнитного поля. После выделения угловой зависимости аналогично (3) радиальное уравнение будет иметь вид ($p_z = 0$)

$$\left[-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{d}{d\rho} + \frac{(m + f\,a(\rho))^2}{\rho^2} + \frac{\sigma g f h(\rho)}{2}\right]\Psi_{\sigma,m}(\rho) = \varepsilon\,\Psi_{\sigma,m}(\rho), \tag{12}$$

где $\mathrm{A} \equiv \mathrm{e}_\varphi \dfrac{\Phi}{2\pi\rho}\,a(\rho)$; $h(\rho) \equiv \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}a(\rho)$; $\varepsilon = 2ME/\hbar^2$. Для нас наиболее интересен случай $m = -N$. Рассмотрим вначале "внешние" решения, т.е. область $\rho > R$. Для $E < 0$ возможно связанное состояние, которое описывается радиальной волновой функцией:

$$\Psi_{-N} = K_\delta(\sqrt{-\varepsilon}\;\rho), \tag{13}$$

и логарифмическая производная этого решения равна

$$R_{\mathrm{ext}}^{(-N)} \equiv \rho\frac{d}{d\rho}\ln\Psi_{-N}(\rho)\Big|_{\rho\to R+0} = (\sqrt{-\varepsilon}\;R)\,\frac{K_\delta^1(\sqrt{-\varepsilon})\;R)}{K_\delta(\sqrt{-\varepsilon})\;R)}. \tag{14}$$

Для состояний непрерывного спектра (рассеяния) $E > 0$ радиальная волновая функция в общем случае имеет вид

$$\Psi_m(\rho) = J_{|\tilde{m}|}(k\rho) + B_m(k)\,H^{(1)}_{|\tilde{m}|}(k\rho) \tag{15}$$

и ее логарифмическая производная равна

$$R_{\mathrm{ext}}^{|m|} = (\sqrt{\varepsilon}\;R)\,\frac{J'_{|\tilde{m}|}(\sqrt{\varepsilon}\;R) + B_m(k)\,H^{(1)\prime}_{|\tilde{m}|}(\sqrt{\varepsilon}\;R)}{J_{|\tilde{m}|}(\sqrt{\varepsilon}\;R) + B_m(k)\,H^{(1)}_{|\tilde{m}|}(\sqrt{\varepsilon}\;R)}. \tag{16}$$

Выражения (14)—(16) можно проанализировать при разных значениях f, E и R. В частности, предел $R \to 0$ для $E < 0$ дает

$$R_{\mathrm{ext}}^{(-N)} = -\delta + o(\varepsilon R^2). \tag{17}$$

Используя явные решения уравнения (12) для различных распределений магнитного поля внутри трубки, мы можем найти значения логарифмических производных "внутренних" решений при этом же пределе $R \to 0$ для связанных состояний $E < 0$.

Модель 1:

$$R_1^{(-N)} = -\delta + \frac{2 \pm g}{2} f\,\Phi_1 + o(\varepsilon R^2),$$

$$\Phi_1 \equiv \frac{{}_1F_1(\frac{2\pm g}{4} + 1;\; 2 + N;\; f)}{{}_1F_1(\frac{2\pm g}{4};\; 1 + N;\; f)}.$$

Модель 2:

$$R_2^{(-N)} = -\delta + \frac{2 \pm g}{2} f \Phi_2 + o(\varepsilon R^2) ,$$

$$\Phi_2 \equiv \frac{{}_1F_1\left(\frac{2 \pm g}{4} + 1;\ 2 + N;\ 2f\right)}{{}_1F_1\left(\frac{2 \pm g}{4};\ 1 + N;\ 2f\right)} .$$

Модель 3:

$$R_3^{(-N)} = -\delta + \frac{2 \pm g}{2} f \Phi_3 + o(\varepsilon R^2) ,$$

$$\Phi_3 = 1.$$

Величина уровня энергии для первых двух моделей определяется условием сшивки на границе трубки

$$R_{\text{ext}}^{(-N)} = R_i^{(-N)};\ \rho = R,\ i = \overline{1, 3}. \tag{18}$$

Для модели 3 необходимо рассматривать скачок первой производной

$$\frac{d}{d\rho} R_{(-N)}(\rho) \Bigg|_{R - \varepsilon}^{R + \varepsilon} + \frac{1}{2} g f \frac{1}{R} R_{(-N)}(R) = 0 ,\ \varepsilon \to 0 . \tag{19}$$

Решение (18) и (19) возможно только при $g > 2$ и $\sigma = -1$, т.е. спин должен быть направлен против поля. Уровень энергии определяется в этом случае трансцендентным уравнением

$$s\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon}\, R}{2}\right)^{2\delta} = \frac{\Gamma(1 + \delta)}{\Gamma(1 - \delta)} \frac{g - 2}{2} \frac{1}{2} \Phi_i , \tag{20}$$

и величина его зависит от выбора модели. Легко показать, что для этого решения выполняется граничное условие (11), предсказанное теорией самосопряженных расширений. Отметим, что при $R \to 0$ данное связанное состояние сохранится только при соответствующей "перенормировке" константы связи a_e:

$$a_e \to (\sqrt{-\varepsilon}\, R)^{2\delta}\, a_e^{(\text{Ren})} . \tag{21}$$

Данное явление характерно для теории δ-потенциалов и было впервые рассмотрено Л.Д.Фаддеевым и Ф.А.Березиным [11].

Наличие связанного состояния приводит и к особенностям в рассеянии частиц со спином. При $R \to 0$ и $\mathbf{S} \uparrow \downarrow \mathbf{H}$ кроме обычного рассеяния Ааронова — Бома появится добавочное, описываемое коэффициентом B_{-N} (15) ($B_m \to 0,\ m \neq -N$):

$$B_{-N}(k) = \frac{i \sin(\pi \delta)}{\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{2\delta} - e^{i\pi\delta}} , \tag{22}$$

где κ — энергия связанного состояния (20). Выражение для сечения рассеяния при этом имеет вид, аналогичный формуле Брейта — Вигнера.

При конечном значении R, в случае $g = 2$, существует уровень $E = 0$ с кратностью вырождения N. Внешние волновые функции имеют при этом вид

$$R_{\text{ext}}^{(m)} = \text{const} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{-(N + \delta - |m|)} ,\ 0 \le |m| \le N - 1 , \tag{23}$$

и при пределе $\rho \to 0$ мы должны их формально отбросить из-за требования квадратичной интегрируемости волновых функций. Учет внутренней структуры придает смысл R как границе существования внешнего решения (23) и устраняет сингулярную особенность. Данное рассмотрение является частным случаем известного результата Кашера — Ааронова о числе нулевых мод в магнитном поле произвольной конфигурации [8].

При $g \neq 2$ (а именно $g > 2$) нарушение суперсимметрии снимает вырождение и добавочное притяжение, обусловленное взаимодействием аномального магнитного момента частицы и поля трубки, вызовет переход решений (23) для нулевых мод в волновые функции N дополнительных связанных состояний:

$$R_{\text{ext}}^{(m)}(\rho) = K_{N + \delta - |m|}\left(\kappa_m \frac{\rho}{R}\right),\ \kappa_m = [a_e f C_m]^{1/2}. \tag{24}$$

Возникает аналогичная ситуация: в пределе $\rho \to 0$ мы, по формальным признакам, должны их отбросить. Тем не менее учет внутренней структуры и соответствующая "перенормировка" константы связи

$$a_e \to (\sqrt{-\varepsilon_m}\, R)^2 a_e^{(\text{Ren})} \tag{25}$$

позволяют их сохранить. Заметим, что условия "перенормировок" (21) и (25) несовместимы друг с другом и поэтому в пределе $R \to 0$ можно рассматривать только либо "квазинулевые" моды (24), либо "истинно струнное" связанное состояние (13).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что метод самосопряженных расширений операторов и анализ регуляризованных моделей дают сходные результаты для частиц со спином в поле Ааронова — Бома только при $N = 0$. Вообще говоря, при $N \neq 0$ возникают решения уравнения Паули, которые регулярны в области $\rho < R$, но формально сингулярны вне ($\rho > R$) в пределе $\rho(R) \to 0$. Мы не можем их отбросить, т.к. они могут отвечать реальным связанным состояниям. Выходом являлась бы математическая схема рассмотрения δ-потенциалов более общая, чем предложенная в [9] и продемонстрированная в части 2 этой статьи.

Для реальных физических ситуаций, когда a_e и R малы, но конечны (например, для электрона $a_e = 0{,}00116$), в смысле применимости нашего рассмотрения (17), (20), (22), по-видимому, может существовать одновременно $1 + N$ связанных состояний, отвечающих разным уровням энергии.

Сходные выводы справедливы и для реальных космических струн конечного радиуса с захваченным магнитным потоком. Попытка свести взаимодействие такой струны с фермионами к выбору некоего граничного условия для решения соответствующего уравнения, описывающего движение частиц в пространстве с конической сингулярностью (или построение однопараметрического семейства самосопряженных расширений гамильтониана), вообще говоря, не корректна, так как мы можем потерять при этом ряд физических эффектов.

Литература

1. Aharonov Y., Bohm D. — Phys.Rev., 1959, v.115, p.485;
   Скаржинский В.Д. — Труды ФИАН, 1986, т.167, с.139.
2. Aryal M., Ford L.H., Vilenkin A. — Phys.Rev.D, 1986, v.34, p.2263;
   Perkins W.B. et al. — Nucl.Phys.B, 1991, v.353, p.237.
3. t'Hooft G. — Commun.Math.Phys., 1988, v.117, p.685;
   Deser S., Jackiw R. — Commun.Math.Phys., 1988, v.118, p.495.
4. Kawamura K. — Z.Phys.B., 1978, v.29, p.101; 1978, v.30, p.1;
   Brown R.A. — J.Phys.F: Metal Phys., 1979, v.9, p.241.
5. Wilczek F. — Phys.Rev.Lett., 1982, v.48, p.1144; 1982, v.49, p.957.
6. Gerbert Ph.de S. — Phys.Rev.D, 1989, v.40, p.1346.
7. Hagen C.R. — Phys.Rev.Lett., 1990, v.64, p.503;
   — Int.J.Mod.Phys.A., 1991, v.6, p.3119.
8. Aharonov Y., Casher A. — Phys.Rev.A, 1979, v.19, p.2461.

9. Albeverio S. et al. — Solvable Models in Quantum Mechanics, Springer-Verlag, New York, 1988.
10. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. — Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Харьков: Высшая школа, 1978.
11. Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. — ДАН СССР, 1961, т.137, 5, с.1011.

**Рукопись поступила в издательский отдел
16 апреля 1993 года.**