92-418

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-92-418

С.Лима Монтенегро, О.К.Пашаев

ДИНАМИКА ВИХРЕЙ МОДЕЛИ МАГНЕТИКА ИШИМОРИ

1992

Существование нетривиальных топологических конфигураций, нелинейных моделей в (2+1)–мерном пространстве, привлекает внимание исследователей в связи с объяснением таких экзотических явлений планарной квантовой физики, как высокотемпературная сверхпроводимость [1] и квантовый эффект Холла [2]. С другой стороны, открытие локализованных солитонов в (2+1)–мерии [3] и исследование их богатой динамики в рамках модели Деви–Стюартсона [4] показывает, что они могут моделировать неупругие процессы рассеяния квантовых частиц, такие, как рождение и аннигиляция, слияние и распад, а также взаимодействие с виртуальной частицей [5]. В связи с этим, а также с построением многомерной топологической модели магнетика [6], допускающего билинеаризацию, изучение динамики вихрей в (2+1)–мерии представляет несомненный интерес.

В настоящей заметке, используя компьютерную графику PAW , проанализирована динамика топологически нетривиальных, вихревых решений интегрируемой модели магнетика Ишимори [7]. Уравнения движения

$$\vec{S}_t = \vec{S} \times (\vec{S_{xx}} - \vec{S_{yy}}) + \Phi_y \vec{S}_x + \Phi_x \vec{S}_y, \tag{1}$$

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 2\vec{S} \cdot (\vec{S}_x \times \vec{S}_y) \tag{2}$$

описывают эволюцию классического спинового вектора $\vec{S} = \vec{S}(x, y, t)$ единичной длины

$$\vec{S}^2 = 1, \tag{3}$$

с граничными условиями ферромагнитного типа

$$\vec{S} \longrightarrow (0,0,-1) \quad \text{при} \quad x^2+y^2 \longrightarrow \infty. \tag{4}$$

Используя технику Хироты, систему (1—2) редуцируют к билинейной системе для комплексных функций $g(x,y,t)$, $f(x,y,t)$, таких, что

$$S_1 + iS_2 = \frac{2\bar{f}g}{|f|^2+|g|^2}, \quad S_3 = \frac{|f|^2-|g|^2}{|f|^2+|g|^2}. \tag{5}$$

Для аналитических функций $g(z,t), f(z,t)$ комплексного переменного
$z = x+iy$ возникает система одномерных нестационарных уравнений Шрёдингера

$$ig_t + g_{zz} = if_t + f_{zz} = 0. \tag{6}$$

Многовихревые решения с топологическим зарядом N имеют вид [7].

$$g = g_N = \sum_{j=0}^{N} \sum_{m+2n=j} \frac{a_j}{m!n!} z^m (2it)^n, \quad a_N \neq 0, \tag{7}$$

$$f = f_N = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{m+2n=j} \frac{b_j}{m!n!} z^m (2it)^n, \tag{8}$$

где a_j, b_j —произвольные комплексные постоянные. Суммирование $\sum_{m+2n=j}$ проводится по всем возможным комбинациям неотрицательных целых чисел (m,n), удовлетворяющих условию $m+2n = j$.

Первые четыре решения имеют вид

$$g_1 = a_1 z + a_0, \quad f_1 = b_0, \tag{9}$$

$$g_2 = a_2(\frac{1}{2}z^2 + 2it) + g_1, \quad f_2 = b_1 z + f_1, \tag{10}$$

$$g_3 = a_3(\frac{1}{6}z^3 + 2izt) + g_2, \quad f_3 = b_2(\frac{1}{2}z^2 + 2it) + f_2, \tag{11}$$

$$g_4 = a_4(\frac{1}{24}z^4 + z^2 it - 2t^2) + g_3, \quad f_4 = b_3(\frac{1}{6}z^3 + 2izt) + f_3. \tag{12}$$

Определим центр j-го вихря z_j как точку с максимальным значением проекции $S_3 = +1$, $\vec{S} = (0,0,1)$.

Как следует из ур.(5),

$$S_3 = 1 - \frac{2|g|^2}{|f|^2+|g|^2}, \tag{13}$$

он является нулём функции g_N,

$$g_N = \frac{a_N}{N!} \prod_{j=1}^{N} (z - z_j) \tag{14}$$

и удовлетворяет уравнению движения

$$\dot{z}_j = \frac{4}{i} \sum_{k(\neq j)} (z_j - z_k)^{-1}. \tag{15}$$

Для $N \geq 2$ это уравнение обладает $(2N-1)$–константой движения, обеспечивающей интегрируемость системы вихрей. Для $N = 4$ константы движения есть

$$I_1 + iI_2 = \sum_{j=1}^{4} z_j, \tag{16}$$

$$I_3 = \sum_{j=1}^{4} (z_j^2 + \bar{z}_j^2), \tag{17}$$

$$I_4 + iI_5 = \sum_{j=1}^{4} z_j^3 + \sum_{j<k<l} 3z_j z_k z_l, \tag{18}$$

$$I_6 + iI_7 = \sum_{j=1}^{4} z_j^4 - \sum_{j<K} 2z_j^2 z_k^2 + 8z_1 z_2 z_3 z_4. \tag{19}$$

Важная особенность модели Ишимори (1,2) заключается в наличии вещественного поля $\Phi(x,y,t)$, не исчезающего для топологически нетривиальных конфигураций спинового поля $\vec{S}$:

$$\Phi = 2ln(|f|^2 + |g|^2). \tag{20}$$

Если ввести поле скоростей по формулам [6]

$$v_x = \partial_y \Phi, \quad v_y = -\partial_x \Phi, \tag{21}$$

оно удовлетворяет условию несжимаемости:

$$\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0. \tag{22}$$

В этом случае функция Φ интерпретируется как *функция тока* [8]. Направление касательной к линии Φ=const, которое определяется из равенства

$$d\Phi = -v_y dx + v_x dy = 0, \tag{23}$$

совпадает с направлением вектора скорости. Линии уровня $\Phi = const$ являются векторными линиями поля скоростей (21).

В общем случае полная намагниченность вдоль третьей оси (S_3) не сохраняется во времени, с чем связана особенность динамики намагниченности вихрей.

Ниже приводятся трёхмерная и контурная проекции третьей компоненти вектора спина S_3, функции тока Φ и скорости $\vec{V} = (v_x, v_y)$ как функций x, y для различных моментов времени t.

На рис. 1–8 представлены результаты для одиночного стационарного вихря (N=1)

$$g_1 = z, \qquad f_1 = 1, \tag{24}$$

$$v_x = \frac{4y}{1 + x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{-4x}{1 + x^2 + y^2}, \tag{25}$$

с центром в начале координат $(0, 0)$.

На рис. 9–38 показано взаимодействие двух вихрей (N=2)

$$g_2 = 2i(\frac{1}{2}z^2 + 2it) - i, \qquad f_2 = 1, \tag{26}$$

$$v_x = 8\frac{x^2 y + y^3 + y + 4xt}{1 + |g|^2}, \quad v_y = -8\frac{x^3 + xy^2 - x + 4yt}{1 + |g|^2}. \tag{27}$$

При этом положение центров вихрей описывается уравнением

$$|g|^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) + 16xyt + 16t^2 + 1 = 0, \tag{28}$$

или

$$(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4(2t + xy)^2 = 0. \tag{29}$$

Отсюда получаем, что центры вихрей движутся по гиперболам

$$x^2 - y^2 = 1, \tag{30}$$

так что

$$2t + xy = 0. \tag{31}$$

Минимальное сближение вихрей на расстояние 2 соответствует нулевому моменту времени t=0.

Аналогичное поведение имеет место в случае двух вихрей с иной параметризацией (рис. 39–48)

$$g_2 = 2i(\frac{1}{2}z^2 + 2it) - i, \quad f_2 = z. \tag{32}$$

Единственное отличие заключается в уширении формы вихрей.

Если в предыдущих случаях вихри были абсолютно симметричны, то при выборе параметров

$$g_2 = 2i(\frac{1}{2}z^2 + 2it) + 3z - i, \quad f_2 = z, \tag{33}$$

мы имеем дело с вихрями разной формы (рис. 49–58). При этом менее массивный вихрь рассеивается на более массивном.

В случае трех вихрей (N=3)(рис. 59–68)

$$g_3 = 6(\frac{1}{6}z^3 + 2izt), \quad f_3 = 1, \tag{34}$$

положение их центров определяется нулями функции

$$|g_3|^2 = (x^2 + y^2)[(x^2 + y^2)^2 + 48xyt + 144t^2], \tag{35}$$

или

$$(x^2 + y^2 + 12t)^2 - 24t(x - y)^2 = 0. \tag{36}$$

Отсюда при $t < 0$

$$x^2 + y^2 + 12t = 0, \tag{37}$$

$$x = y, \tag{38}$$

получаем что центры вихрей движутся по прямым

$$x = y = \pm\sqrt{6|t|}, \tag{39}$$

проходящим через центр координат.

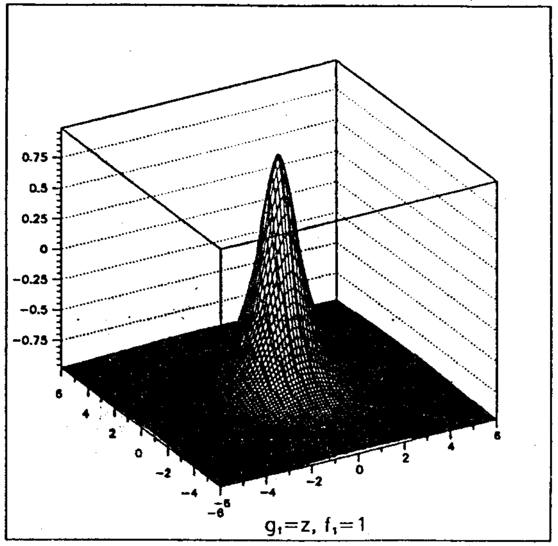


Рис.1

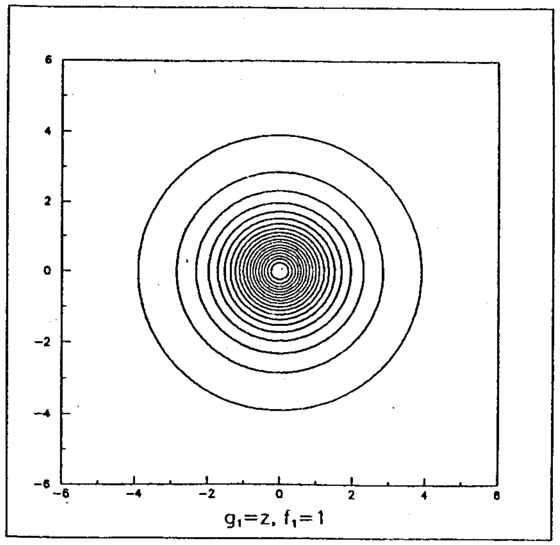


Рис.2

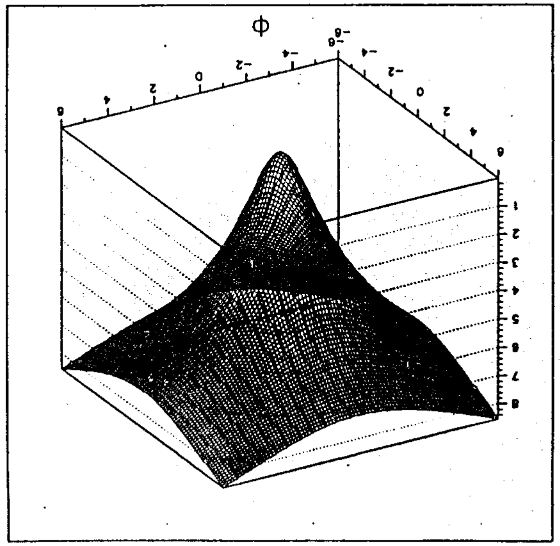


Рис.3

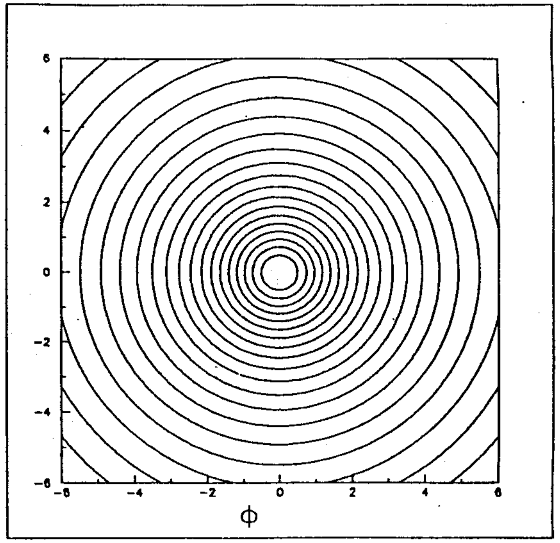


Рис.4

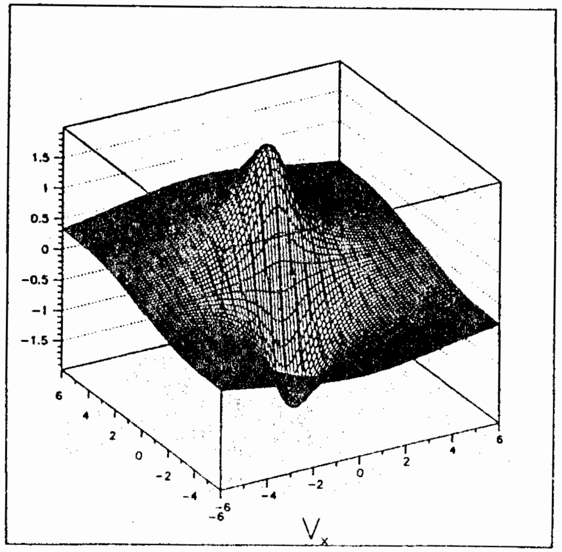


Рис.5

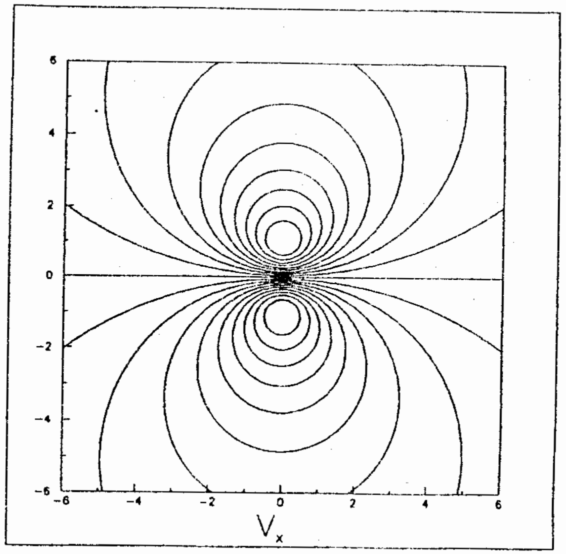


Рис.6

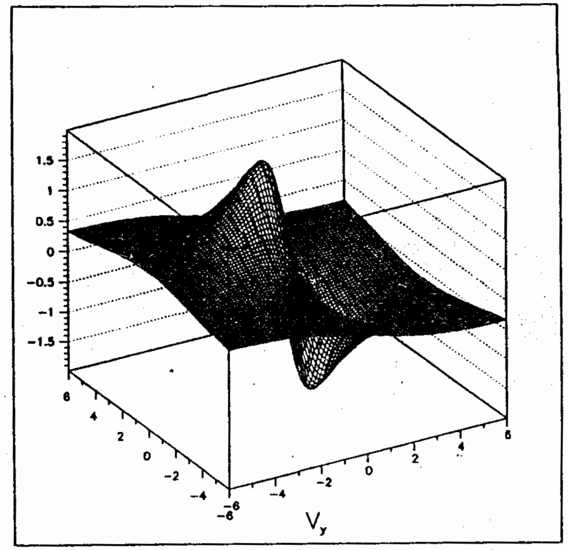


Рис.7

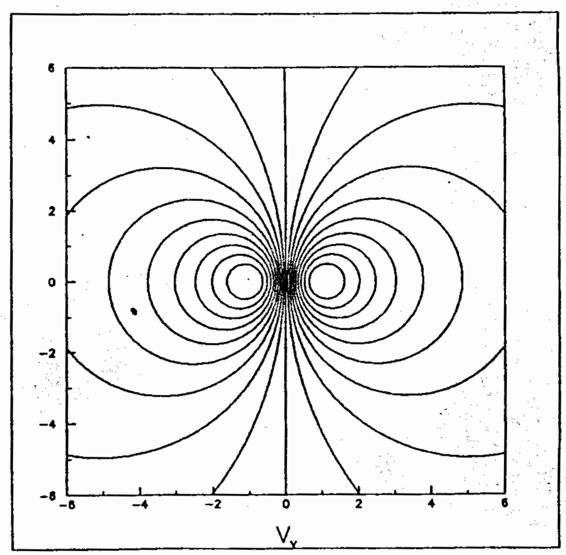


Рис.8

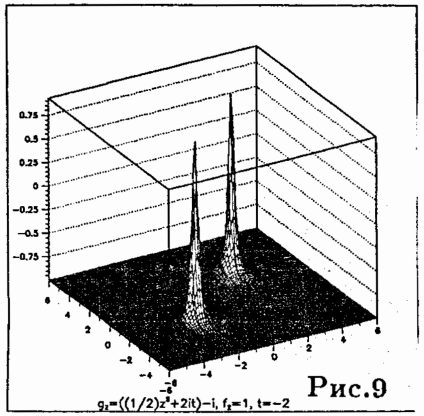


Рис.9

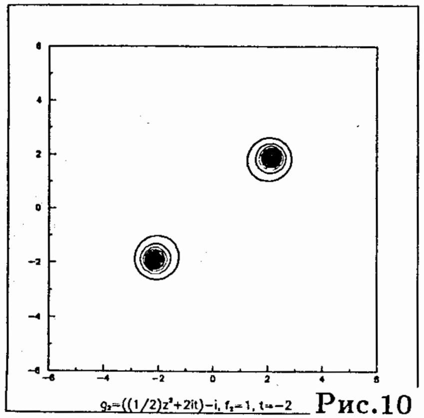


Рис.10

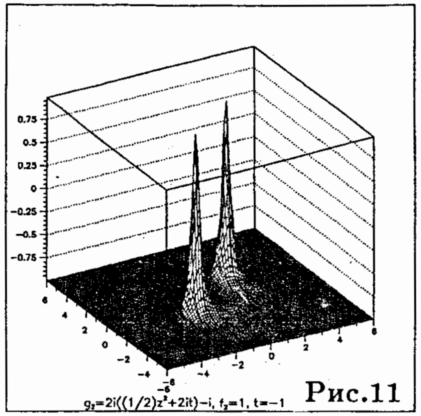


Рис.11

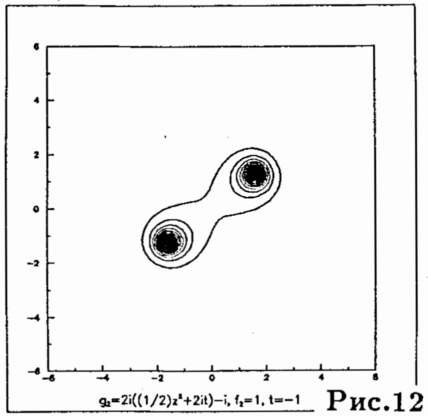


Рис.12

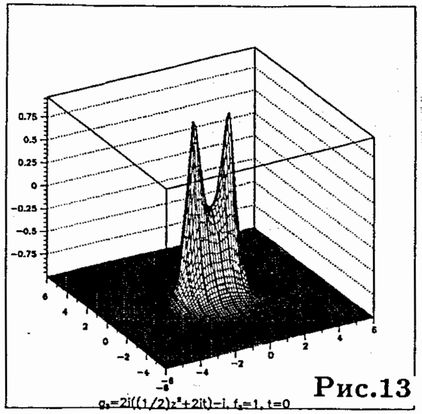


Рис.13

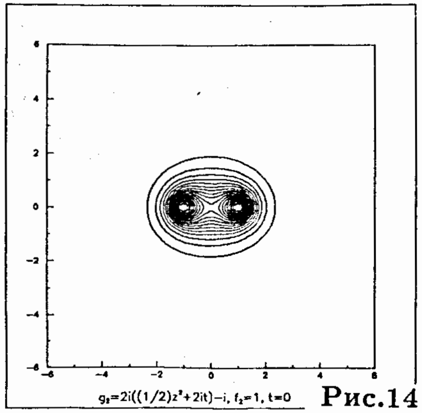


Рис.14

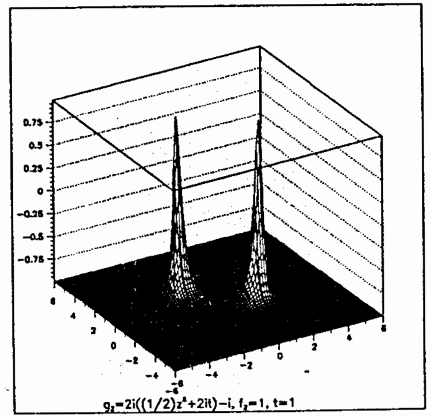


Рис.15

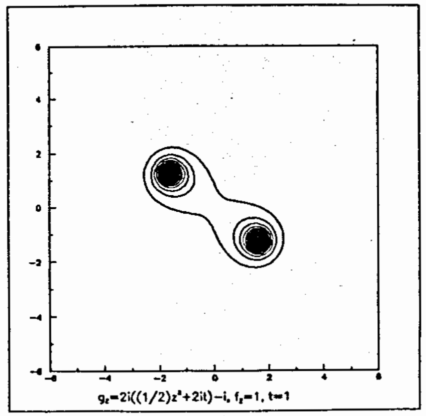


Рис.16

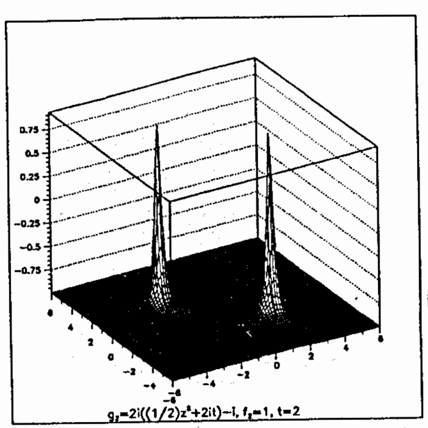


Рис.17

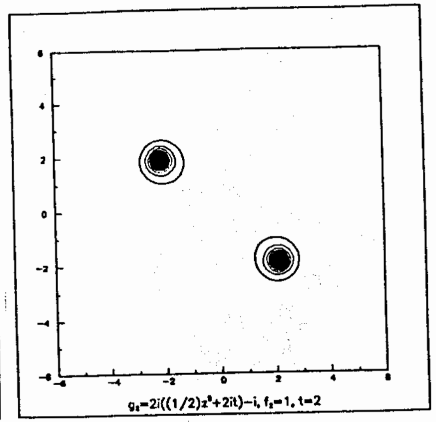


Рис.18

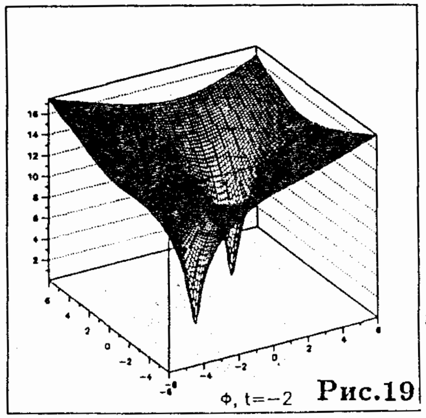


Рис.19

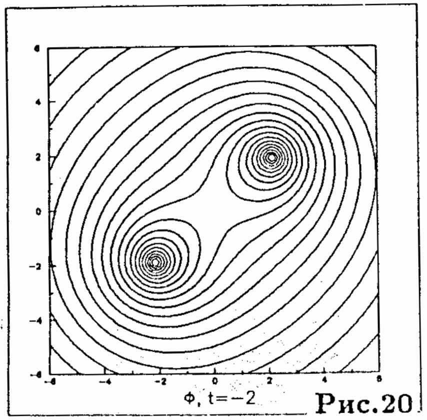


Рис.20

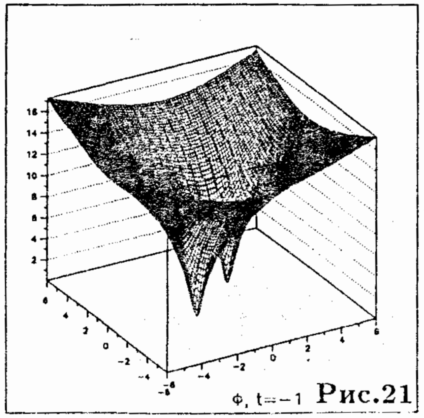


Рис.21

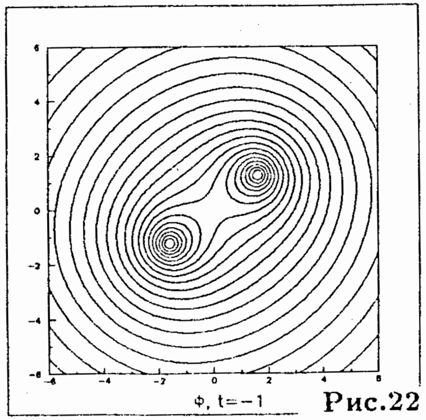


Рис.22

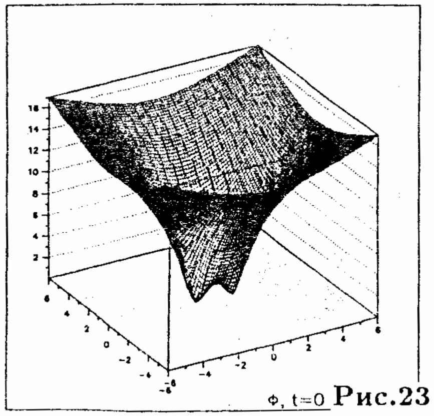


Рис.23

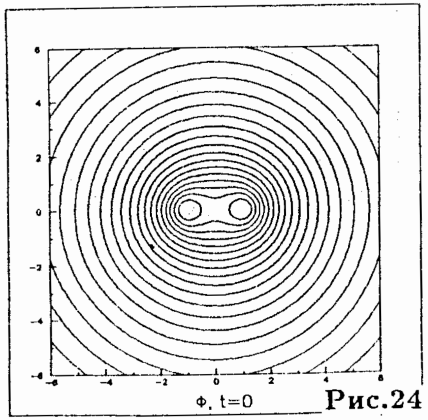


Рис.24

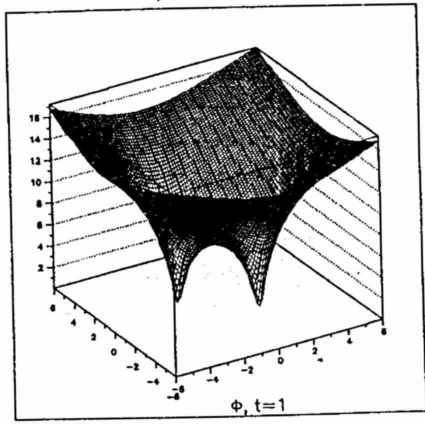


Рис.25

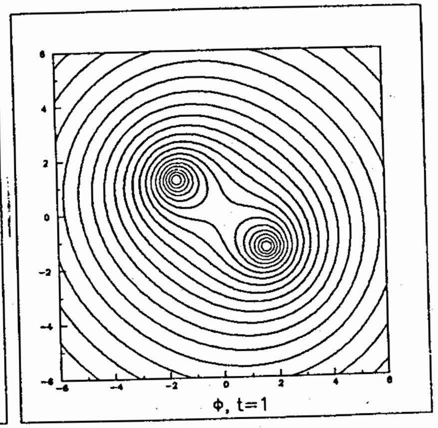


Рис.26

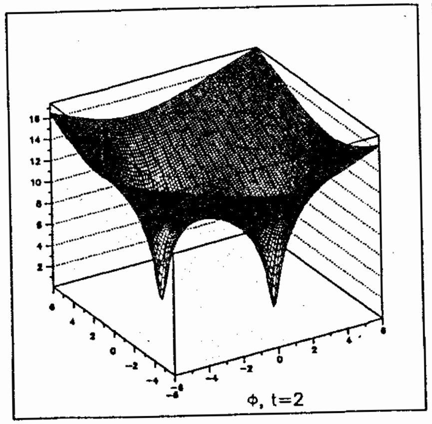


Рис.27

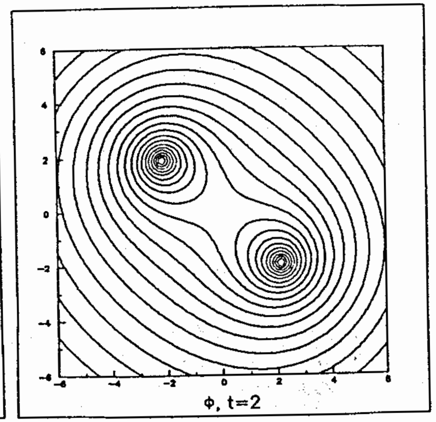


Рис.28

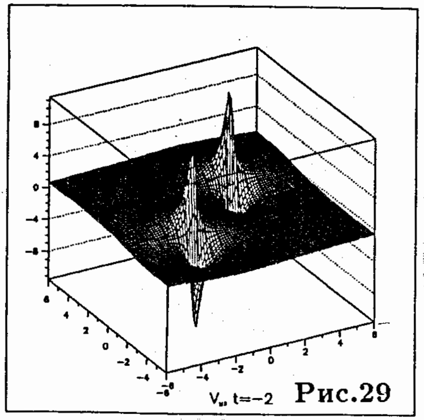


Рис.29

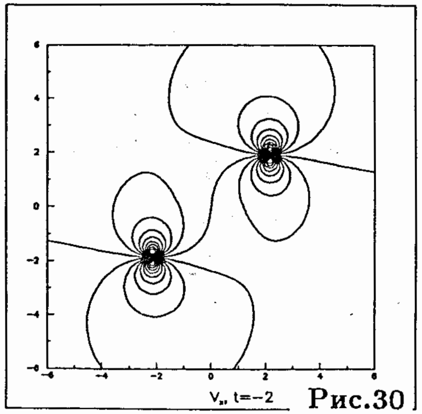


Рис.30

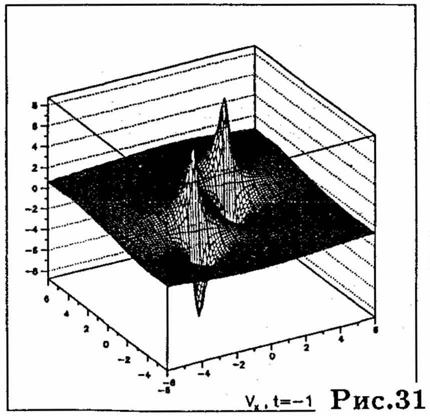


Рис.31

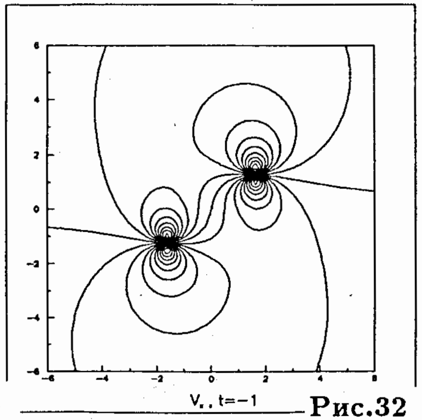


Рис.32

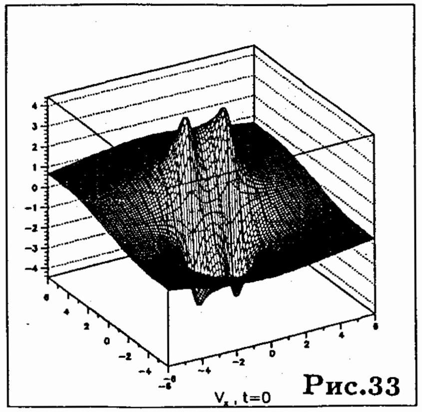


Рис.33

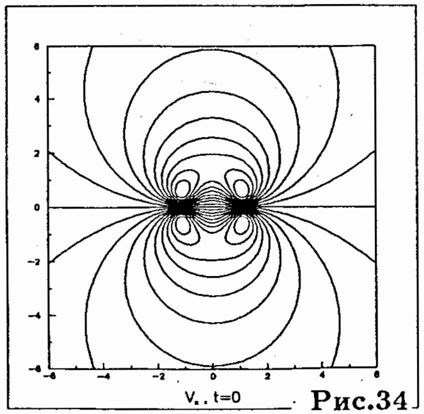
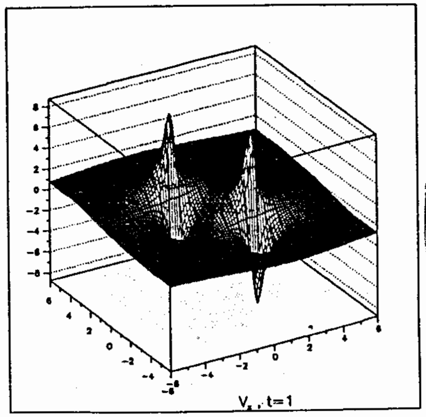


Рис.34



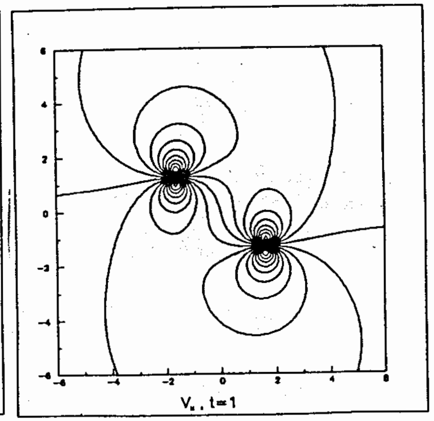
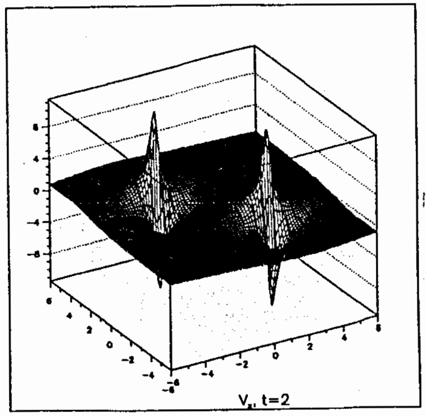


Рис.35

Рис.36



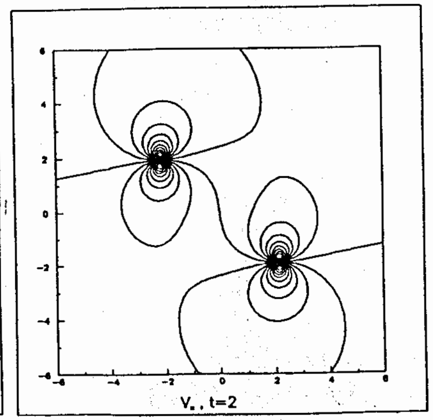


Рис.37

Рис.38

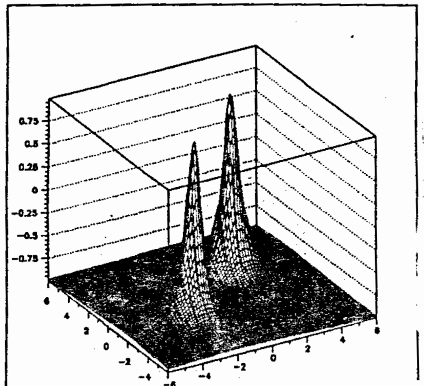


Рис.39

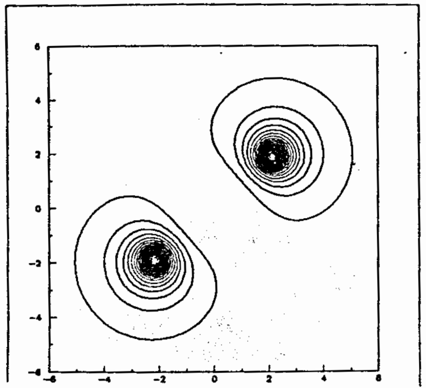


Рис.40

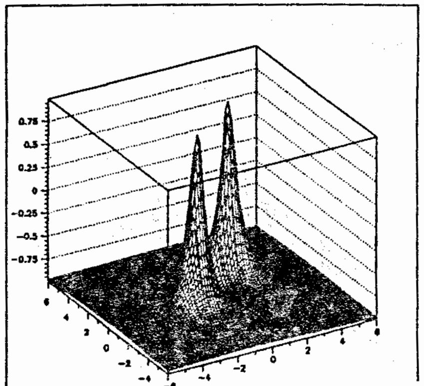


Рис.41

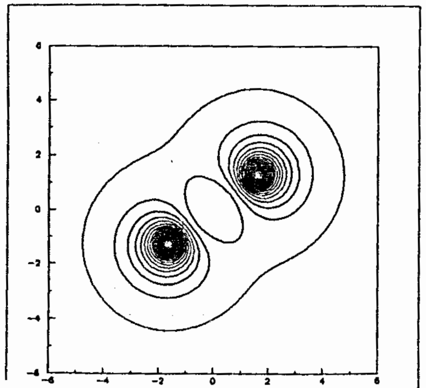


Рис.42

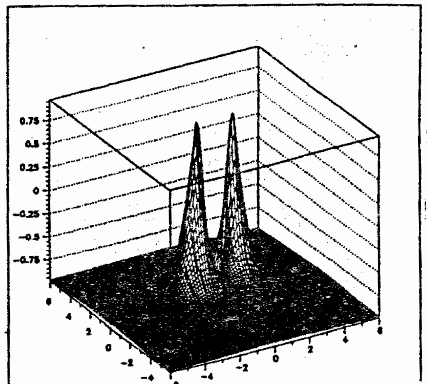


Рис.43

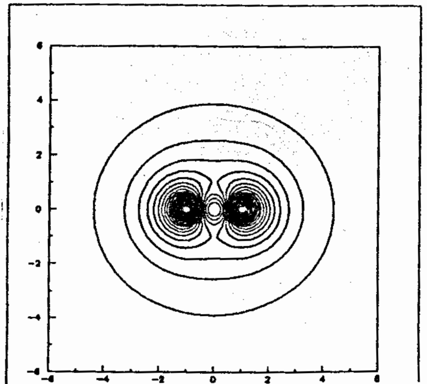
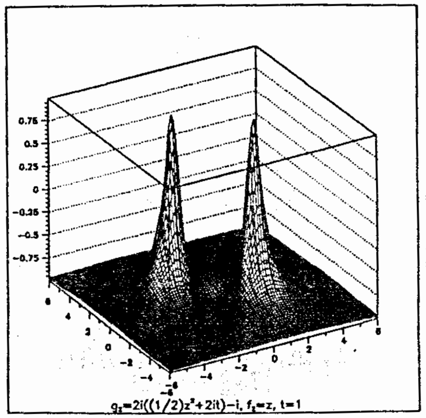


Рис.44



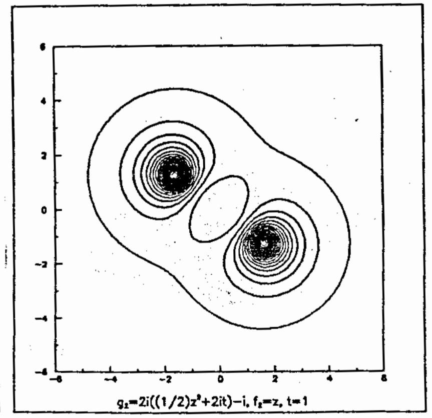
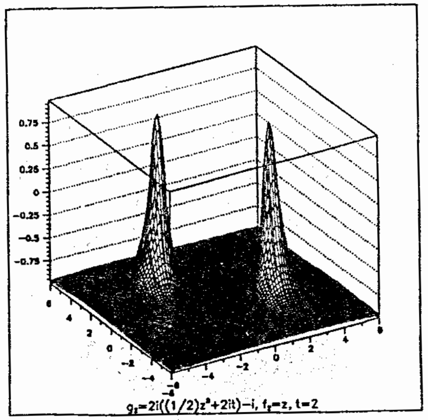


Рис.45

Рис.46



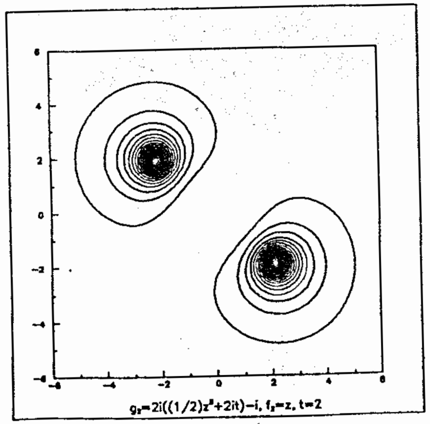
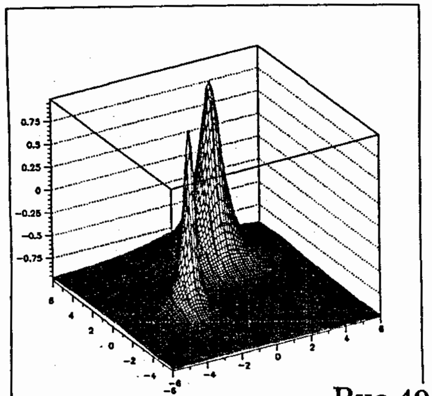
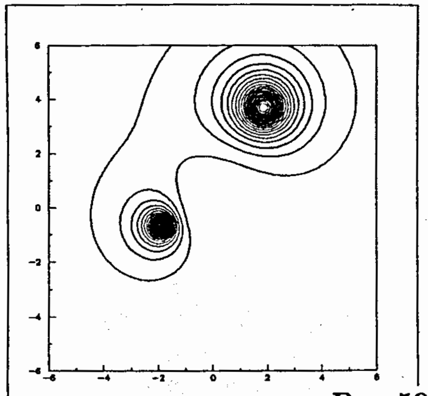


Рис.47

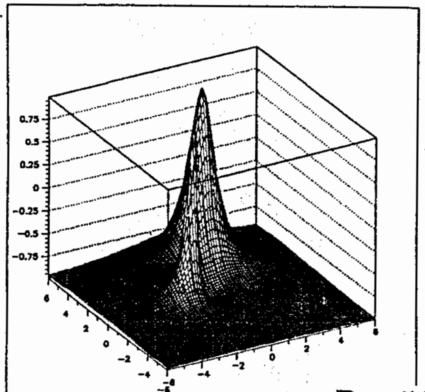
Рис.48



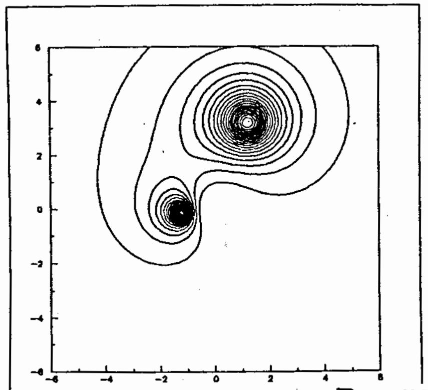
$g_2=2i((1/2)z^2+2it)+3z-i,\ f_2=z,\ t=-2$ **Рис.49**



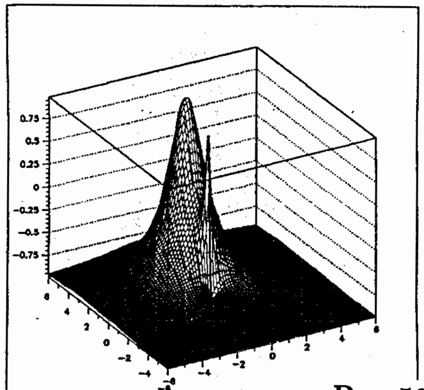
$g_2=2i((1/2)z^2+2it)+3z-i,\ f_2=z,\ t=-2$ **Рис.50**



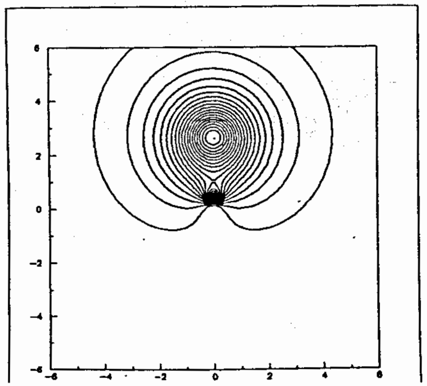
$g_2=2i((1/2)z^2+2it)+3z-i,\ f_2=z,\ t=-1$ **Рис.51**



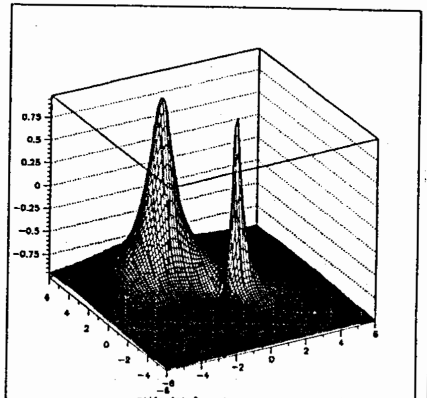
$g_2=2i((1/2)z^2+2it)+3z-i,\ f_2=z,\ t=-1$ **Рис.52**



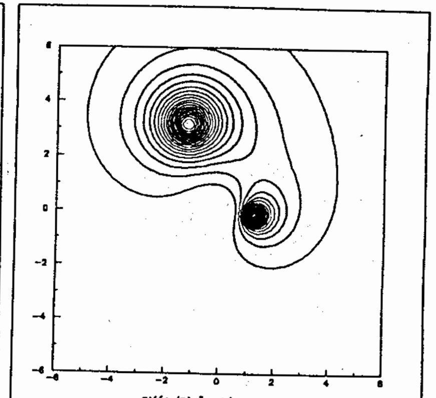
$g_2=2i((1/2)z^2+2it)+3z-i,\ f_2=z,\ t=0$ **Рис.53**



$g_2=2i((1/2)z^2+2it)+3z-i,\ f_2=z,\ t=0$ **Рис.54**

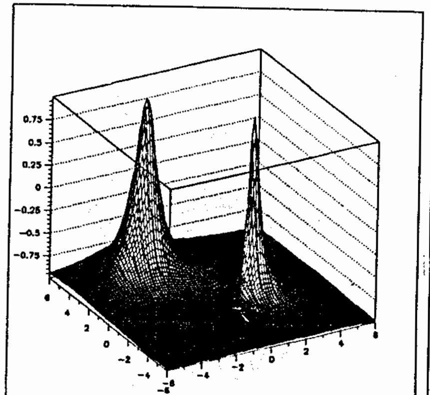


$g_2=2i((1/2)z^2+2it)+3z-i,\ f_2=z,\ t=1$

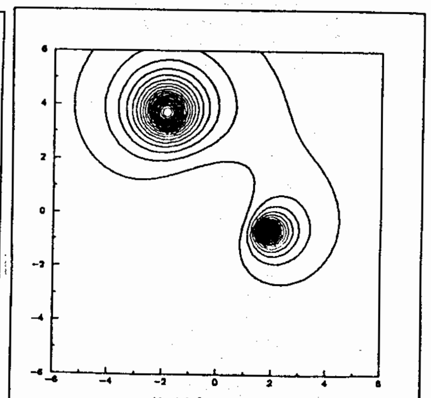


$g_2=2i((1/2)z^2+2it)+3z-i,\ f_2=z,\ t=1$

Рис.55 **Рис.56**



$g_2=2i((1/2)z^2+2it)+3z-i,\ f_2=z,\ t=2$



$g_2=2i((1/2)z^2+2it)+3z-i,\ f_2=z,\ t=2$

Рис.57 **Рис.58**

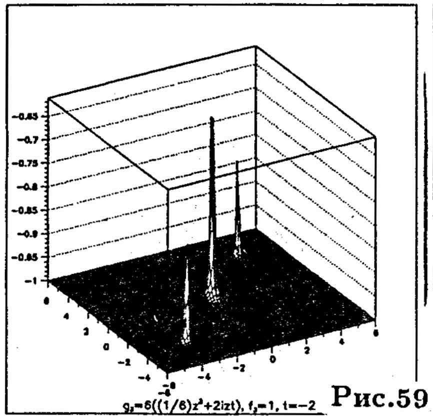


Рис.59

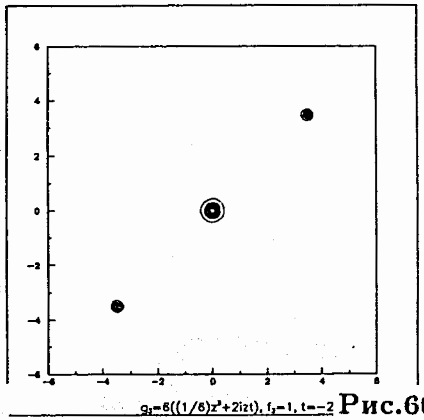


Рис.60

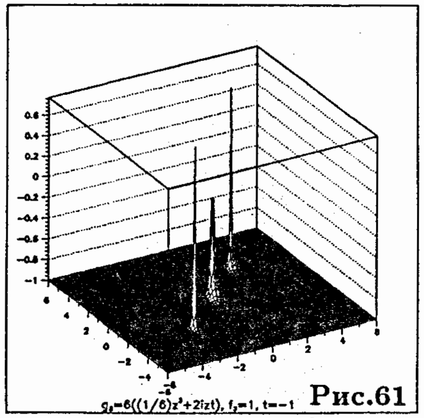


Рис.61

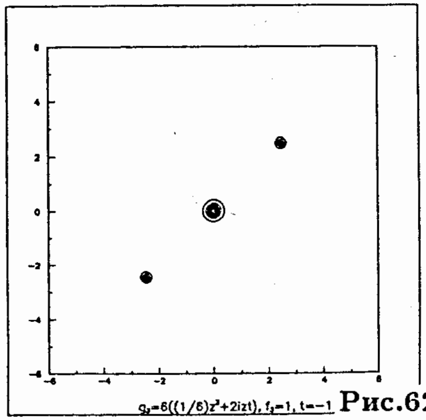


Рис.62

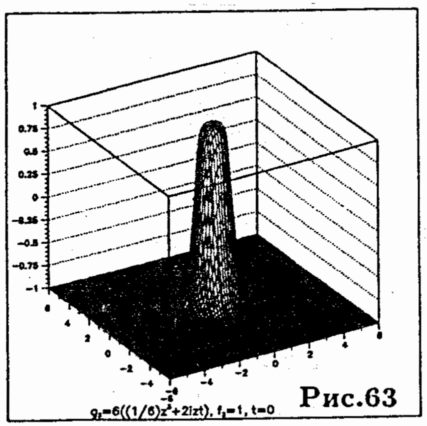


Рис.63

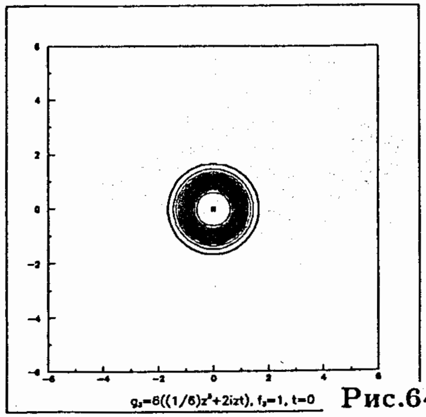


Рис.64

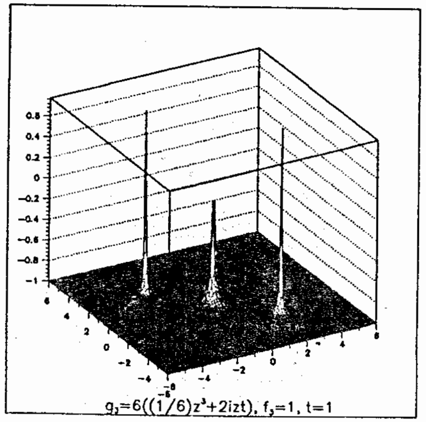


Рис.65

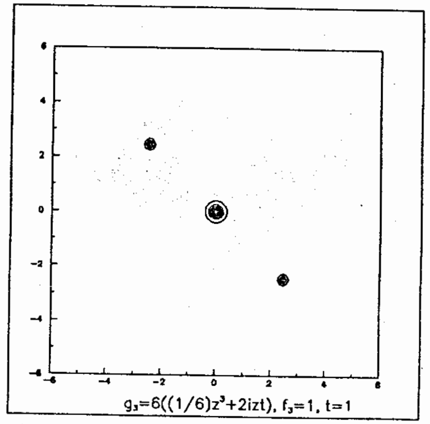


Рис.66

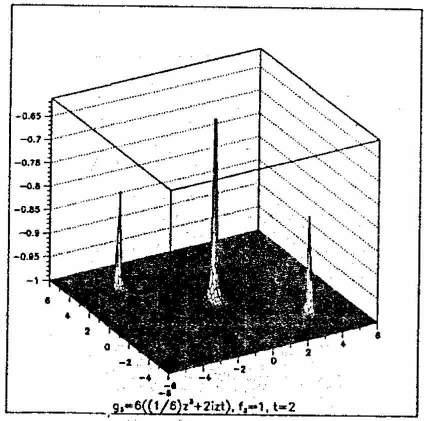


Рис.67

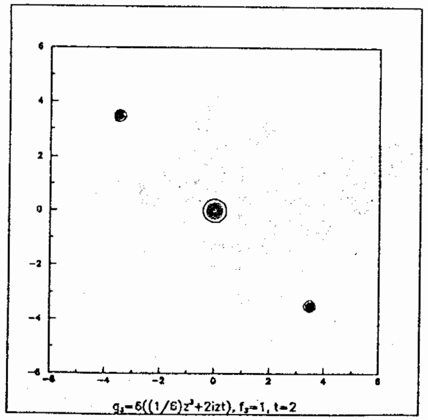


Рис.68

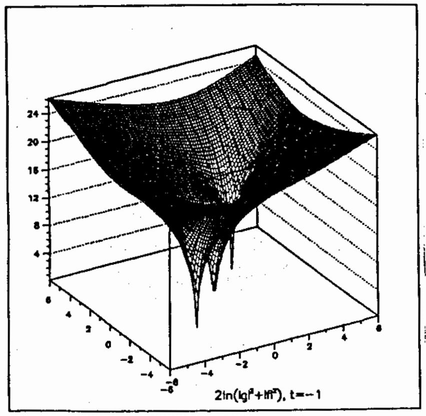


Рис.69

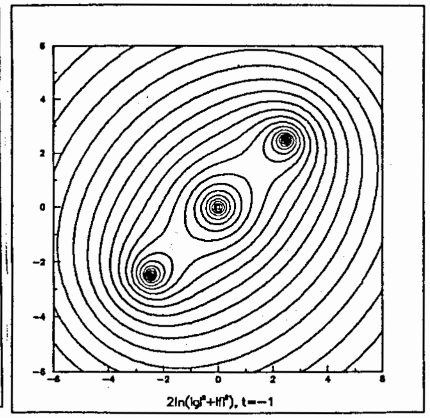


Рис.70

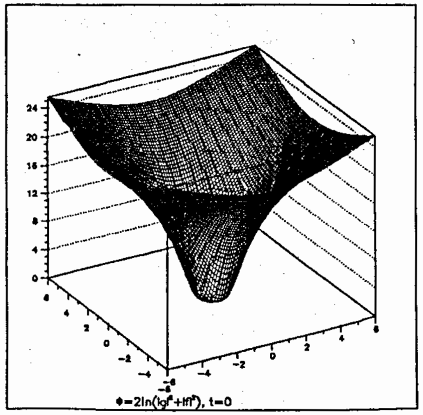


Рис.71

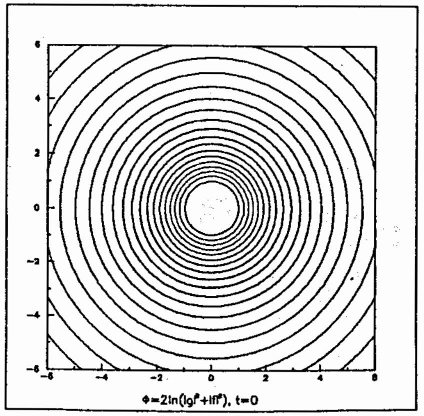


Рис.72

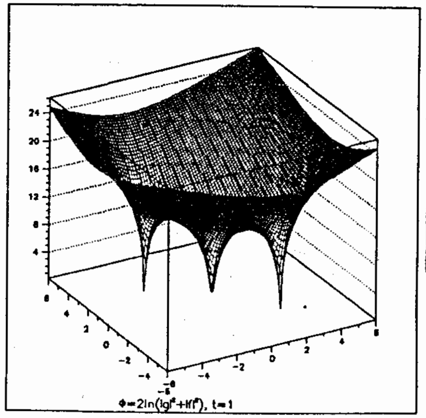


Рис.73

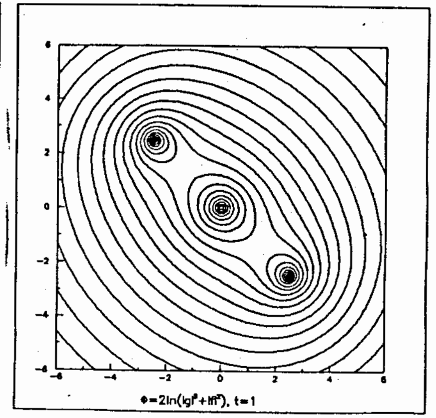


Рис.74

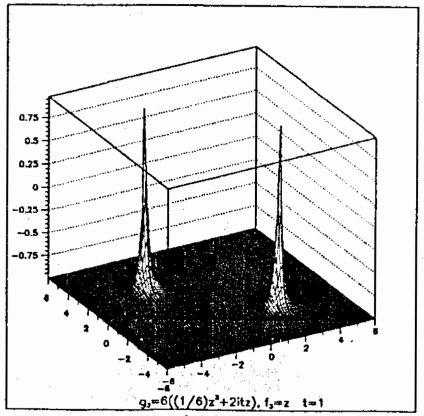


Рис.75

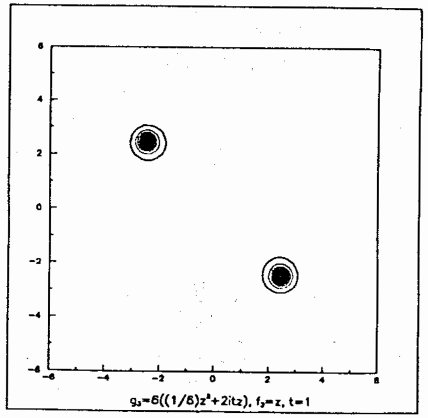


Рис.76

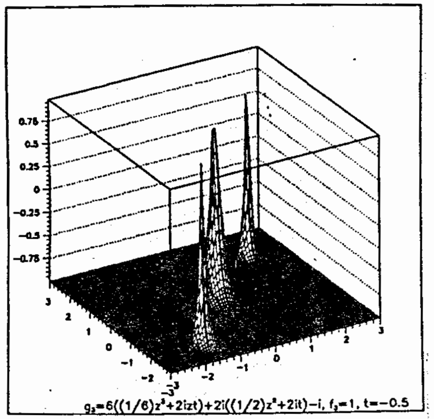


Рис.77

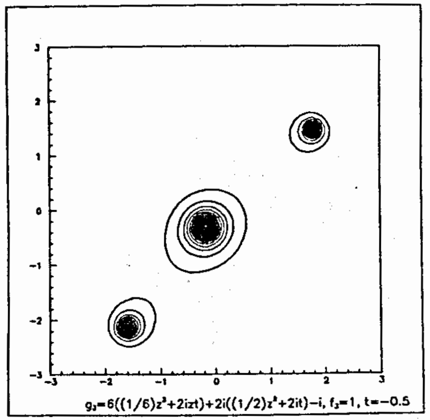


Рис.78

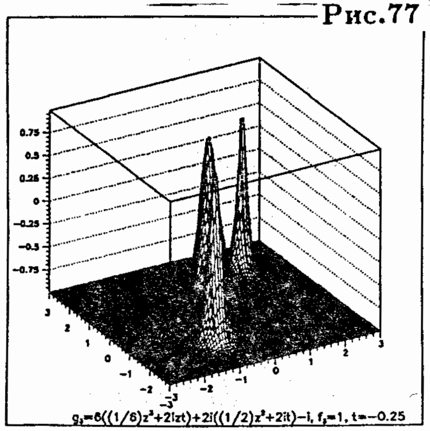


Рис.79

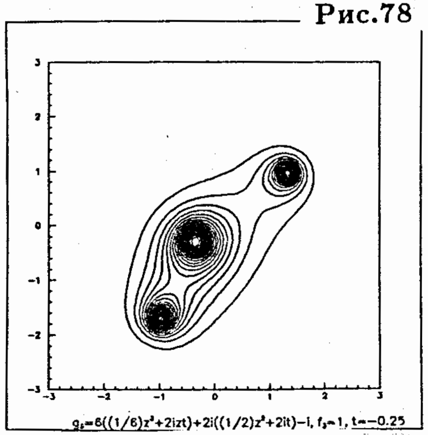


Рис.80

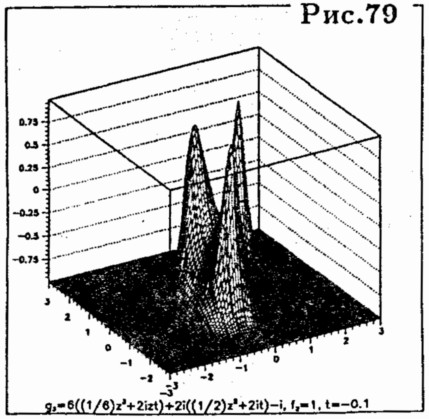


Рис.81

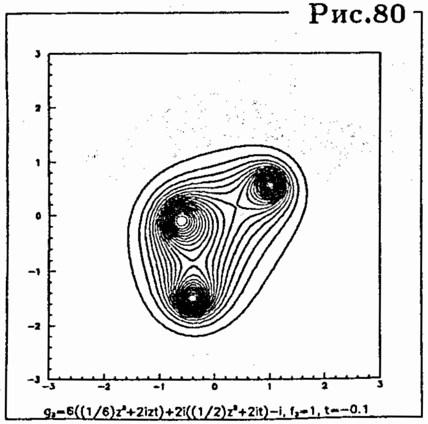


Рис.82

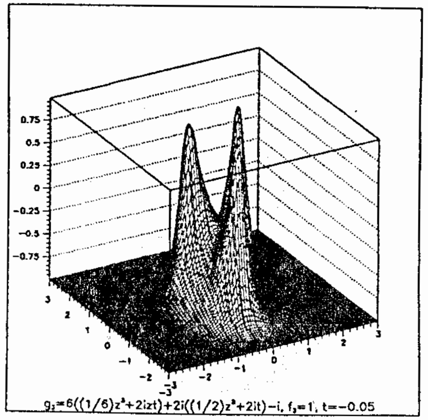


Рис.83

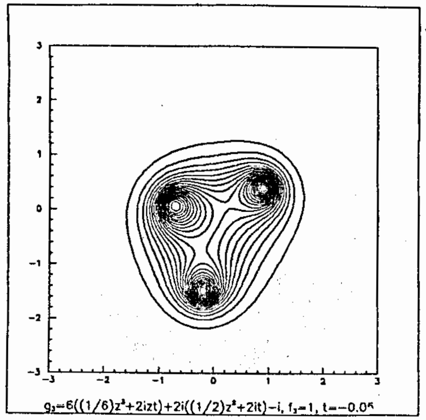


Рис.84

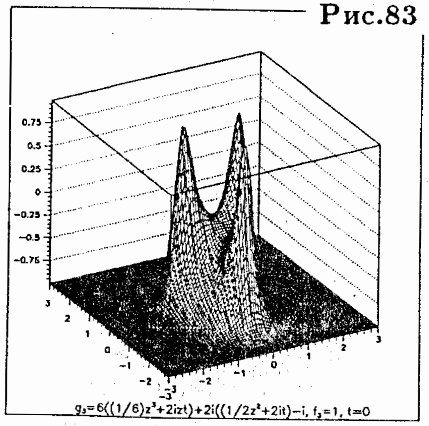


Рис.85

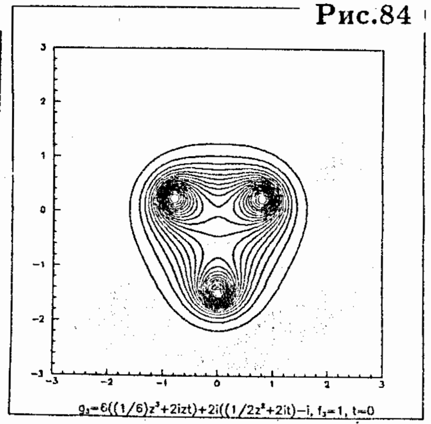


Рис.86

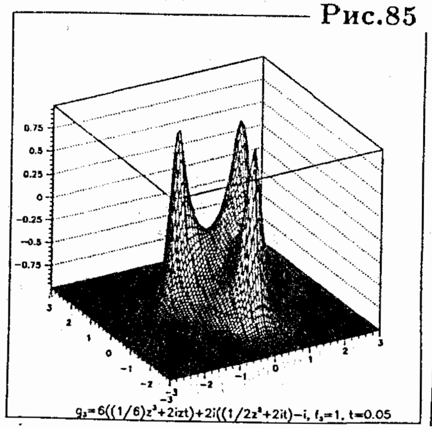


Рис.87

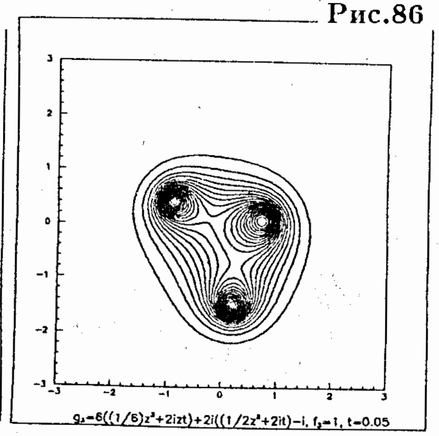


Рис.88

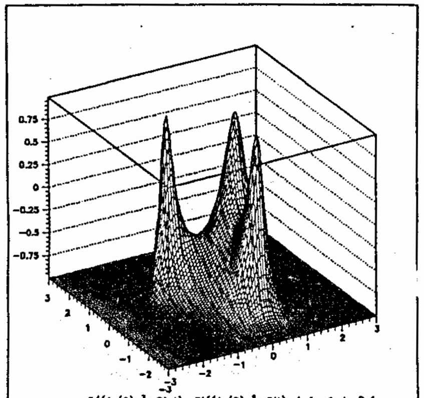


Рис.89

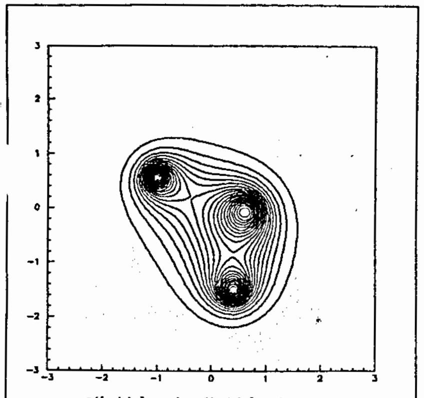


Рис.90

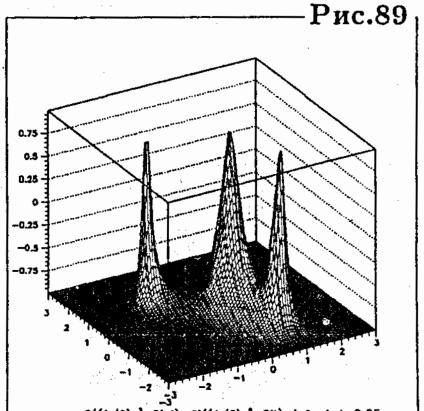


Рис. 91

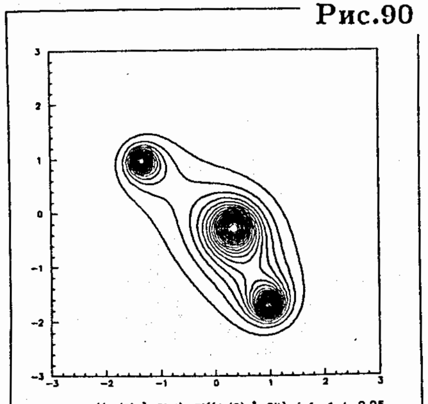


Рис.92

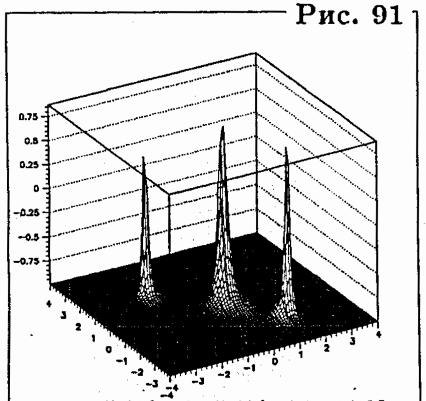


Рис.93

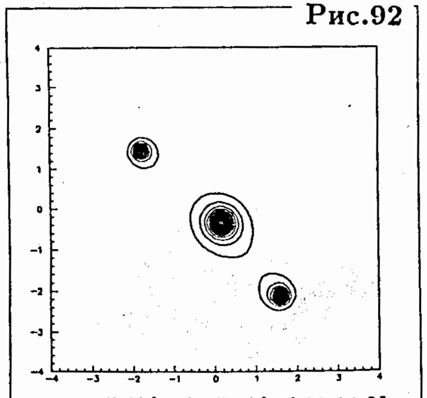


Рис.94

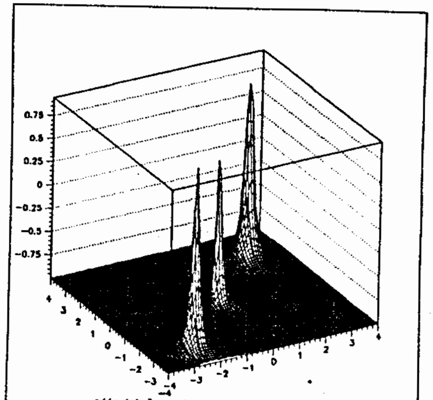


Рис.95

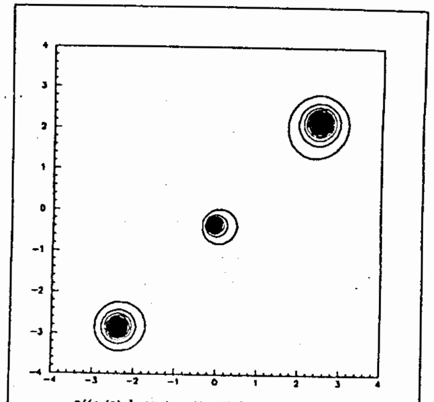


Рис.96

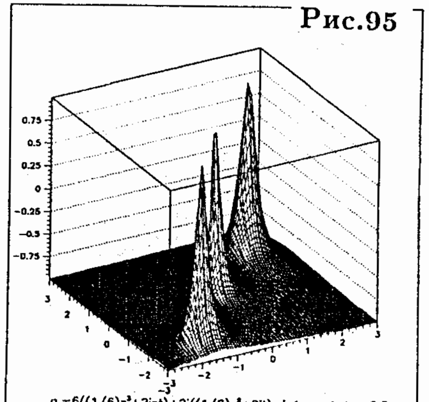


Рис.97

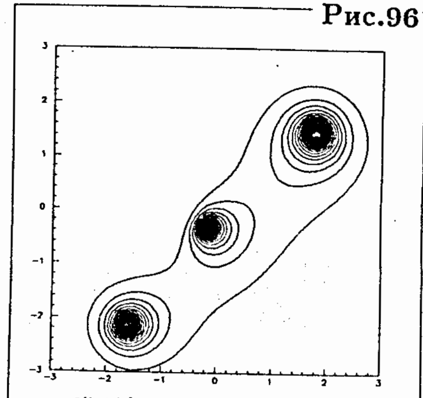


Рис.98

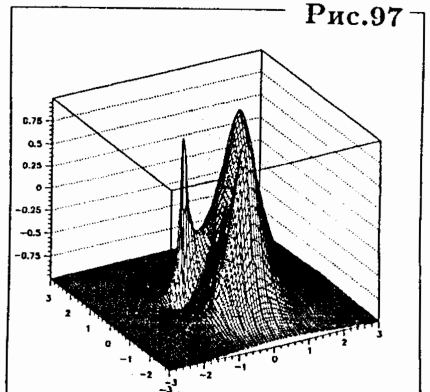


Рис.99

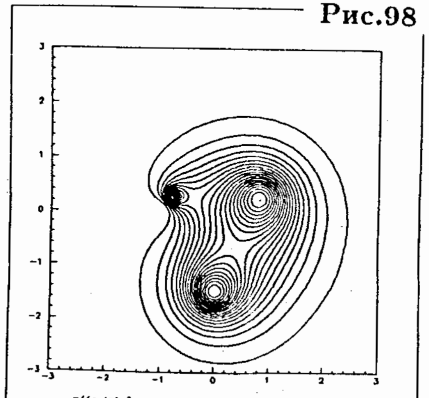


Рис.100

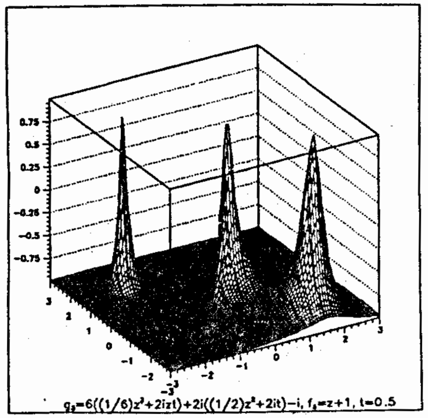


Рис.101

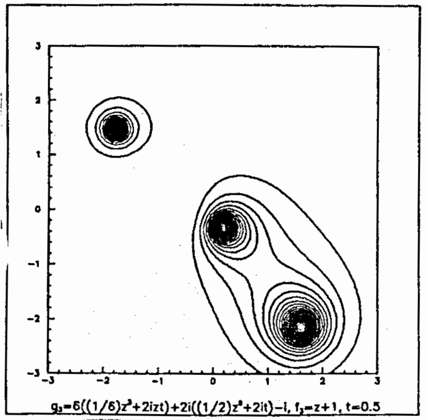


Рис.102

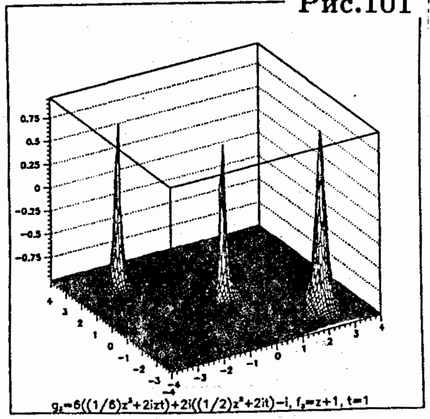


Рис.103

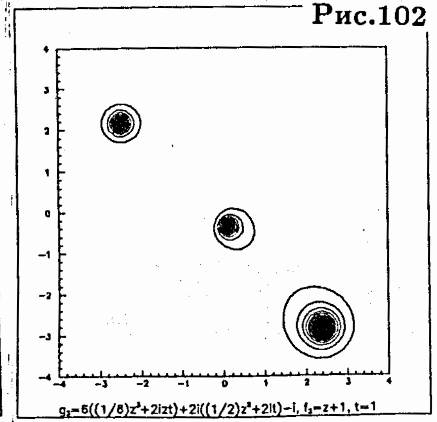


Рис.104

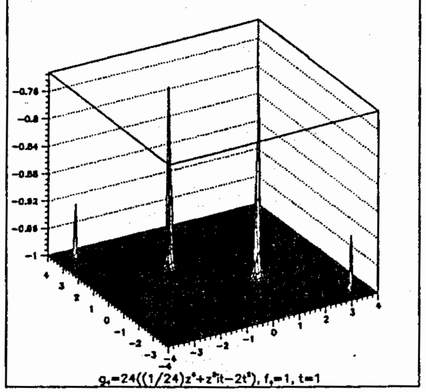


Рис.105

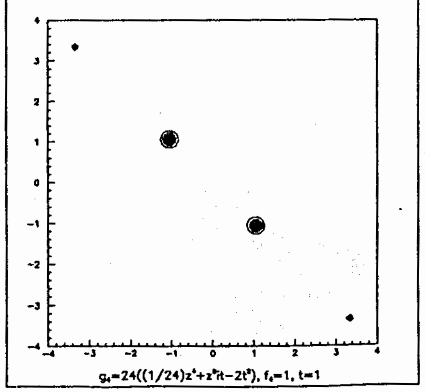


Рис.106

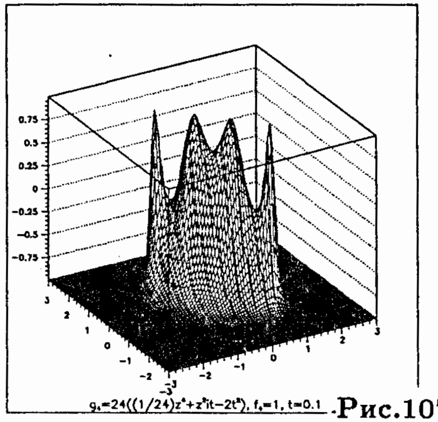


Рис.107

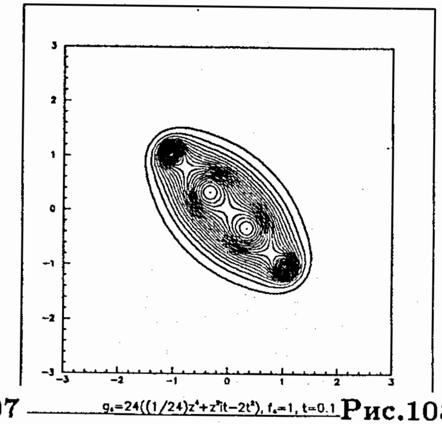


Рис.108

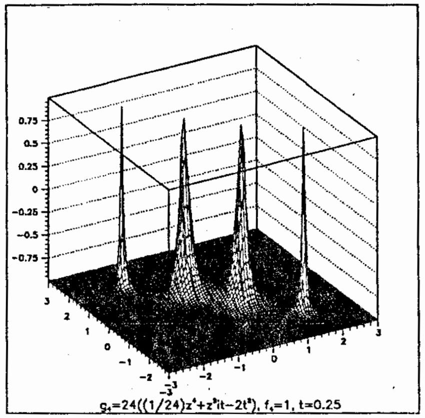


Рис.109

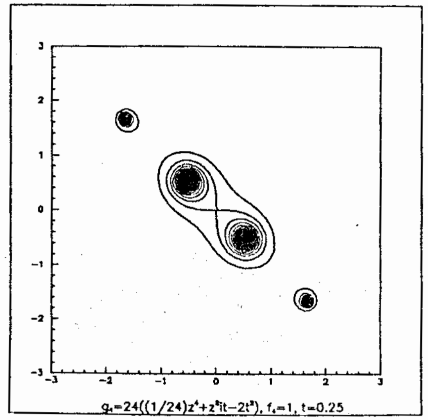


Рис.110

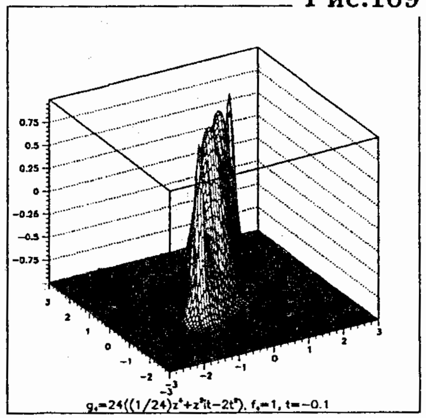


Рис.111

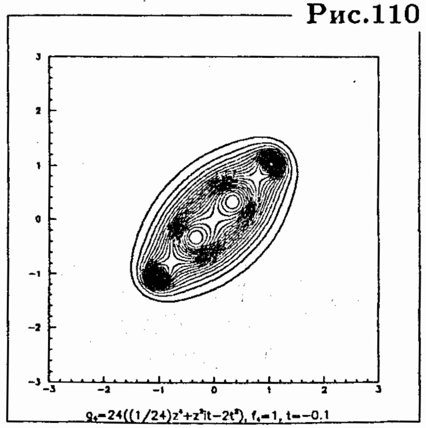


Рис.112

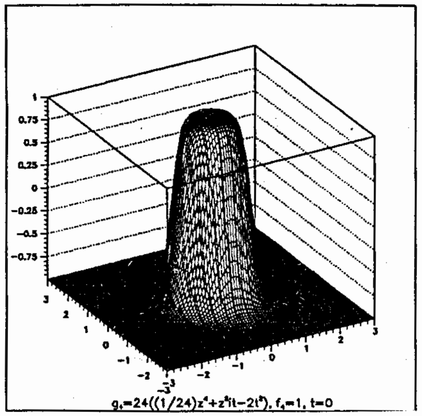


Рис.113

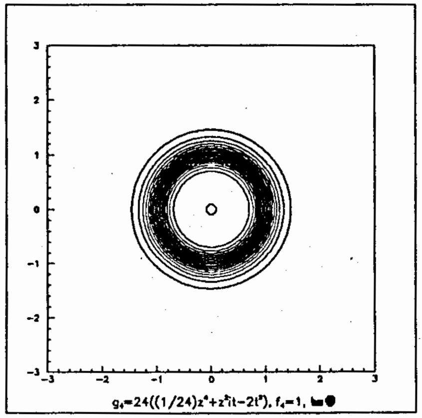


Рис.114

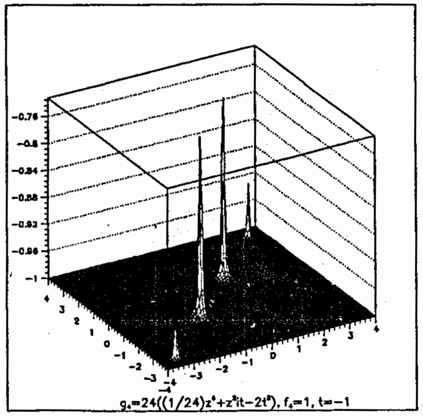


Рис.115

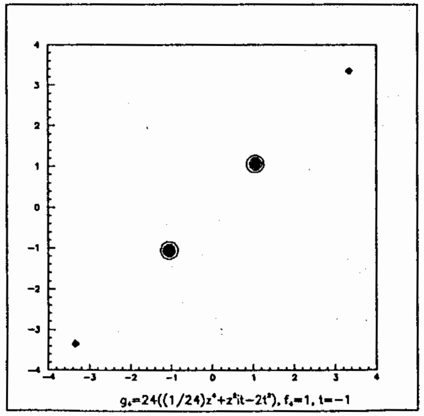


Рис.116

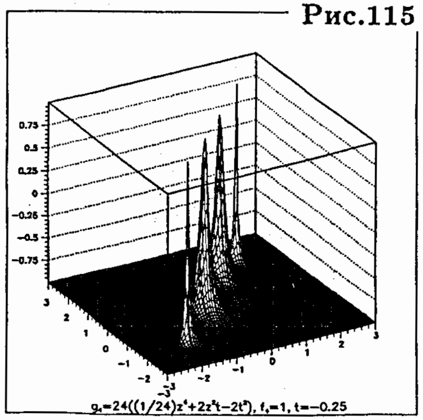


Рис.117

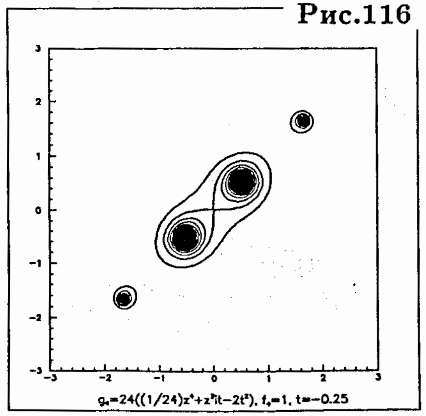


Рис.118

Замена $t \longrightarrow -t$ эквивалентна замене $x \longrightarrow -x$ или $y \longrightarrow -y$. Скорость движущихся вихрей

$$\dot{x} = \dot{y} = \sqrt{\frac{3}{2}}(t)^{-\frac{1}{2}} \tag{40}$$

не фиксирована и убывает со временем, в отличие от обычных солитонов, где она определяется спектральным параметром и строго фиксирована. Из графического анализа видно также , что вихри, не меняя амплитуду, изменяют свою форму в процессе ускорения. Кажущееся изменение амплитуды на рис. 59–68 связано с изменением их формы и точности вычислений. Используя более тонкую сетку в областях локализации вихрей, мы убедились в сохранении их амплитуды. На рис. 69–74 показаны функции тока Φ.

Вырожденный случай 3х-вихревой конфигурации

$$g_3 = 6(\frac{1}{6}z^3 + 2itz), \quad f_3 = z, \tag{41}$$

описывает два локализованных вихря (рис.75–76)

На рис. 77–94 показана динамика 3х-вихрей при

$$g_3 = 6(\frac{1}{6}z^3 + 2izt) + 2i(\frac{1}{2}z^2 + 2it) - i \quad f_3 = 1. \tag{42}$$

На рис. 95–104 при

$$g_3 = 6(\frac{1}{6}z^3 + 2izt) + 2i(\frac{1}{2}z^2 + 2it) - i \quad f_3 = z + 1. \tag{43}$$

Наконец, при N=4 мы имеем систему из четырех вихрей

$$g_4 = 24(\frac{1}{24}z^4 + z^3 it - 2t^2) \quad f_4 = 1, \tag{44}$$

представленную на рис. 105–118.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ динамики вихрей модели Ишимори показывает, что в отличие от обычных солитонов:

1. Хотя амплитуды вихрей в процессе взаимодействия не меняются, их форма претерпевает изменения, связанные с несохранением намагниченности системы,

2. Скорость вихрей меняется со временем.

При этом ассоциированное с функцией тока поле скоростей носит типичный характер гидродинамических вихрей, сопровождающих магнитные вихри.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. W. Anderson, *Science* **235** (1987)1196.

2. Y. H. Chen, F. Wilczek, E. Witten and B. I. Halperin, *Inst.J.Mod. Phys.* **B3(1989) 1001**; а также литература в обзоре S.Forte, *Rev. Mod. Phys.* **64** (1992)193.

3. M. Boiti, J. Leon, L. Martina and F. Pempinelli, *Phys. Lett.* **A132(1988)432**; M. Boiti, J. Leon and F. Pempinelli, *J. Math. Phys.* **31** (1990)2612.

4. J. Hietarinta, R. Hirota, *Phys. Lett.* **A145** (1990)237; R. Hernandes Heredero, L. Martinez Alonso and E. Medina. *Reus, Phys. Lett.* **A152(1991)37**; A. S. Fokas, P. M. Santini, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989)1329; *Physica* **D44** (1990)99.

5. M. Boiti, L. Martina, O. K. Pashaev and F. Pempinelli, *Phys. Lett.* **A160(1991)51**; P. M. Santini, *Physica* **D41** (1990)26.

6. L. Martina, O. K. Pashaev and G. Soliani, Bilinearization of multidimensional topological magnetics, *Preprint Univ. Lecce, May, 1992 and talk on NEEDS'92 (Dubna, 6-17 july 1992) (to be published).*

7. Y. Ishimori, *Progr. Theor. Phys.* **72** (1984)33.

8. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат "Проблемы гидродинамики и их математические модели", *"Наука"*, М. 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 октября 1992 года.

Лима Монтенегро С., Пашаев О.К. P4-92-418
Динамика вихрей модели магнетика Ишимори

Методом компьютерной графики исследуется интегрируемая динамика многовихревых конфигураций (2 + 1)-мерной модели Ишимори.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод автора

Lima Montenegro S., Pashaev O.K. P4-92-418
Dynamics of Multi-Vortex for the Magnetics in Ishimori Models

The integrable dynamics of multi-vortex solutions of a two-dimensional nonlinear wave equations of Ishimori Models are showed by using methoding computer graphics.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automatic, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992