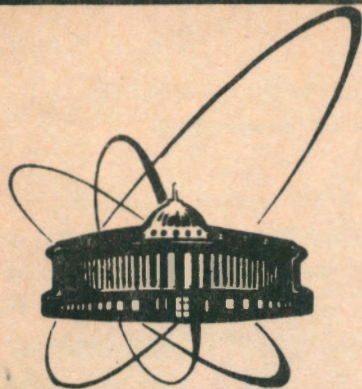


92-471.



сообщения  
Объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
Дубна

P4-92-471

В.Г.Носов\*, А.И.Франк

СВЕРХМЕДЛЕННЫЕ НЕЙТРОНЫ  
И ЗАКОН ДИСПЕРСИИ НЕЙТРОННЫХ ВОЛН  
В ВЕЩЕСТВЕ

---

\*Российский научный центр «Курчатовский институт», Москва

1992

## 1. Введение. Пределы применимости метода среднего потенциала и сверхмедленные нейтроны

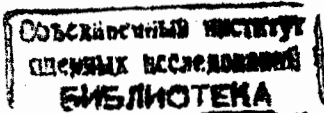
Основная особенность ультрахолодных нейтронов (УХН) состоит в их способности испытывать полное отражение от границы раздела вакуум-среда. Именно это обстоятельство, весьма привлекательное с точки зрения эксперимента, стимулировало начало работы с УХН [1]. В первых же экспериментах с ними обнаружилось известное несоответствие теоретически предсказываемого и экспериментально наблюдаемого времени жизни нейтронов в замкнутых сосудах [2,3].

К настоящему моменту экспериментальная техника существенно усовершенствовалась. Тщательная очистка поверхностей и переход к глубокому охлаждению стенок сосуда, подавляющему процесс неупругого рассеяния УХН с нагревом, значительно увеличили достижимое в эксперименте время хранения [4]. Проблема, однако, и сейчас не полностью снята. Расхождение теории и эксперимента хотя и уменьшилось, но все еще имеет место, что представляет собой так называемую аномалию при хранении УХН [5]. Грубо говоря, ситуация выглядит таким образом, будто на хвостах экспоненциально затухающей в веществе волновой функции нейтроны поглощаются сильнее, чем это способны обусловить известные сечения их радиационного захвата и неупругого рассеяния.

Основная задача теории состоит в установлении закона дисперсии  $k^2(k_0^2)$ , где  $k_0 = mv_0/\hbar$  - волновое число нейтрона в вакууме [6-8]. Предполагая пока существование стационарного решения (подробнее см. в последующих разделах), волну в среде считаем экспоненциальной:

$$e^{\pm ikx} \quad (1)$$

Чтобы простейшим образом прокомментировать состояние вопроса, обратимся к так называемому статическому приближению. В нем вещество содержит фиксированные рассеивающие центры - ядра, распределенные с некоторой



плотностью  $n$ . Кроме того, отвлечемся на время от радиационного захвата нейтронов.

Впервые предложенный Ферми [9,10] простой вывод закона дисперсии представляется наиболее убедительным. Он апеллирует к случаю тонкого слоя вещества  $0 < x < \xi$ . Тонкий образец бесконечен в поперечных направлениях  $y, z$ , но, вообще говоря, в меру малости своей толщины  $\xi \ll k_0^{-1}, |k|^{-1}$ , слабо отражает падающие на него нейтроны.

С небольшим, но удобным для дальнейшего анализа видоизменением, рассуждения можно воспроизвести следующим образом. Составляя из базисных функций (1) волновую функцию  $\psi_{int}$  внутри среды и сшивая ее обычным путем с волновой функцией в вакууме, получаем в линейном приближении:

$$\psi_{int} \approx 1 + ik_0 x - i \frac{k_0^2 - k^2}{2k_0} \xi, \quad 0 < x < \xi. \quad (2)$$

Первые два члена отождествляем с начальной падающей волной  $\psi_0 = e^{ik_0 x}$ , слабо меняющейся на протяжении тонкого слоя. Вопрос состоит в том, каково, с микроскопической точки зрения, происхождение последнего члена, содержащего  $k^2$  в веществе.

Считая, что производимое отдельными ядрами рассеяние является в известном смысле слова первичным, то есть эффективно только однократное рассеяние на каждом конкретном центре (подробнее см. ниже), суммируем сферические волны вида:

$$-b \frac{e^{ik_0 r}}{r} \quad (3)$$

с вакуумным волновым числом  $k_0$  нулевого приближения. Здесь  $b = \pm |b|$  - длина  $s$ -рассеяния. Соответствующая добавка  $\psi_1$  к волновой функции находится интегрированием в цилиндрических координатах  $\rho, x$ , где  $\rho$  ориентировано поперёк пучка:

$$\psi_1 \approx -b \int_0^\infty \frac{e^{ik_0 \rho}}{\rho} n \xi 2\pi \rho d\rho = -i \frac{2\pi n b}{k_0} \xi = \mp i \frac{\alpha_0^2}{2k_0} \xi, \quad (4)$$

$$\alpha_0^2 = 4\pi n |b|. \quad (4)$$

Сопоставление с последним членом формулы (2), полученной из макроскопических соображений, приводит к общепринятому закону дисперсии

$$k^2 = k_0^2 \mp \alpha_0^2. \quad (5)$$

Широко известно, что это эквивалентно наличию внутри среды потенциала [10]

$$U = \frac{2\pi \hbar^2}{m} n b. \quad (6)$$

Однако эта своеобразная теория возмущений (см. ниже) имеет, по-видимому, свои ограничения. Малость обусловленной веществом поправки к волновой функции  $|\psi_1| \ll 1$  не обеспечивается автоматически. Дело в том, что по сравнению с межатомными расстояниями  $a \approx n^{-1/3}$  даже тонкий слой вещества должен быть макроскопическим ( $\xi \gg a$ ). Поэтому условие применимости формул (5) и (6) можно сформулировать так:

$$k_0 \gg \alpha_0^2 a, \quad |U| \ll \frac{\epsilon}{k_0 a} \quad (7)$$

где  $\epsilon = \hbar \omega_0 = \hbar^2 k_0^2 / 2m$  - кинетическая энергия нейтронов в вакууме.

По-видимому, при энергиях  $k_0^2 \lesssim \alpha_0^4 a^2$  мы сталкиваемся с иной, непотенциальной ситуацией. Это можно комментировать с различных точек зрения. Интеграл (4) сходится при  $\rho \approx k_0^{-1}$ , и с уменьшением  $k_0$  область центров, захватываемых интегрированием, эффективно расширяется. Легко заметить, что уже внутри круга  $\rho \approx \rho_0 \approx (\alpha_0^2 a)^{-1}$  рост волновой функции в интересующей нас произвольно выбранной точке становится неразумно большим. Это можно истолковать только как неизбежность перерассеяния на расстояниях порядка

$$\rho_0 \approx \frac{1}{\alpha_0^2 a} \approx \frac{a^2}{|b|}. \quad (8)$$

Но в веществе тонкого образца перерассеяния обусловят неопределенность импульса  $\Delta k \approx \rho_0^{-1}$ . Она в полной мере относится и к стоящему в стандартном выражении (3) волновому числу  $k_0$ . Таким образом, при  $k_0 \ll \rho_0^{-1}$  мы пришли бы к  $\Delta k_0 \gg k_0$ , что едва ли удовлетворительно.

Чтобы пролить дополнительный свет на возникающие при этом вопросы, обратимся к общему уравнению Шрёдингера для движения частицы в поле произвольного потенциала  $U(\mathbf{r})$ . Оно может быть записано в интегральной форме

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ik_0 r} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \psi(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}') \frac{e^{ik_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (9)$$

Поскольку

$$\left( \nabla^2 + k_0^2 \right) \frac{e^{ik_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \quad (10)$$

это вполне эквивалентно обычному дифференциальному уравнению Шрёдингера.

С другой стороны, известно (и очевидно), что конкретная величина потенциала (6) как раз равна усреднённому по объёму вещества точечному взаимодействию, имеющему вид псевдопотенциала Ферми [11,12]

$$U = \frac{2\pi\hbar^2}{m} b \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (11)$$

Происхождение этого совпадения станет яснее, если, задавшись взаимодействием (11), подставить его в общее уравнение (9). Однократное интегрирование по объёму снимается  $\delta$ -функцией, а остающееся суммирование по ядрам  $j$  можно заменить на интегрирование ( $|k|a \ll 1$ ). В итоге приходим к интегральному уравнению:

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ik_0 r} - nb \int_{n \neq 0} \psi(\mathbf{r}') \frac{e^{ik_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (12)$$

По форме оно совпадает с уравнением (9), а их сравнение дает значение (6) для эффективного среднего потенциала в

веществе<sup>1)</sup>.

Однако хорошо известно (см., например, [11]), что введение в теорию  $\delta$ -функционального потенциала (11) не всегда корректно. Он подобран так, чтобы давать правильную амплитуду рассеяния на отдельно взятом ядре в первом борновском приближении. Однако уже в следующем, квадратичном приближении теории возмущений, возникает двойной интеграл по объёму

$$\iint \frac{U(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \longrightarrow \infty,$$

который расходится. Это означает, что перерассеяние на одном и том же центре (самоперерассеяние) закрывает возможность использования точечного взаимодействия, вводимого из методических соображений для обоснования понятия среднего оптического потенциала. Вопрос только в том, играют ли самоперерассеяния существенную роль, или же их влияние пренебрежимо. Это зависит от конкретных физических условий.

С ролью самоперерассеяний в обычном трехмерном веществе может быть связано ещё одно обстоятельство. В длинноволновом пределе  $|k|a \ll 1$  не приходится ожидать сколько-либо существенных различий между аморфным и кристаллическим вариантами расположения центров. Входит только их средняя плотность  $n$ . Например, вполне правомерно представлять себе вещество в виде кристалла, составленного из плоскостей [3]. Поэтому вопрос о взаимодействии нейтронов с одной такой плоскостью тоже представляет существенный интерес.

В случае  $b < 0$  притягивательного знака длины рассеяния, моноатомная плоскость способна связать нейтрон на уровень с отрицательной энергией. Однородное интегральное уравнение для волновой функции связанного состояния приобретает вид

<sup>1)</sup> Мы благодарны М. В. Казарновскому за указание на эту простую и элегантную форму основных соотношений теории среднего потенциала для медленных нейтронов. При решении некоторых конкретных задач свободный член в правой части интегрального уравнения следует опускать в силу самой постановки вопроса. Формально это оправдано благодаря равенству (10). В качестве примера см. ниже уравнение (13).

$$\psi(r) = \sigma |b| \int \psi(r') \frac{e^{-\nu|r-r'|}}{|r-r'|} ds', \quad (13)$$

где поверхностный интеграл берется по моноатомной плоскости  $x=0$ , а  $\sigma$  - поверхностная плотность центров на ней. После несложных вычислений получаем следующее решение для характеристик этого связанного состояния нейтрона:

$$\psi = \psi(x) = \chi e^{-\nu|x|}, \quad \chi \equiv \psi \Big|_{x=0}, \quad (14)$$

$$\nu = 2\pi\sigma |b|, \quad -\epsilon = |\epsilon| = 2\pi^2 \frac{\hbar^2}{m} \sigma^2 |b|^2.$$

Известные уже результаты для отражения свободных нейтронов ( $\epsilon > 0$ ) могут быть достаточно просто получены из уравнения (12) после надлежащей замены объемного интегрирования на интегрирование по моноатомной плоскости.

$$\psi = e^{ik_0 x} + R e^{-ik_0 x} \quad x < 0,$$

$$\psi = T e^{ik_0 x} \quad x > 0, \quad (15)$$

$$|R|^2 = \frac{\nu^2}{\nu^2 + k_0^2}, \quad |T|^2 = \frac{k_0^2}{\nu^2 + k_0^2},$$

Легко видеть, что коэффициент отражения  $|R|^2$  фактически дается резонансной формулой Вигнера [11]. Закон отражения соответствует резонансу на единственном отрицательном уровне, а при  $k_0 \ll \nu$  отражение становится практически стопроцентным.

При  $b > 0$  в плоскости комплексных значений энергии отражательная амплитуда  $R$  имеет полюс  $k_0 = -i\nu$  на нефизическом листе [11]. Это принято характеризовать как вигнеровский резонанс на виртуальном уровне. С учетом определения  $\nu$  согласно формуле (14), резонансные выражения (15) остаются справедливыми и в этом случае.

Возвращаясь к реальному трехмерному пространству,

напомним, что  $\nu \approx a^{-3}$ , в то время как для плоскости  $\sigma \approx a^{-2}$ . Поскольку  $\nu \approx a^{-2}|b|$ , то в трехмерном случае это "эквивалентно"  $\nu \approx \alpha_0^2 a$ . Разумеется, в реальной ситуации следовало бы, в принципе, сразу учитывать все плоскости и находящиеся на них центры. И все же трудно себе представить, чтобы при  $k_0 \ll \alpha_0^2 a$  (сверхмедленные нейтроны [13]), когда изолированная резонирующая плоскость отражала бы почти нацело, роль самопересечения нейтронов оставалась бы пренебрежимой.

Краткое резюме можно сформулировать следующим образом. Методу среднего потенциала отвечает, грубо говоря, применимость первого приближения теории возмущений - но не ко всему образцу, как целому, а для индивидуального конкретного центра. Это справедливо при  $k_0 \gg \nu$ , то есть вдали от резонанса. Эквивалентные записи того же критерия представлены в (7).

Однако пригоден ли вообще подход с тонким ферми-слоем для теоретического рассмотрения проблемы в области сверхмедленных нейтронов  $k_0 \ll \alpha_0^2 a$ ? Надо сказать, что это вполне возможно. Отдельные рассеиватели способны играть роль источников расходящихся волн, добавляемых к волновой функции нейтрона, и в этом предельном случае. Но подобной физической картине лучше отвечает влияние по типу

$$-b \frac{e^{ik_1 r}}{r} \quad (16)$$

с некоторым перенормированным самоперерассеяниями волновым числом  $k_1 \gg \alpha_0^2 a$ . В то же время выражение (3), содержащее предположение, что в плотной среде нейтрон даже при микроскопических взаимодействиях "помнит" свое изначальное вакуумное волновое число  $k_0$ , в этом случае, по-видимому, теряет свою применимость (см. также выше формулу (8) и текст).

## 2. Точка окончания спектра $k^2(k_0^2)$ и комплексный закон дисперсии

Для дальнейшего весьма существенно следующее предположение. Естественно думать, что при  $k_0 \ll \alpha_0^2 a$ , когда доминируют многократные перерассеяния и самоперерассеяния,

обусловленная ими перенормировка выразится в самосогласовании микро - и макроскопических аспектов поведения нейтрона в среде. В этом случае в расходящейся от центра волне (16) будет фигурировать то же волновое число, которое характеризует вещество в целом:

$$k_1 = k. \quad (17)$$

Тогда замена  $k_0$  на  $k$  в формуле (4) даст нам микроскопический вклад в волновую функцию: Здесь, грубо говоря, мы имеем интеграл по последним перерассеяниям перенормированных нейтронных волн перед приходом в точку, где суммируются амплитуды. Этот интеграл быстро сходится <sup>2)</sup>.

Остановимся вкратце на относительно редком случае отрицательной длины рассеяния  $b < 0$ , когда и в обычной потенциальной теории нет полного отражения. Приравнивая микроскопическое и макроскопическое выражения, находим дисперсионное уравнение в виде

$$i \frac{a_0^2}{2k} \xi = -i \frac{k_0^2 - k^2}{2k_0} \xi. \quad (18)$$

Предположение  $k_0^2 \ll |k|^2$  сразу же оправдывается результатом:

$$k = \sqrt[3]{a_0^2 k_0} + 0 \left( \frac{k_0^2}{k^2} k \right) \quad k_0 \ll a_0^2 a. \quad (19)$$

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что даже с учётом самоперерассеяния закон дисперсии остается здесь чисто вещественным. Характерно также, что он имеет особенность в точке своего окончания и  $k \rightarrow 0$  при  $k_0 \rightarrow 0$ . Напомним, что в теории потенциала в этом пределе мы имели бы  $k \rightarrow a_0$ .

Труднее для понимания и теоретической трактовки комплексный закон дисперсии в непоглощающей среде. Это относится к наиболее актуальному случаю  $b > 0$ . Применяя,

<sup>2)</sup> Тем самым, тонкий слой  $\xi$ , сильно отражающий нейтроны при некоторых промежуточных волновых числах  $k_0 \approx a_0^2 a$ , снова обретает прозрачность в области сверхмедленных нейтронов  $k_0 \ll a_0^2 a$  - см. также в конце предшествующего раздела.

несколько формально, тот же метод рассмотрения, получаем в аналогичном приближении

$$k^3 = -a_0^2 k_0 = e^{i\pi} a_0^2 k_0. \quad (20)$$

Но вещественный корень неприемлем: нас интересует расходящаяся от ядра сферическая волна (принцип излучения), то есть  $\text{Re } k > 0$ . Кроме того, расходящаяся волна должна затухать по направлению её распространения, а не наоборот. Следовательно,  $\text{Im } k > 0$ . Остаётся один корень:

$$k = e^{i \frac{\pi}{3}} \sqrt[3]{a_0^2 k_0}, \quad k_r' = \frac{1}{2} \sqrt[3]{a_0^2 k_0}, \quad (21)$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{a_0^2 k_0}, \quad k_0 \ll a_0^2 a.$$

В значительно более широкой области  $k_0^2 \ll |k|^2$  формулы для тонкого образца  $\xi$  не сложны, и мы их приведем <sup>3)</sup>. Для амплитуд отражённой и прошедшей волн имеем:

$$R = -i \frac{k_0^2 - k^2}{k_0} \xi \approx -\frac{\xi}{k_0} \left( k_1 k_r + i \frac{k_1^2 - k_r^2}{2} \right), \quad (22)$$

$$T = 1 - i \frac{k_0^2 - k^2}{k_0} \xi \approx 1 - \frac{\xi}{k_0} \left( k_1 k_r + i \frac{k_1^2 - k_r^2}{2} \right).$$

В итоге:

$$|R|^2 = 0 (\xi^2), \quad |T|^2 \approx 1 - 2 \frac{k_1 k_r}{k_0} \xi, \quad (23)$$

и в рамках принятого вида (1) внутренней волновой функции ( $k_1, k_r \neq 0$ ) получаем, по крайней мере формально, что число нейтронов не сохраняется. Доля исчезнувших частиц дается

<sup>3)</sup> Приводимое ниже выражение (24) справедливо во всей энергетической области  $k_0 a \ll 1$ , где правомерна постановка вопроса о законе дисперсии для медленных нейтронов.

дефицитом унитарности

$$\mu_{\xi} = 1 - |R|^2 - |T|^2 = 2 \frac{k_1 k_r}{k_0} \xi. \quad (24)$$

а происхождение парадокса станет яснее на примере полубесконечного образца  $x > 0$ .

Ввиду принципиальной важности этой основной задачи мы будем воздерживаться от ограничений на энергию и, как правило, только полагать, что области вещества отвечает некоторое комплексное волновое число

$$k = k_r + ik_i \quad (25)$$

с отличными от нуля обеими частями. Волновую функцию запишем в виде

$$\Psi = \psi_c(x) e^{-i\omega_0 t} + \Psi_n(x, t) \quad x > 0. \quad (26)$$

Ответственная за кажущееся несохранение унитарности вторая часть  $\Psi_n$  по сути дела описывает инфильтрацию нейтронов в вещество. Эта часть состояния, типа пакета непрерывного спектра, сравнительно вяло эволюционирует. Она будет рассмотрена в разделе 4.

В противоположность нестационарной части состояния  $\Psi_n(x, t)$ , стационарное слагаемое  $\psi_c(x)$  носит дискретный характер. Из-за наличия общего множителя  $e^{-i\omega_0 t}$  именно эта волновая функция сшивается с внешней обычным образом.

В среде

$$\psi_c = \frac{2k_0}{k + k_0} e^{ik_r x} e^{-k_i x} \quad (27)$$

при нормировке  $e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$  падающей волны. Для дефицита отражения - коэффициента инфильтрации - получаем:<sup>4)</sup>

$$\mu = 1 - |R|^2 = 4 \frac{k_r k_0}{|k + k_0|^2} \quad (28)$$

4) к формуле (28) можно придти и путем непосредственного, с весом  $|\psi_c|^2$ , интегрирования дифференциального выражения (24) для потерь на инфильтрацию ( $\xi \rightarrow dx$ ).

Наконец, представляет интерес выяснить предельное поведение этой величины при  $k_0 \rightarrow 0$ . С помощью формулы (21) легко находим

$$\mu = 2 \frac{k_0^{2/3}}{\alpha_0^{2/3}}, \quad k_0 \ll \alpha_0^2 \quad (29)$$

### 3. Интегралы Крамерса - Кронига и непотенциальные поправки

В настоящем разделе следствия из комплексности закона дисперсии будут рассмотрены под определенным углом зрения. Он аналогичен известной трактовке аналитических свойств диэлектрической проницаемости с помощью так называемых дисперсионных соотношений [14]. Изменение вида закона дисперсии из-за крайне низкоэнергетических самоперерасеяний не остается без последствий и для области применимости теории потенциала<sup>5)</sup>.

Для целей последующего аналитического продолжения выбираем комплексную функцию

$$W(z) = k^2 - k_0^2 + \alpha_0^2 = u(z) + iv(z), \quad (30)$$

вычитая тем самым потенциальный эффект. Чтобы избавиться от не относящихся к делу отраженных волн, генезис закона дисперсии представим себе как результат плавного квазиклассически постепенного вхождения вакуумной волны в область вещества. Поэтому удобно считать, что плотность рассеивающих центров достаточно медленно и плавно нарастает, стремясь к своему асимптотическому истинному значению в среде.

При этом падающая волна  $e^{ik_0 x}$  постепенно трансформируется в  $\psi_c$ , обязательно не растущую в глущь вещества. Следовательно, имеем:  $\text{Im } k^2 \geq 0$  при  $k_0^2 > 0$ .

Но аналитическое продолжение требует привлечь и

5) С этой точки зрения, приближение потенциала аналогично известному высокочастотному пределу для диэлектрической проницаемости [14]. Вне связи с обсуждаемым вопросом эта аналогия отмечалась в [6].

нефизические значения величины  $z=k_0^2$ , которые трудно представить себе наглядно. Обратимся сначала к отрицательной полуоси. Здесь положение в известном смысле противоположно рассмотренному выше. Вакуумную волну "подбарьерного" типа с  $k_0^2 < 0$  естественно считать продолжением волны, выходящей из вещества, причем её амплитуда растёт по мере уменьшения плотности центров. В обратном же направлении, внутрь среды, по-прежнему требуется невозрастание:  $\text{Im } k^2 \leq 0$  при  $k_0^2 < 0$ .

Еще менее наглядны вакуумные волны с комплексной  $z=k_0^2$ , поскольку вдоль них даже ток не сохраняется. Однако в верхней полуплоскости  $\text{Im } k_0^2 > 0$ , пока плотность центров еще достаточно мала, он течет по направлению затухания волны при её постепенном вхождении в вещество. Трудно ожидать, чтобы при подобных благоприятных условиях что-либо обратилось в бесконечность от последующих взаимодействий. Математически это можно сформулировать как отсутствие особенностей у функции  $W(z)$  в верхней полуплоскости комплексного переменного  $z$ . Правда, потребуется еще одно уточнение в связи с особенностью при  $z=0$ , где имеет место точка ветвления.

Чтобы проверить явно аналитические свойства предельного закона дисперсии (21), квадривируем его:

$$k^2 = e^{i \frac{2\pi}{3}} \sqrt[3]{\varepsilon_0^4 k_0^2}, \quad |k_0|^2 \ll \varepsilon_0^4 a^2. \quad (31)$$

Осуществляя затем аналитическое продолжение на отрицательную полуось через верхнюю полуплоскость, получаем

$$(k_0^2)^{1/3} \rightarrow e^{i \frac{\pi}{3}} |k_0^2|^{1/3}, \quad k^2 \rightarrow -\sqrt[3]{\varepsilon_0^4 |k_0^2|}.$$

При  $z \rightarrow 0$  имеем чисто вещественный результат без каких-либо нарушений изложенного выше. Тем не менее, из-за наличия корневой точки ветвления следует провести разрез вдоль всей отрицательной полуоси.

Присоединяя к верхней полуплоскости верхний берег разреза  $-\infty < z < 0$  и подразумевая в дальнейшем только его, записываем по известным образцам соотношения Крамерса-Кронига:

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (32)$$

$$v(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Обращают на себя внимание любопытные правила сумм:<sup>6)</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } k^2(k_0^2)}{k_0^2} dk_0^2 = \pi \varepsilon_0^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}(k_0^2 - k^2)}{k_0^2} dk_0^2 = 0. \quad (33)$$

Характер поведения функций  $u(k_0^2)$  и  $v(k_0^2)$  качественно иллюстрируется рис. 1.

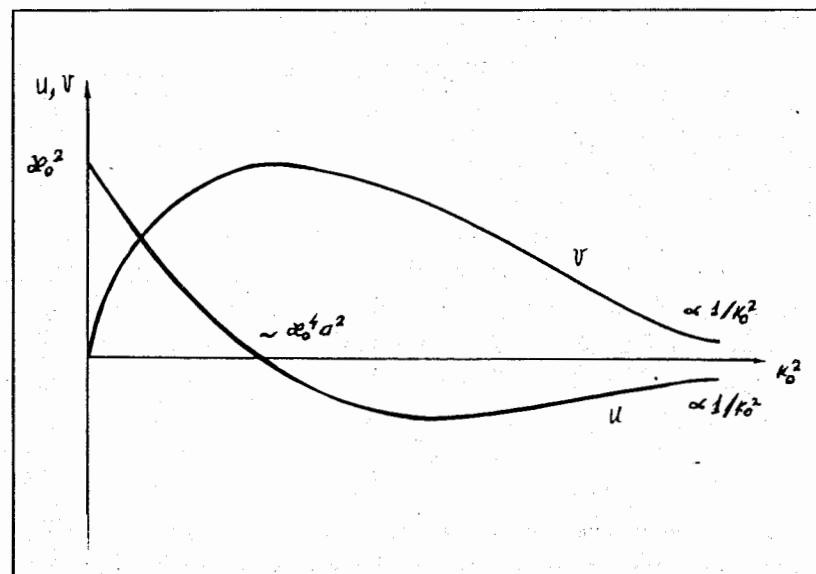


Рис. 1

6) Здесь и ниже интегралы от  $-\infty$  до  $\infty$  подразумеваются берущимися в симметрично расположенных пределах.



Обратимся теперь к области  $k_0^2 \gg \alpha_0^4 a^2$ , где роль самоперерасеяний мала и применимо понятие оптического потенциала. Пренебрегая, вообще говоря, первым членом в знаменателе дисперсионных соотношений (32) и принимая во внимание быструю сходимость интегралов

$$J_u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(k_0^2) dk_0^2, \quad J_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(k_0^2) dk_0^2, \quad (34)$$

имеем:

$$u \approx -\frac{J_v}{k_0^2}, \quad v \approx \frac{J_u}{k_0^2}. \quad (35)$$

Без труда разрешая затем уравнение (30) относительно волнового числа  $k$ , находим единый закон дисперсии для очень холодных и ультрахолодных нейтронов:

$$k_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0^2 - \alpha_0^2 - \frac{J_v}{k_0^2} + \sqrt{\left(k_0^2 - \alpha_0^2 - \frac{J_v}{k_0^2}\right)^2 + \left(\frac{J_u}{k_0^2}\right)^2}},$$

$$k_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\alpha_0^2 - k_0^2 + \frac{J_v}{k_0^2} + \sqrt{\left(\alpha_0^2 - k_0^2 + \frac{J_v}{k_0^2}\right)^2 + \left(\frac{J_u}{k_0^2}\right)^2}}.$$

$$k_0^2 \gg \alpha_0^4 a^2 \quad (36)$$

Ни одна из составляющих волнового числа в веществе нигде не обращается строго в нуль (см. также формулу (25) и текст).

Между тем интегралы (34) оцениваются:

$$J_u \sim \alpha_0^6 a^2, \quad J_v \sim \alpha_0^6 a^2. \quad (37)$$

Поэтому довольно естественно, что дальнейшая конкретизация оценок выявляет три характерные области:

$$1) \quad \alpha_0^2 - k_0^2 \gg \alpha_0^4 a^2$$

$$k_r \approx k_i^{(1)} \approx \frac{\alpha_0^6 a^2}{k_0^2 \sqrt{\alpha_0^2 - k_0^2}}, \quad \mu \approx \frac{\alpha_0^4 a^2}{k_0 \sqrt{\alpha_0^2 - k_0^2}}.$$

$$2) \quad |\alpha_0^2 - k_0^2| \ll \alpha_0^4 a^2 \quad \left( |\varepsilon - U| \ll \frac{b}{a} U \right). \quad (38)$$

$$k_r \approx k_i \approx \alpha_0^2 a \quad \mu \approx \alpha_0 a$$

$$3) \quad k_0^2 - \alpha_0^2 \gg \alpha_0^4 a^2.$$

$$-k_r^{(1)} \approx k_i \approx \frac{\alpha_0^6 a^2}{k_0^2 \sqrt{k_0^2 - \alpha_0^2}}, \quad \mu \approx \frac{4k_0 \sqrt{k_0^2 - \alpha_0^2}}{\left(k_0 + \sqrt{k_0^2 - \alpha_0^2}\right)^2}.$$

Здесь присоединены также оценки коэффициента инфильтрации нейтронов в полубесконечную среду, полученные по формуле (28). Кроме того, подразумевается, что в случае наличия малой поправки  $k_{i,r} = k_{i,r}^{(0)} + k_{i,r}^{(1)}$ . Тогда нулевое приближение даётся элементарной формулой теории потенциала.

Область 2) непосредственно вблизи барьера представляет особенный теоретический интерес. Она очень узка, и её, вероятно, трудно исследовать экспериментально. Поскольку модель потенциала даёт нулевое значение волнового числа (резко меняющееся от чисто действительного к чисто мнимому в зависимости от знака величины  $\varepsilon - U$ ), то о малости поправок здесь говорить не приходится. Симптоматично, что обе длины волны - осцилляций и затухания - оказываются порядка  $\rho_0$ . Иными словами, они имеют масштаб характерной длины перерасеяний (см. введение, формулу (8) и текст). Эти длинные "волны перерасеяний" делают более пластичным переход через барьер, описываемый формулами (36) и (38). Вариант 3) формулы (38), соответствующий области над барьером, даёт представление об асимптотическом поведении непотенциальных поправок. В волновых числах они убывают как  $k_0^{-3}$ .

#### 4. Волновая функция инфильтрации нейтронов в полубесконечную среду $\Psi_n(x, t)$

Вернемся к задаче о падении монохроматических нейтронов  $e^{ik_0 x}$  на полубесконечную среду  $x > 0$ . При дальнейшем анализе двухкомпонентного состояния (26) обратим сначала внимание на следующее интересное обстоятельство. Для стационарной части состояния (нейтронного конденсата)  $\psi_c$  в веществе имеет место соотношение

$$\vec{j} = - \frac{\hbar}{m} \frac{k_r}{2k_1} \nabla |\Psi|^2. \quad (39)$$

Эта пропорциональность тока и градиента плотности, выражая важное свойство среды (с коэффициентом пропорциональности, параметрически зависящим от  $k_0$  в силу закона дисперсии), вполне аналогична исходному пункту теории диффузии.

С другой стороны, проблема состоит в отыскании состояния  $\Psi_n$  нейтронов, глубоко проникших в вещество. Ввиду деликатности такой постановки вопроса, указанную далеко идущую аналогию целесообразно обсудить несколько подробнее. Соотношению (39) формально соответствует значение коэффициента диффузии:

$$D = \frac{k_r}{2k_1} \frac{\hbar}{m}. \quad (40)$$

В числителе стоит выражение для вещественной скорости  $v_r = \hbar k_r / m$  вдоль "когерентной" волны  $\psi_c$ , которой отвечает микроскопическая скорость диффундирующей частицы. Роль её длины свободного пробега играет расстояние  $l_1 \approx k_1^{-1}$ , на котором затухает эта волна. В итоге  $D \approx v_r l_1$ , аналогично газокинетическим представлениям<sup>7)</sup>. Не менее пристального

7) Тем не менее здесь не имеется в виду обычная диффузия, сопровождающаяся ростом энтропии. Речь идет лишь об определенном способе теоретического рассмотрения проблемы чисто квантового проникновения нейтронов внутрь вещества на большие глубины.

внимания заслуживает наш аналог времени между столкновениями

$$\tau_n \approx \frac{l_1}{v_r} \approx \frac{m}{\hbar k_1 k_r}. \quad (41)$$

Это своеобразное время квантовой релаксации играет существенную ограничительную роль для всего последующего.

Как и в случае обычной диффузии, мы потребуем достаточно крупных пространственных и временных масштабов:

$$k_1 x \gg 1, \quad \frac{\hbar k_1 k_r}{m} t \gg 1. \quad (42)$$

Напомним, что цель состоит в том, чтобы описать эволюцию второго слагаемого  $\Psi_n(x, t)$  выражения (26).

Отметим, что для конкретных нестационарных квантовых задач выбор начала отсчета времени отнюдь не безразличен. Здесь и ниже время  $t$  отсчитывается от момента начала облучения полубесконечной среды монохроматическими нейтронами с волновым числом  $k_0$ .

Роль второго из неравенств (42) можно прокомментировать с несколько иной точки зрения. Грубо говоря,  $\tau_n$  по порядку величины есть наивысшая характерная ("микроскопическая") частота у системы инфильтрованных в среду нейтронов. Однако по мере фактического нахождения части  $\Psi_n$  появится возможность оценивать частоту  $\Delta\omega \ll \tau_n^{-1}$ , характеризующую темпы её временной эволюции. Оказывается, она стремится к нулю, и в этом смысле состояние как бы стремится к стационарному. Между тем значение (40) коэффициента диффузии было определено по стационарной волне  $\psi_c$ , для которой  $\Delta\omega = 0$ . Поэтому имеются определенные основания для использования конкретного значения (40) и в нестационарных выкладках в качестве низкочастотного предела<sup>8)</sup>.

Использование уравнения непрерывности позволяет перейти по известным образцам к основному уравнению диффузии. В

8) Подобно тому как коэффициент пропорциональности между энергией и импульсом длинноволновых фононов определяется сжимаемостью основного состояния жидкого гелия, заведомо никаких фононов не содержащего (см., например, [15]).

одномерном случае оно принимает вид

$$\frac{\partial |\Psi_n|^2}{\partial t} = D \frac{\partial^2 |\Psi_n|^2}{\partial x^2} \quad (43)$$

для интересующей нас плотности инфильтрации. Правда, сохранение числа частиц относится ко всему состоянию (26), а не только ко второму слагаемому. Но фактически, в наиболее интересной области внутри среды, где находится преобладающая доля нейтронов, справедливо:

$$|\Psi_n| \gg |\psi_c|. \quad (44)$$

Поэтому индекс  $n$  при волновой функции мы будем иногда опускать, а тесную связь между неравенством (44) и вторым из критериев (42) (см. также оценку (41)) проще усматривать на конкретных примерах уже выполненных вычислений.

Найдем сначала плотность нейтронов в веществе. Плотность их потока из вакуума через поверхность составляет  $\mu\nu_0$  в наших обозначениях и нормировках. По аналогии с соответствующей задачей на теплопроводность (см., например, [16]), заключаем, что

$$|\Psi_n|^2 = \frac{\mu\nu_0}{\sqrt{\pi D}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4D(t-\tau)}} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (45)$$

Здесь имеются две области:

$$x \ll \sqrt{Dt}, \quad |\Psi_n|^2 \approx 2\mu\nu_0 \sqrt{\frac{t}{\pi D}}. \quad (46)$$

$$x \gg \sqrt{Dt}, \quad |\Psi_n|^2 \approx 4\mu\nu_0 \sqrt{\frac{D}{\pi}} \frac{t^{3/2}}{x^2} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

Можно убедиться, что при соблюдении второго из критериев (42) условие (44) уже выполняется.

Однако плотность нейтронов  $|\Psi_n|^2$  еще не определяет их волновую функцию. Привлечём поэтому известное квантовомеханическое выражение для плотности тока

$$j_x = \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right). \quad (47)$$

Подстановка выражения через фазу

$$\Psi(x, t) = |\Psi| e^{i\varphi(x, t)} \quad (48)$$

даёт:

$$j_x = \frac{\hbar}{m} |\Psi|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (49)$$

Во избежание недоразумений необходимо решительно подчеркнуть важную специфическую черту рассматриваемой здесь задачи (см. также примечание 7). "Диффузионный" поток и ток квантовомеханический - это в сущности одно и то же. Приравнивая соответствующие выражения (39) и (49), приходим к дифференциальному уравнению

$$|\Psi|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{k_r}{2k_1} \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial x}. \quad (50)$$

Оно определяет фазу волновой функции

$$\varphi(x, t) = - \frac{k_r}{2k_1} \ln |\Psi|^2 - \varphi_0(t), \quad (51)$$

$$\Psi = \sqrt{|\Psi|^2} e^{-\left( \varphi_0(t) + \frac{k_r}{2k_1} \ln |\Psi|^2 \right)}$$

с точностью до зависящего только от времени произвольного слагаемого  $\varphi_0(t)$ . Последнее будем стараться выбирать попроще и с тенденцией получить характерный множитель  $e^{-i\omega_0 t}$ , по крайней мере в ближней области, где стремление к стационарному состоянию кажется более выраженным.

После несложных вычислений получаем окончательно:

$$x \gg \frac{\hbar}{m v_0}, \quad t \gg \frac{m}{\hbar k_1 k_r}$$

$$x \ll \sqrt{\frac{k_r}{k_1} \frac{\hbar t}{m}} \quad \Psi = \sqrt{\mu v_0} \left( \frac{8m}{\pi \hbar} \frac{k_1}{k_r} t \right)^{1/4} e^{-i \omega_0 t} \quad (52)$$

$$x \gg \sqrt{\frac{k_r}{k_1} \frac{\hbar t}{m}} \quad \Psi = \sqrt{\mu v_0} \left( \frac{8m}{\pi \hbar} \frac{k_1}{k_r} t \right)^{1/4} \sqrt{\frac{k_r}{k_1} \frac{\hbar t}{m x^2}} \times$$

$$x e^{i \frac{k_r}{2k_1} \ln \frac{k_1}{k_r} \frac{m x^2}{\hbar t}} \quad x e^{i(k_r + i k_1) \frac{m x^2}{4 \hbar k_r t}} \quad x e^{-i \omega_0 t}$$

И всё же, как видим, окончательного перерождения в полностью стационарное состояние в полубесконечной среде так и не наступает.

Если рассуждать очень строго, то следовало бы сделать ещё одно замечание. В тонком слое вещества вблизи поверхности полученные формулы не справедливы. Но хорошо известно, что на очень больших расстояниях диффузионное приближение тоже теряет применимость. Подобное же обстоятельство имеет место и в данном случае, а причины нарушения допускают специфичные для нашей задачи интерпретацию и формулировку.

В дальней области  $x \gg \sqrt{Dt}$  ход нейтронной плотности в основном экспоненциальный. Продифференцировав показатель по времени, сопоставим это с микроскопической частотой  $\tau_n^{-1}$  (см. формулу (41)). По порядку величины они сравниваются при

$$x \approx v_r t \approx \frac{\hbar k_r}{m} t$$

Нетрудно заметить, что и условие (44) нарушается, когда  $x \gg v_r t$ . Впрочем, следует оговориться, что на такие большие

расстояния приходится ничтожная, экспоненциально малая доля полного числа нейтронов в среде.

### 5. Конечные пластины и нейтронные волны слабого поглощения в среде

Наиболее поразительное свойство комплексности закона дисперсии - это отсутствие стационарного состояния нейтронов в полубесконечной среде. Напомним, что речь идет о статическом приближении со строго нулевым поглощением. Интересно, однако, отметить, что не очень радикальные казалось бы изменения физических, или даже просто геометрических предпосылок рассматриваемой задачи существенно влияют на этот результат.

В качестве простейшего примера рассмотрим облучаемую нейтронами макроскопическую пластину. Её толщину, на этот раз большую, будем по-прежнему обозначать через  $\xi \gg k_1^{-1}$ . В этом случае стационарное состояние достигается.

Нейтронный поток составляет  $\mu v_0$  всюду, в том числе при  $x=0$ . На дальнем краю слоя примем эффективное граничное условие

$$|\Psi|^2 \Big|_{x=\xi} = 0 \quad (53)$$

Оно означает, что нейтроны выходят наружу существенно быстрее, чем накапливались бы в полубесконечном образце. Соответствующее решение уравнения (43) (без левой части) тривиально.

$$|\Psi|^2 \approx \frac{\mu v_0}{D} (\xi - x) \quad (54)$$

Не составляет труда найти по формуле (51) и волновую функцию внутри пластины:

$$\Psi = \sqrt{2 \frac{k_1 k_0}{k_r} \mu (\xi - x)} e^{-i \frac{k_r}{2k_1} \ln k_1 (\xi - x) - i \omega_0 t} \quad (55)$$

$$x, \xi - x \gg k_1^{-1}$$

Время установления этого стационарного состояния оценивается как обычно:

$$t_{\xi} \approx \frac{\xi^2}{D} \approx \frac{k_1}{k_r} \frac{m\xi^2}{h} \quad (56)$$

Вернёмся снова к полубесконечной среде  $0 < x < \infty$  в связи с другим, ещё более важным вопросом. В принципе, статическое приближение вполне допускает введение поглощения неподвижными ядрами. По отношению к радиационному захвату<sup>9)</sup> среднее время жизни составляет

$$\tau_c = \frac{1}{n(v\sigma_c)} \quad (57)$$

а уравнение диффузии с учетом захвата приобретает вид

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} = D \frac{\partial^2 |\Psi|^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\tau_c} |\Psi|^2 \quad (58)$$

Однако здесь необходимо принять во внимание изложенные в предыдущем разделе ограничительные соображения. Очевидно, мы должны потребовать:

$$\frac{\hbar k_1 k_r}{m} \tau_c \gg 1, \quad (59)$$

чтобы диффузионный механизм проникновения нейтронов, грубо говоря, успел заработать. Таким образом, уравнение (58) в действительности относится к достаточно слабому поглощению.

Теперь ясно, как следует видоизменить решение, представленное в форме (45):

$$|\Psi_n|^2 = \frac{\mu v_0}{\sqrt{\pi D}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4D(t-\tau)} - \frac{t-\tau}{\tau_c}} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (60)$$

9) Как известно, для очень холодных нейтронов существует два канала их ухода из реальной среды: радиационный захват и неупругое рассеяние, сечение которого также подчиняется закону  $1/v$  [3]. В статическом приближении неупругое рассеяние отсутствует. Поэтому здесь мы говорим только о радиационном захвате, имея в виду, что при конкретных оценках следует принимать во внимание оба процесса.

Останавливаться на варианте  $t \ll \tau_c$  излишне, так как соответствующие формулы (46) и (52) уже получены. Противоположный случай

$$t \gg \tau_c \quad (61)$$

представляет существенный интерес.

Результат интегрирования определится конкуренцией двух экспонент, одна из которых растёт, а вторая убывает при увеличении  $\tau$ . Обращаясь для ориентировки к окрестности нижнего предела интегрирования, видим, что роль характерного играет расстояние  $x \approx \sqrt{D/\tau_c} t$ . Асимптотическое поведение при  $x \gg \sqrt{D/\tau_c} t$  не слишком интересно. По сравнению со второй из формул (46) добавляется ещё экспоненциальный множитель поглощения самых ранних из попавших в образец нейтронов  $\exp(-t/\tau_c)$ .

Обратимся к ближней области. Несложное интегрирование показывает, что нейтронная плотность здесь стабилизируется:

$$k_1^{-1} \ll x \ll \sqrt{\frac{D}{\tau_c}} t, \quad (62)$$

$$|\Psi|^2 = \frac{\mu v_0}{\sqrt{D/\tau_c}} e^{-\frac{x}{\sqrt{D\tau_c}}} \cdot t_x \approx \max \left\{ \tau_c, \sqrt{\frac{\tau_c}{D}} x \right\}.$$

Результат согласуется со стационарным вариантом уравнения (58). Кроме того, приведена, вообще говоря, пространственно-зависящая оценка времени установления.

Особенный интерес представляет волновая функция этого стационарного состояния. Возникающим здесь выражениям удаётся придать более компактную форму, если ввести некое поглощательное волновое число  $k_c$  [6]. Оно определяется несколько формально:

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{2\hbar}{m} k_c^2, \quad k_c = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\tau_c}} \quad (63)$$

После всех подстановок, по формуле (51) получаем окончательно

$$k_1 x \gg 1.$$

$$\Psi = \left( \frac{k_1}{k_r} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{k_0}{\mu k_c}} e^{i \left( \sqrt{\frac{k_r}{k_1}} + i \sqrt{\frac{k_1}{k_r}} \right) k_c x - i \omega_0 t}, \quad (64)$$

$$t \approx \max \left\{ \frac{m}{\hbar k_c}, \sqrt{\frac{k_1}{k_r}} \frac{m}{\hbar k_c} x \right\}.$$

Особенность, которой обладает волновая функция при  $k_c=0$ , выражает отсутствие стационарного состояния при строго нулевом поглощении.

Мы приходим к следующим важным выводам. Сочетание двух обстоятельств - комплексности изначального закона дисперсии  $k_1, k_r \neq 0$  и слабого поглощения - генерирует вторую ветвь  $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$  спектра нейтронных волн в среде. Физически она реализуется в глубине вещества, когда  $k_1 x \gg 1$ . Здесь имеет место:

$$\alpha_r = \sqrt{\frac{k_r}{k_1}} k_c, \quad \alpha_i = \sqrt{\frac{k_1}{k_r}} k_c. \quad (65)$$

Этому результату можно попытаться дать физически более наглядную формулировку. Достаточно слабое поглощение нейтронов начинает играть существенную роль только после глубокого проникновения их в глубь вещества. Но тогда по квантовым причинам оно перенормирует нейтронные волны в среде, существенно удлиняя их. Обращает на себя внимание ещё одна любопытная черта этих длинных волн слабого поглощения. Перенормировочный множитель

$$\frac{k_c}{\sqrt{k_1 k_r}} \ll 1 \quad (66)$$

(см. формулы (59) и (63)) одинаков и для вещественной, и для мнимой частей волнового числа.

В противоположном предельном случае  $k_c \gg \sqrt{k_1 k_r}$  довольно привлекательным выглядит широко применяемое в литературе введение комплексного среднего потенциала в среде. Подчеркнём, что излагаемые здесь результаты не имеют прямого отношения к его мнимой части. Иными словами, в условиях комплексности изначального (без поглощения) закона дисперсии и при достаточно слабом поглощении его описание с помощью комплексного потенциала становится неадекватным.

Наконец, коснемся вкратце задачи о достаточно толстом слое вещества  $\xi \gg k_1^{-1}$  с  $k_c \ll \sqrt{k_1 k_r}$ . При наших граничных условиях уравнение (58) даёт стационарное решение

$$|\Psi|^2 = \frac{\mu v_0}{\sqrt{D/\tau_c}} \frac{\text{sh} \frac{\xi - x}{\sqrt{D\tau_c}}}{\text{ch} \frac{\xi}{\sqrt{D\tau_c}}}. \quad (67)$$

Однако из-за наличия поглощения истинный коэффициент прохождения нейтронов через пластину  $|T|^2$  нельзя теперь считать равным его унитарному значению  $\mu$ . Вычисляя поток на выходную поверхность  $x=\xi$ , приходим к

$$|T|^2 = \frac{\mu}{\text{ch} \frac{\xi}{\sqrt{D\tau_c}}}. \quad (68)$$

Здесь просматриваются два предельных случая:

$$\begin{aligned} \xi \ll \sqrt{D\tau_c}, & \quad |T|^2 \approx \mu, \\ \xi \gg \sqrt{D\tau_c}, & \quad |T|^2 \approx 2\mu e^{-\frac{\xi}{\sqrt{D\tau_c}}}. \end{aligned} \quad (69)$$

Волновая функция нейтронов внутри образца находится по формуле (51):

$$\Psi = \left( \frac{k_1}{k_r} \right)^{1/4} \sqrt{\mu \frac{k_0}{k_c}} \frac{\text{sh } 2\sqrt{\frac{k_1}{k_r}} k_c (\xi-x)}{\text{ch } 2\sqrt{\frac{k_1}{k_r}} k_c \xi} \times e^{-i \frac{k_r}{2k_1} \ln \text{sh } 2\sqrt{\frac{k_1}{k_r}} k_c (\xi-x) - i\omega_0 t} \quad (70)$$

$$x, \xi - x \gg k_1^{-1}$$

Время установления стационарного состояния в слабопоглощающей пластине тоже оценивается.

## 6. Выводы

Обсудим ситуацию в свете более конкретных оценок. В интересующем нас случае веществ с  $b > 0$  данные о потенциале часто приводятся в форме так называемых граничных скоростей или граничных энергий. Характерное значение граничной скорости  $v_{11a} \approx 5$  м/с, что соответствует  $\alpha_0^2 \approx 10^{12} \text{ см}^{-2}$  для высоты потенциального барьера. Неглубоко под ним

$$\frac{k_0}{\alpha_0^2 a} \approx (\alpha_0 a)^{-1} \approx 10^2.$$

Таким образом, критерий (7) выполняется с запасом в два порядка, и средний потенциал оказывается хорошим исходным приближением для УХН. Лишь при  $v_0 \approx 0,1$  м/с начинают доминировать перерассеяния и самоперерассеяния. Ещё ниже расположена область сверхмедленных нейтронов.

Однако возможностям современного эксперимента отвечает скорее умеренная подбарьерность  $\alpha_0 > k_0 \gg \alpha_0^2 a$ . Тогда наиболее существенные результаты работы сводятся примерно к следующему. Возможность утечек за счёт инфильтрации на большие глубины  $x \gg k_1^{-1}$  решающим образом зависит от величины

неизбежного поглощения нейтронов в рассматриваемом веществе<sup>10)</sup>.

Это проще всего усмотреть из требования (59), представленного в форме (66). Путем непосредственного перемножения выражений (36) закона дисперсии находим в качестве условия квантовой инфильтрации:

$$k_1 k_r = \frac{1}{2} \frac{J_u}{k_0^2} \approx \frac{\alpha_0^6 a^2}{k_0^2} \gg k_c^2. \quad (71)$$

Здесь непотенциальные поправки, рассмотренные в разделе 3, существеннее, чем мнимая часть комплексного среднего потенциала.

Более употребительные и компактные обозначения с самого начала учитывают, что при наличии поглощения длина рассеяния комплексна:

$$b = b_r + i b_i = b_r - i |b_i|, \quad (72)$$

$$4\pi n b_r \equiv \alpha_0^2, \quad 2\pi n |b_i| = k_c^2 = \frac{m}{2\hbar\tau_c}$$

Малое, как правило, безразмерное отношение

$$\eta = \frac{|b_i|}{b_r} = \frac{2k_c^2}{\alpha_0^2} \ll 1 \quad (73)$$

особенно удобно здесь по следующей причине. Малость его характерного значения

$$\eta_0 \approx \frac{\alpha_0^4 a^2}{k_0^2} \ll 1 \quad (74)$$

непосредственно выражает в энергетической шкале применимость нулевого приближения потенциала. Тем самым интересующая нас глубокая инфильтрация нейтронов за счёт непотенциальных поправок имеет место для очень слабо поглощающих материалов

10) Связь этой утечки с наблюдаемой аномалией при хранении УХН несколько проблематична.

$$\eta \ll \eta_0. \quad (75)$$

В противоположном предельном случае достаточного поглощения

$$\eta \gg \eta_0 \quad (76)$$

потенциальная картина достаточно хорошо описывает ситуацию. Известные составляющие комплексного потенциала

$$U = V - iW;$$

$$V = \frac{\hbar^2 \alpha_0^2}{2m}, \quad W = \frac{\hbar^2 k_C^2}{m} = \frac{\hbar}{2\tau_C} \quad (77)$$

вполне убедительно следуют из метода тонкого слоя. При соблюдении неравенства (74), достаточно выражение (72) подставить в соответствующие формулы раздела 1.

Обратимся непосредственно к соответствующему закону дисперсии для комплексного волнового числа  $k^C = k_r^C + ik_i^C$ :

$$k_r^C = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0^2 - \alpha_0^2 + \sqrt{(k_0^2 - \alpha_0^2)^2 + (2k_C^2)^2}}, \quad (78)$$

$$k_i^C = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\alpha_0^2 - k_0^2 + \sqrt{(\alpha_0^2 - k_0^2)^2 + (2k_C^2)^2}},$$

$$k_i^C k_r^C = k_C^2, \quad k_0^2 \gg \frac{\alpha_0^4 a^2}{\eta}$$

Последнее равенство допускает наглядное физическое толкование. Грубо говоря, если ориентироваться на выражение типа (26), то в пределах длины затухания  $(k_i^C)^{-1}$  обычной "когерентной" волновой функции  $\psi_C$  нейтрон успевает захватиться с вероятностью порядка единицы. Но из-за этого на долю инфильтрационной ("диффундирующей") части состояния  $\Psi_n$  просто не остаётся частиц, и она вообще не реализуется.

Можно сказать, что достаточное поглощение (76) перекрывает инфильтрационный механизм утечки нейтронов. В подобных условиях непотенциальные поправки не генерируют никакого нового явления, и вопрос о них не столь актуален. В

качестве подтверждения сказанному подставим волновые числа (77) в формулу (28) для потерь. Ниже барьера имеем:

$$\mu_C = 4 \frac{k_r^C k_0}{|k^C + k_0|^2} \approx 4 \frac{k_C^2}{\alpha_0^2} \frac{k_0}{\sqrt{\alpha_0^2 - k_0^2}} \gg \mu, \quad (79)$$

и коэффициент потерь существенно больше инфильтрационного (сравни с соответствующим вариантом 1) формулы (38)).

Таким образом, среды с  $b_r > 0$  естественно попытаться классифицировать по указанному признаку на слабые поглотители, допускающие глубокую инфильтрацию УХН, и умеренные поглотители, для которых справедливо приближение комплексного потенциала. Вернемся к более конкретным оценкам. Не слишком глубоко под барьером  $k_0 \lesssim \alpha_0$ , что наиболее соответствует сегодняшним возможностям эксперимента, формула (74) переходит в

$$\eta_0 \approx \alpha_0^2 a^2 \approx 10^{-4}. \quad (80)$$

Это очень грубая и, быть может, фактически завышенная оценка. Однако именно с этой величиной и следует сравнивать  $\eta$  для решения вопроса о применимости модели комплексного потенциала.

В области (75), где слабый захват не оказывает прямого влияния на потери, формулы (36)–(38) дают

$$\mu \approx \frac{\alpha_0^4 a^2}{k_0 \sqrt{\alpha_0^2 - k_0^2}} \approx \alpha_0^2 a^2 \approx 10^{-4}. \quad (81)$$

Если считать это грубой оценкой порядка величины потерь нейтронов при одном столкновении со стенкой, то это не так далеко от количественных масштабов наблюдаемой аномалии при хранении УХН [5]. Судя по всему, к проникаемым в этом смысле для нейтронов материалам относятся, например, бериллий ( $\eta \approx 3.4 \times 10^{-7}$ ) и твёрдый кислород ( $\eta \approx 0.9 \times 10^{-8}$ ).

К сожалению, для большинства веществ имеет место некоторый промежуточный случай  $\eta \approx \eta_0$ , примером чего является медь ( $\eta \approx 1.4 \times 10^{-4}$ ).



Что касается достаточно поглощающих в нашем смысле веществ, для которых выполняется (76), то в настоящее время они мало привлекают внимание экспериментаторов из-за понятного стремления снизить и даже ликвидировать вообще какие бы ни было потери УХН. Можно утверждать, что не только при выполнении (76), но при  $\eta \approx \eta_0$ , экспериментальные данные не противоречат существенным следствиям обычной теории потенциала.

Таково, в общих чертах, положение дел при  $k_0^2 \ll \alpha_0^4 a^2$ . Имеющиеся возможности спектроскопии УХН и быстрый прогресс в создании интенсивных источников УХН позволяет надеяться, что в эксперименте будут доступны нейтроны с существенно меньшими, чем у УХН энергиями. Для фактического получения сверхмедленных нейтронов  $k_0^2 \ll \alpha_0^4 a^2$  потребовалось бы её снижение более, чем на четыре порядка. Тем не менее, представляется интересным попытаться подтвердить возможность инфильтрации нейтронов, благодаря чему тонкие пленки могут иметь определенную прозрачность для УХН с энергиями ниже барьера. Этот путь кажется на сегодняшний день более доступным.

Весьма существенна и энергетическая зависимость оценки (74). Легко видеть, что на обрисованную выше классификацию материалов влияет порядок величины  $k_0^2$ . Любое вещество постепенно перейдет в инфильтрующую категорию (75) ещё при  $\alpha_0^4 a^2 \ll k_0^2 \leq \alpha_0^2 a^2 \eta^{-1}$ . Тем самым оно обнаружит эту своеобразную частичную проницаемость для нейтронов ещё до того, как энергия последних опустится в сверхмедленную область.

Можно также рекомендовать и другие опыты, направленные на экспериментальную проверку закона дисперсии ультрахолодных нейтронов. Отметим, что сколько-нибудь точные эксперименты в этой области отсутствуют. Возможно, что полезным может быть эксперимент типа опыта Физо для УХН [17, 18, 13]. При соответствующей постановке он может дать прямой ответ о наличии поправок к "потенциальному" закону дисперсии.

В конечном счёте, только эксперимент позволит окончательно удостовериться, что представление о среднем

потенциале, вводимом в теорию из чисто методических побуждений, имеет свои пределы точности. С этой точки зрения, предсказания качественно новых явлений непотенциального характера делают подобные исследования весьма актуальными.

Авторы благодарны Б. Г. Ерозолимовскому, В. К. Игнатовичу, М. В. Казарновскому, А. М. Камчатнову, В. В. Ломоносову, И. А. Митропольскому, А. В. Стрелкову и А. П. Сереброву за плодотворные обсуждения.

## Литература

1. Шапиро Ф. Л. Ультрахолодные нейтроны // Нейтронные исследования. М.: Наука 1976. с. 229
2. Лушиков В. И. Хранение ультрахолодных нейтронов // Международная школа по нейтронной физике (Алушта, 1974): сб. лекций. Дубна: ОИЯИ, 1974. с. 2
3. Игнатович В. Л. Физика ультрахолодных нейтронов. М.: Наука, 1986.
4. Алфименков В. П., Варламов В. Е., Васильев А. В. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1990. т. 52, с. 984.
5. Алфименков В. П., Несвижевский В. В., Серебров А. П. и др. // Письма в ЖЭТФ, 1992, т. 55, с. 92.
6. Франк И. М. Нейтронная оптика и ультрахолодные нейтроны // Международная школа по нейтронной физике (Алушта, 1974): сб. лекций. Дубна: ОИЯИ, 1974. с. 19; УФН, 1991 т. 161, с. 109.
7. Sears V. F. // Phys. Rep. 1982, v. 82, p. 1
8. Warner M., Gubernatis J. E. // Phys. Rev. B, 1985. v. 32, p. 6347.
9. Ферми Э. Научные труды. М.: Наука, 1972. т. , с. 226.
10. Гуревич И. И., Тарасов Л. В. Физика нейтронов низких энергий. М.: Наука, 1965.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
12. Лушиков В. И. Ультрахолодные нейтроны // Нейтрон: к пятидесятилетию открытия. М.: Наука, 1983, с. 132.
13. Носов В. Г., Франк А. И. Сверхмедленные нейтроны и закон дисперсии ультрахолодных нейтронов. Препринт ИАЭ-5403/1. М. 1991.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
15. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика, ч. 2. М.: Наука, 1978.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
17. Sears V. F. // Phys. Rev. A. 1985, v. 32, p. 2524.
18. Cimmino A. e. a. // Nucl. Instr. Meth. A. 1989. v. 284, p. 179.

Рукопись поступила в издательский отдел  
17 ноября 1992 года.