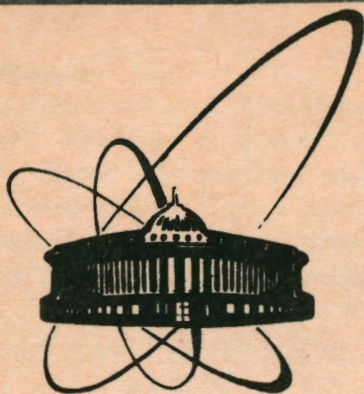


92-404



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P4-92-404

В.М.Виноградов

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ
РЕЛЯТИВИСТСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-
РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ
В ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ.
АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ
ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ РЕДЖЕ

Направлено в журнал "International Journal
of Modern Physics A"

1992

I. Введение

Релятивистские уравнения активно изучались аналитическими и численными методами еще в период становления физики субчастиц. Сегодня потенциальные модели, учитывающие идеи квантовой хромодинамики, вновь актуальны в связи с открытием новых семейств частиц.

Формулировка релятивистской задачи двух тел на основе нового класса дифференциально-разностных уравнений [1]

$$(H^0 - 2E)\Psi(x) = V(x, E)\Psi(x) \quad (1)$$

$$\frac{H^0}{2} (H^0 - 2E)\Psi(x) = V(x, E)\Psi(x) \quad H^0 = 2 \mathcal{K}(z) + \frac{\mathcal{V}(z+1)}{\mathcal{K}(z+1)} \exp(i z) \quad (2)$$

$$i z = i \frac{h}{m c} \frac{d}{dx} \quad h = m = c = 1 \quad i = \sqrt{-1}$$

представляется наиболее последовательной: в основе (1,2) трехмерная формулировка теории поля [4]; конфигурационное представление введено с помощью релятивистского преобразования Фурье [3]; уравнения локальны и допускают применение методов нерелятивистской теории [2, 5]; точные решения дают нестандартные следствия в феноменологии [6, 7, 8, 9].

В работе найдено аналитическое приближение для траекторий Радже, показывающее явно природу релятивистских эффектов, обусловленных дифференциально-разностным характером волнового оператора и учетом запаздывания в релятивистской версии потенциала Кюавы

$$V(x) = Z x^{-1} \mathcal{V}(x) \quad \text{a) } \mathcal{V}(x) = \frac{\mathcal{K}(z)}{\mathcal{K}(x)} \begin{cases} \mu^2 \leq 4m^2 \\ \sigma = \beta \mu \cos \frac{\mu^2 - 2m^2}{2m^2} \end{cases} \quad \text{b) } \mathcal{V}(x) = \frac{\cos(zx)}{\mathcal{K}(zx)} \begin{cases} \mu^2 > 4m^2 \\ \sigma = \beta \mu \sin \frac{\mu^2 - 2m^2}{2m^2} \end{cases} \quad (3)$$

Потенциал (3) отличается от истинного, определенного как Фурье-образ Фейнмановской амплитуды [1], множителем $\mathcal{K}(zx)$, являющимся константой разностного дифференцирования. В основе такой модификации i -перидический произвол решений (1,2).

2. Асимптотическое разложение $\mathcal{V}(x)$

Следуя [10], рассмотрим процесс аппроксимации волновой функции

$$\Psi(x) = e^{-x\mathcal{L}} (-x)^{(\sigma-1)} \varphi(x)$$

дискретного спектра $2E = 2 \cos z$; $2\kappa = 2 \sin z$; $\alpha = i 2 \sin z e^{i z}$; $0 < z \leq \frac{\pi}{2}$ с помощью известных решений кулоновской звезды $\Phi(x) = F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$

$$D_x \Phi(x+1) = \exp(i z) \mathcal{L} \Phi(x+1)$$

$$D_x = x^{-1} D \quad D = [j - ix] V^2 + i [j + \alpha x + \alpha x] V - \alpha \beta \quad V = -i (e^{i z} - 1), \quad (4)$$

где $\kappa_r x + i \ell$; $(-x) \rightarrow x(x-i) \dots (x-i)^n$, в соответствии с условием квантования

$$\alpha = \ell + 1 + \sigma = -n \quad \beta = ix + \ell + 1 = ix - n - \sigma \quad \gamma = 2\ell + 2 = -2n - 2\sigma \quad \sigma = \Delta(\omega) / 2\kappa \quad n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

В области больших $|x|$ первое приближение $\varphi_1(x) = \Phi(x)$ дает остаток R_1 порядка $o(x^{-1})$

$$D_x \varphi_1(x) = e^{i z} \left\{ \frac{1}{2\kappa} (Z - \Delta(\omega)) + \frac{1}{2\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} m_n x^{2n} \right\} \Phi(x) + R_1 \quad (4')$$

Физический институт
высших исследований
Библиотека

С помощью рекуррентных соотношений для гипергеометрической функции

$$x \Phi(x) = (x, x+2) \Phi(x+2) + (x, x) \Phi(x) + (x, x-2) \Phi(x-2) \quad (6)$$

$$x^m \Phi(x) = \sum_{j=0}^m s_m(x, j) \Phi(x+j) \quad s_m(x, i) = \sum_{j=0}^m s_{m-1}(x, i+j) (x+i+j, i+j)$$

остаток можно преобразовать: $[x, x]_{2i+1} = M_0 - \Delta(x)$; $[x, x+j]_{2i+1} = M_{2i} s_m(x, j)$; $M_{2i} = x m_{2i}$

$$R_1 = \frac{1}{2x} \left\{ [x, x]_{2i} + \sum_{j=1}^{2i} \sum_{k=1}^{2i-j} [x, x+j]_{2i+1} \Phi(x+j) \right\}$$

и сократить, выбрав второе приближение

$$\Phi_2(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2l} [x, x+j]_{2i+1} \Phi(x+j) / j$$

при условии

$$0 = \sum_{i=0}^{\infty} [x, x]_{2i+1} \quad (7)$$

Порядок $\Phi_2(x)$ определим из явного выражения коэффициентов (6):

$$\varepsilon = \kappa^{-1} \quad (x, x+1) = -n \varepsilon e^{\varepsilon} \quad \omega_0 = (x, x) = -2 \varepsilon e^{\varepsilon} \quad (x, x-1) = (n+2 \varepsilon) \varepsilon e^{\varepsilon}$$

$$A_1 = (x, x+1)(x+1, x) = -2 \varepsilon^2 a_{x+1} \quad A_2 = \omega_0 (1 \pm l \varepsilon) \quad A(x) = (x, x-1)(x-1, x) = -2 \varepsilon^2 a_{x-1} \quad (8)$$

$A_2 = A(x+l) \quad a_{x+l} = (x+l, x+l) = n_l \nu_l (2 \varepsilon)^l \quad A_2 = A(x-l+1) \quad n_l = n \quad n_l = n+l \quad l=1, 2, \dots$
т.е. $\Phi_2 \sim o(\kappa^4)$; $R_2 \sim o(\kappa^3)$. Повторение процедуры дает $\Phi_3 \sim o(\kappa^3)$; $R \sim o(\kappa^3)$
дополнительные слагаемые в (7)

$$0 = \sum_{i=0}^{\infty} [x, x]_{2i+1} + \left\{ [x, x+1]_{2i+1} [x+1, x]_{2i+1} + [x, x+2]_{2i+1} [x+2, x]_{2i+1} / 2 + [x \rightarrow x] \right\} + \dots \quad (7')$$

Таким способом находится решение с любой точностью по степеням κ^{-1} .

Собственные значения нумеруются радиальным квантовым числом n и определяются уравнением типа (7'). Альтернативное решение согласно (5) и (8) дает асимптотическое разложение

$$l(\kappa) = -1 - n - \frac{M_0}{2\kappa} + \frac{2M_2}{(2\kappa)^3} n(n+1) + \frac{2M_4 M_2}{(2\kappa)^5} (2n+1) - \frac{\pi}{(2\kappa)^6} [6n(n-1)(n+2)M_4 + 4M_0^2 M_2 \varepsilon^2] \quad (9)$$

$$- \frac{(2n+1)}{(2\kappa)^6} [12(n^2+n-1)M_0 M_4 + n(n+1)M_2^2] + o(\kappa^{-7}).$$

Положив $z = 4\varepsilon^2 = 4$, получим нерелятивистское разложение для потенциала с четной экспоненциальной функцией (3). Переход в область физических значений κ^2 осуществим с помощью новой переменной

$$R = \sqrt{4z\varepsilon_2 + 4\kappa^2} \quad \sqrt{\kappa^2} = -\kappa \quad \varepsilon_2^2 = -m_2 = \frac{\hbar^2 \varepsilon^2}{2} = \begin{cases} \varepsilon_+^2 & \mu \leq 2m \\ \varepsilon_-^2 & \mu > 2m \end{cases} \quad (10)$$

которая дает лучшую аппроксимацию двух старших слагаемых разложения и обеспечивает физическое требование $l(\kappa) = l(\kappa^2)$

$$l(\kappa) = -1 - n + \frac{M_0}{\hbar^2} + \frac{2M_2}{\hbar^4} [M_0 - n(n+1)] + \frac{2M_4 M_2}{\hbar^6} (2n+1) + \frac{6M_4}{\hbar^6} n(n-1)(n+2) - \frac{(2n+1)}{\hbar^6} [2(n^2+n-1)M_0 M_4 + n(n+1)M_2^2] + o(\hbar^7). \quad (9')$$

Релятивистский вариант (9') возможен в двух взаимно связанных случаях. Для потенциалов теории поля (22), которые обычно сингулярны при $z=0$

$$\bar{z} = 2 z^{1/2} \bar{z}$$

достаточно в (10) произвести замену $z \rightarrow \bar{z}$. Природе сингулярности уравнения (2) при $z=0$ та же; задача сводится к предыдущей.

Разложение (9') пригодно для приближенных расчетов (точность 10-20%) и для оценки релятивистских эффектов. Качественная сторона,

однако, скрыта: формулы (8), (9) и (9') с членами более высокого порядка $o(\hbar^2)$ указывают на возможность линейного приближения функции $\ell(z)$.

3. Метод суммирования.

В основе метода свойства симметрии \mathcal{S} -матрицы (6). Справедливы правило деления порядка

$$\mathcal{S}_{2m+j}^{\mathcal{S}}(x, 0) = \sum_{i=0}^{2m} \mathcal{S}_{m+j}^{\mathcal{S}}(x, i) \mathcal{S}_m^{\mathcal{S}}(x+i, -i) \quad m=1, 2, \dots; j=0, 1$$

и правило факторизуемости для множителей подобной структуры

$$1 \leq i_1 \leq m \quad \mathcal{S}_m^{\mathcal{S}}(x, i) = (x, x+1)(x+1, x+2) \dots (x+i-1, x+i) \mathcal{S}_m^{\mathcal{S}}(x, i) \quad \mathcal{S}_0^{\mathcal{S}}(x, 0) = \mathcal{S}_1^{\mathcal{S}}(x, 0) = 1$$

$$\mathcal{S}_m^{\mathcal{S}}(x+i, -i) = (x+i, x+i-1) \dots (x+2, x+1)(x+1, x) \mathcal{S}_m^{\mathcal{S}}(x+i, -i) \quad \mathcal{S}_0^{\mathcal{S}}(x, 0) = \mathcal{S}_1^{\mathcal{S}}(x, 0),$$

$$\mathcal{S}_i^{\mathcal{S}}(x, i) = \mathcal{S}_i^{\mathcal{S}}(x+i, -i).$$

причем

$$\text{Поэтому} \quad \mathcal{S}_{2m+j}^{\mathcal{S}}(x, 0) = \sum_{i_1 \leq m} \mathcal{A}_{i_1} \mathcal{A}_{i_2} \dots \mathcal{A}_{i_j} \mathcal{S}_{m+j}^{\mathcal{S}}(x, i) \mathcal{S}_m^{\mathcal{S}}(x, i) \quad (II)$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2^{\mathcal{S}}(x, 0) &= \mathcal{A}_{x+1} + \mathcal{A}_x + \mathcal{A}_{x-1} \\ \mathcal{S}_3^{\mathcal{S}}(x, 0) &= \mathcal{A}_{x+1} \mathcal{S}_2^{\mathcal{S}}(x, 1) + \omega_0 \mathcal{S}_2^{\mathcal{S}}(x, 0) + \mathcal{A}_{x-1} \mathcal{S}_2^{\mathcal{S}}(x, -1) \\ \mathcal{S}_4^{\mathcal{S}}(x, 0) &= \mathcal{A}_{x+1} \mathcal{A}_{x+2} + \mathcal{A}_x \mathcal{S}_3^{\mathcal{S}}(x, 1) + \mathcal{S}_3^{\mathcal{S}}(x, 0) + \mathcal{A}_{x-1} \mathcal{S}_3^{\mathcal{S}}(x, -1) + \mathcal{A}_{x-2} \mathcal{A}_{x-1} \end{aligned} \quad (II')$$

В соответствии с (II') изменим в (7) порядок суммирования:

$$\mathcal{S}^{\mathcal{S}} \Delta(x) = \sum_{i=0}^{\infty} m_{2i} \mathcal{S}_i^{\mathcal{S}}(x, 0) + \mathcal{A}_x \sum_{i=1}^{\infty} m_{2i} \mathcal{S}_i^{\mathcal{S}}(x, 1) + \mathcal{A}_{x-1} \mathcal{A}_{x-2} \sum_{i=2}^{\infty} m_{2i} \mathcal{S}_i^{\mathcal{S}}(x, 2) + \dots = \Sigma_0 + \Sigma_{21} + \dots \quad (7'')$$

где факторизованная \mathcal{S} -матрица удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\mathcal{S}_m^{\mathcal{S}}(x, i) = \mathcal{A}_x \mathcal{S}_{m-1}^{\mathcal{S}}(x, i+1) + \omega_0 \mathcal{S}_{m-1}^{\mathcal{S}}(x, i) + \mathcal{S}_{m-1}^{\mathcal{S}}(x, i-1). \quad (6')$$

Разложение по степеням $\mathcal{A}_i \sim o(\kappa^4)$, соответствующее структуре (7'), получим, объединив с помощью (6') слагаемые (суммы) $\Sigma_e \in \Sigma_e$ одного порядка малости $o(\mathcal{A}^n)$; $e, n = 0, 1, 2, \dots$. Коэффициентные функции, степенные ряды $\omega_0, \omega_{21}, \omega_{22}, \dots$, в результате суммирования можно выразить через функцию взаимодействия $\mathcal{V}(\kappa)$ (3) (см. Приложение).

Вклады порядка $o(\mathcal{A}^1)$, двукратные суммы вычисляются точно (III,

$$II2) \quad \Sigma_0 = \sum_{i=0}^{\infty} m_{2i} \omega_{2i} = \mathcal{V}(\kappa) \\ \Sigma_0^{\mathcal{A}_x} = 2 \mathcal{A}_x \sum_{i=1}^{\infty} m_{2i} \omega_{2i} \mathcal{P}_{i-2}^{\mathcal{S}}(x, x) \quad \Sigma_{21}^{\mathcal{A}_x} = \mathcal{A}_x \sum_{i=1}^{\infty} m_{2i} \mathcal{P}_i^{\mathcal{S}}(x, x)$$

$$\mathcal{P}_n^{\mathcal{S}}(x, x) = \sum_{i=0}^n (i+1) \omega_{n-i} \omega_i \quad \mathcal{P}_n^{\mathcal{S}}(x, x) = \sum_{i=0}^n \omega_{n-i} \omega_i$$

Аналитическое приближение $l(\kappa)$ посредством экспоненциальной

функции потенциала - результат суммирования слагаемых порядка $o(\mathcal{A}^1)$ в (7)

$$l(\kappa) = -1 - n - \mathcal{S}^{\mathcal{S}} \mathcal{V}(\kappa) - \mathcal{S} \mathcal{A}_x \mathcal{A}_x^2 (1 - \frac{\mathcal{A}_x}{\hbar^2})^2 [\mathcal{V}(\kappa) - \mathcal{V}'(\kappa) + 2(1 - \frac{\mathcal{A}_x}{\hbar^2}) \omega_0^2 \mathcal{V}'(\kappa)] + [x \rightarrow x] + o(\mathcal{A}^2) \quad (12)$$

где

$$\omega_0^2 \frac{d}{d\mathcal{A}_x} \mathcal{V}(\kappa) \approx -\omega_0^2 \mathcal{A}_x^2 \mathcal{V}(\kappa) + o(\mathcal{A}_x^4)$$

является более полной и точной реализацией исходной идеи. Пригодность (12) и форму остаточного члена определит анализ вкладов порядка $o(\mathcal{A}^2)$.

Метод и результат суммирования такого вклада, принадлежащего Σ_2 ,

$$\Sigma_2^{\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_{x+2}} = \mathcal{A}_x \mathcal{A}_{x+2} \sum_{i=2}^{\infty} m_{2i} \left(\sum_{k=2}^{i-1} \omega_{i-k} \mathcal{P}_{k-2}^{\mathcal{S}}(x, x) \right)^2 \quad (13)$$

является существенно усложненным вариантом процедуры для (I2)

$$-\sum_2^{A_2} = -A_1 A_2 \bar{s}^2 (1 - \frac{A_2}{2\bar{s}})^2 \left\{ \mathcal{V}(\frac{A_2}{2\bar{s}}) + \mathcal{V}(\frac{A_2}{4\bar{s}}) - \mathcal{V}(A_2) - \frac{1}{2} \mathcal{V}(\frac{A_2}{\bar{s}}) - \frac{1}{4} [\mathcal{V}(A_2) + \mathcal{V}(\frac{A_2}{\bar{s}})] \right\} \quad (I3)$$

и указывает на асимптотический характер разложения (I2): переменной разложения будет величина $2\bar{s}^2 \bar{s}^2 (1 - \frac{A_2}{2\bar{s}})^2 = 2\bar{s}^4$, коэффициенты разложения - раздельная разность, шаг которой и значения малы.

Вклады $o(A^2) \in \sum_2$ можно опустить как разности порядка более высокого, чем (I3) (см. (I6'')); относительная оценка $\sum_2^{A^2}$ такая же; поэтому остаточный член (I2) равен $\Delta_2 = -\bar{s} \sum_2^{A^2}$.

4. Экспоненциальная аппроксимация $\ell(s)$.

Приближение $\ell(\kappa)$ в области физических значений κ^2 найдем с помощью аналитического продолжения (I2), $n=0$

$$\ell(\kappa) = -1 - \bar{s} \mathcal{V}(A_2) \left[1 + \frac{4\bar{s}^2}{2\kappa^2} \right] + \bar{s}(2\bar{s}\bar{s}) [\mathcal{V}(A_2) - \mathcal{V}(A_2)] + \bar{s}(2\bar{s}\bar{s})^2 [\mathcal{V}(\frac{A_2}{2\bar{s}}) + \dots] \quad (I2')$$

которое приобретает свойства универсального преобразования: сохраняется форма исходного разложения; снимаются ограничения на \bar{s} ; \bar{z} ; вспомогательная функция становится средним геометрическим сопряженных аналогов (I0)

$$\bar{\kappa} = \sqrt{\bar{\kappa}_+ \bar{\kappa}_-} = \sqrt{16\bar{z}^2 \bar{s}^2 - (2\kappa)^2} \quad \sqrt{-\kappa^2} = -\kappa \quad (I0')$$

Экспоненциальная аппроксимация $\ell(s)$ с аргументами, продолженными по правилу

$$\bar{s} \rightarrow \frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \quad \bar{s}_+ \rightarrow i \frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}} \quad \bar{s}_- \rightarrow i \frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} (1 \mp \frac{\bar{z}}{\bar{\nu}}) \sqrt{\bar{s}} \quad (I4)$$

принимает форму разложения по степеням $2\bar{z}\bar{\kappa}'\bar{s}'$ (см. (I4') и (I5))

$$\ell(s) = -1 - n + \frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \mathcal{V}(\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}}) + \frac{\bar{z}^2}{\bar{\nu}^2} \left\{ a_1 [\mathcal{V}(\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}}) - \mathcal{V}(\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}})] + a_2 [\mathcal{V}(\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}}) - \mathcal{V}(\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}})] \right\} + \Delta_2 \quad (I5)$$

Коэффициенты разложения - раздельная разность гладкой функции, убывающей экспоненциально при $\bar{s} < 0$. Следовательно, в этой области приближение $o(A^2)$ является асимптотическим разложением; точность приближения дает оценка остаточного члена (I6'')

$$\Delta_2 = -a_1 a_2 \left(\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}}\right)^2 \left\{ \mathcal{V}(\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}}) + \mathcal{V}(\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}}) - \mathcal{V}(\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}}) - \frac{1}{2} \mathcal{V}(\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}}) - \frac{1}{4} [\mathcal{V}(\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}}) + \mathcal{V}(\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}})] \right\} \quad (I6)$$

В области $\bar{s} > 0$ пороговые особенности $\ell(s)$ в приближенной формуле (I5) проявляются как сингулярности полюсного типа. Альтернативой (I5) при $0 \leq \bar{s} \leq 4m^2$ будет разложение

$$\ell(s) = \ell_0 + \ell_1 \bar{s} + \ell_2 \bar{s}^2 + \dots o(\bar{s}^n) \quad (I7)$$

Условия пригодности (I7) просты при $2\kappa^2 < \bar{z}^2$, что предполагается в дальнейшем. Тогда зависимость от энергии факторизуется $\bar{s}_\pm = i \frac{\bar{z}}{2} \frac{\bar{s}}{\bar{z}}$;

коэффициенты разложения

$$\begin{aligned} \ell_0 &= \bar{s} + \ell_+ + \ell_- & \ell_+ &= (\bar{s} + \ell_+^2 + \ell_-^2) / 16 & \ell_- &= (\bar{s} + \ell_+^2 + \ell_-^2) / 256 \\ \ell_+ &= a_+ (0.5 + \bar{s}) / 4 & \ell_+^2 &= \ell_+ (1 + \bar{s}^2) \beta & \ell_-^2 &= \ell_- (1 + \bar{s}^2 + \bar{s}^4) \beta' \end{aligned} \quad (I7')$$

постоянные величины, можно выразить через параметры потенциала

$$\bar{s} = (\frac{\bar{z}}{2\nu})^2 \quad \bar{s}_\pm = 1 \mp \frac{\bar{z}}{2\nu} \bar{s} \quad \beta = (1 + 2\bar{s}^2) / 6 \quad \beta' = 2\beta \bar{s}^2 / 5 \quad \bar{\kappa}_+ = \bar{s} / \bar{\nu} \quad \bar{\kappa}_- = \bar{s} / \bar{\nu} (I4')$$

С помощью такого приближения для остаточного члена

$$\Delta_2 \approx -a_1 a_2 \bar{s}^2 \left[\beta + 9\beta' \bar{s}^2 \frac{\bar{s}}{16} + o(\bar{s}^3) \right] / 64 \quad (I6')$$

в стандартной задаче $\bar{s} = 0$; $n = 0$; $\bar{z} = 0$; $\bar{z} = 1$ ($\bar{s} = 0.7$; 1.6) с набором потенциалов $\mu = \{1; 5.4; 10\}$; $\bar{b} = \{2.1; 3.3; 4.6\}$; $\beta = \{1.4; 0.5; 0.4\}$ $\beta' = \{2; 0.2; 0.1\}$ можно проверить критерий асимптотического разложения (I5) $o(A^2) / o(A^4) < 1$ и определить его ошибку

$$o(A^2)_{\bar{z}=0} = \{0.10; 0.04; 0.03\} \quad o(A^2)_{\bar{z}=1} = \{0.036; 0.013; 0.010\} \quad (I6'')$$

5. Свойства релятивистских траекторий Редже.

Аналитическое приближение $\ell(s)$ решает вопросы, поставленные в предисловии: зависимость от энергии $\sqrt{\bar{s}}$ в явном, факторизованном виде (I4)-производное соотношений для кулоновской функции, т.е. одно из проявлений релятивистской сути H^0 . Свойства траектории определяются формой зависимости, в данном случае функцией взаимодействия (3); $\bar{z} < 0$: скорость приближения к пределу $\ell(-\infty) = -1 - n$, соответственно, рост $\ell(s \rightarrow 0)$ определяется степенью убывания потенциала

$$\ell(s) \approx -1 - n + \frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \mathcal{V}(\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}}) + o(A^2); \quad (I8)$$

$\bar{z} \approx 0$ т.о. скорость роста - характеристика траектории, наиболее интересная для физики частиц; а) увеличивается с ростом обменного кванта; б) режим роста изменяется качественно при $\mu > 2m$.

$$\mathcal{V}(\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}}) \Big|_{\bar{s} < 0} = \frac{\bar{z} \bar{s} (\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}})}{\bar{\nu} (\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}})} \Big|_{\mu = m} \approx \frac{1}{\bar{\nu} (\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}})} \Big|_{\mu = 2m} \approx \frac{\cos(\frac{\sqrt{181}}{4})}{\bar{\nu} (\frac{\bar{z}}{\bar{\nu}} \sqrt{\bar{s}})} \Big|_{\mu = 5.4m}; \quad (I9)$$

$\bar{z} = 4m^2$ в области порога аппроксимация сингулярная, в данном случае это означает выход траектории в комплексную область значений; в силу приближенности (I5) область порога размыта;

$|\bar{z}| \leq 4m^2$ масштабом, определяющим область линейного приближения, является масса обменного кванта

$$\ell(s) = \ell_0 + \ell_1 \bar{s} \quad (I7')$$

критерий применимости такого приближения выполняется для потенциала (22)

$$s \ell_1' / \ell_0' \approx s(1 + \bar{s}^2) \beta' / 16\beta < 1$$

и оказывается предельным для потенциала с $\mu = m$ при $|\bar{z}| \leq 2m^2$.

6. Примеры реальных расчетов.

а. Уравнение Бете-Солпитера. Приближение $o(A^2)$ с точностью 3-10% воспроизводит результаты численного решения уравнения Бете-Солпитера с потенциалом Юквы $\mu = m$ в широком интервале значений константы связи $g^2 = \bar{\alpha} \bar{z} = \{4.7; 11; 30; 51.5; 80.7; 250\}$ [12]

$$\begin{aligned} \ell(\omega) &= -0.28; & 0.03; & 0.63; & 1.09; & 1.73; & 3.46; \\ \ell(\omega)^{5c} &= -0.30; & 0.00; & 0.60; & 1.00; & 1.60; & 3.50; \end{aligned} \quad (20)$$

$\bar{\alpha}, \bar{\alpha}'$ - система. Феноменологический потенциал, соответствующий фейнмановской диаграмме ρ -мезонного обмена и учитывающий квантовые представления о резонансах

$$V(x, E) = \Gamma_{in} 24 \beta_{cl} \bar{s}^{1/2} (s + 4q_A^2) V_s(x) \quad \Gamma_{in} = \frac{\Gamma}{2} \frac{m_0^2}{2q_A^2} \quad q_A^2 = (m_0^2 - 4m_2^2)/4 \quad (2I)$$

в рамках формально релятивизированного уравнения Шредингера дает самосогласованное описание при утроенном значении приведенной ширины $\Gamma_{in} = 3 \Gamma_{in} \text{эксп} [I3, I0]$. Расчет по трем точкам $s = \{4m^2; 3m^2; 2m^2\}$ согласно (17'), (17'') (и (16')) при вычислении производной) для $Z = Z(s)$, определяемой из (22), дает при $\Gamma_{in} = \Gamma_{in} \text{эксп}$

$$\ell_j(s) = 0.42 (0.5)_{\text{эксп}} \quad \ell_j'(s) = 1.1 (0.9)_{\text{эксп}} \quad (2I')$$

В. Ультррелятивистская кварковая модель. Семейство частиц содержит линейная траектория потенциала (3б) при $\mu \gg m$; его спадание умеренно и универсально; тем самым решается противоречие традиционного подхода - в семействе допустимы легкие частицы. Потенциал с параметрами $\mu = 10m$; $Z = 730 \text{ГэВ}^2$, применявшийся в уравнении Бете-Солпитера [I2], может быть примером: согласно (6,6') одна из дочерних траекторий содержит связанные состояния с $\ell = 0, 1, 2$.

7. Заключение

Основные результаты представим выводами методологического содержания.

I. Решения нового класса дифференциально-разностных уравнений воспроизводят лестничное приближение теории поля:

- а) свойства траекторий соответствуют представлениям теории поля;
- б) численные результаты близки к точным.

II. Релятивистская квантовая физика.

Так следует определить проявления релятивизма в обсуждаемых физических задачах.

Аналитический пример. Решение (I) дает единое представление траектории в области $-\infty < z \leq 4m^2$, в котором релятивистская природа операторов V, H^0 проявляется непосредственно

$$\ell(s)|_{s < 0} \sim \mathcal{V}(\sqrt{16T}) \quad \ell(s)|_{|s| \leq 4m^2} \sim \ell_0 + \ell' \cdot s.$$

Численный пример. "Поправка" в 300% для константы связи в потенциале $\mathcal{G}\mathcal{G}$ -системы, помимо кинематических эффектов оператора H^0 , содержит потенциальный вклад: функция (3б)

а) "сильнее" своего нерелятивистского аналога благодаря своим асимптотическим свойствам $V_s^{rel} \sim x^{-1} e^{-\mathcal{G}x} \cos(\mathcal{G}x) \quad V_s^{nonrel} \sim x^{-1} e^{-\mathcal{G}x}$,

б) "пульсирующая", т.е. содержит барьеры удержания.

III. Аналитический метод решения нового класса уравнений столь же эффективен, как и его нерелятивистский аналог. Найдена более полная и точная реализация метода, в которой $\ell(s)$ выражается через функцию, характеризующую взаимодействие; таким образом, наряду с прямой задачей "потенциал-траектория" реально исследование обратной "траектория-потенциал".

Операторы V, H^0 являются точными фурье-образами операторов теории поля. Возможно, единственной причиной неточности расчетов является погрешность метода. Необходимость разработки устойчивых методов численного решения нового необычного класса уравнений очевидна.

Приложение. Представим $\sum_{j=1}^{j_+}$ в виде сумм по степеням d_+^2 ; значение каждой запишем отдельной строкой

$$\begin{aligned} m_4: & d_+^2 & & = d_+^{-2} \{ -(\mathcal{V}(d_+) - 1) + d_+^2 \mathcal{V}'(d_+) + \\ m_8: & 2 d_+^4 + d_+ d_+ d_+^2 & & + \frac{d_+}{d_+} [-2(\mathcal{V}(d_+) - 1) + m_2 d_+^2 + d_+^2 \mathcal{V}'(d_+)] + \\ m_{16}: & 3 d_+^6 + 2 d_+ d_+ d_+^4 + d_+^2 d_+^2 d_+^2 & & + (\frac{d_+}{d_+})^2 [-3(\mathcal{V}(d_+) - 1) + 2m_2 d_+^2 + m_4 d_+^4 + d_+^2 \mathcal{V}'(d_+)] . \\ m_{24}: & 4 d_+^8 + 3 d_+ d_+ d_+^6 + \dots & & + \dots \end{aligned}$$

Повторное суммирование по правилу геометрической прогрессии дает

$$(2.4)^{-1} \sum_{j=1}^{j_+} = d_+^{-2} (1 - \frac{d_+}{d_+})^{-2} \{ -[\mathcal{V}(d_+) - 1] + (1 - \frac{d_+}{d_+}) d_+^2 \mathcal{V}'(d_+) + \sum_{j=1}^{j_+} m_j d_+^{2j} (\frac{d_+}{d_+})^j \}, \quad (II)$$

оставшаяся сумма равна $\mathcal{V}(\sqrt{16T}) - 1$. Центральный столбец $\sum_{j=1}^{j_+}$ является степенным разложением $\mathcal{V}(\sqrt{16T})$; суммирование в "треугольнике" по степеням $d_+^2 (d_+^2)$ дает

$$\begin{aligned} m_2: & & & = d_+^{-2} \{ \mathcal{V}(d_+) - 1 - m_2 d_+^2 \\ m_4: & d_+^2 + 2 d_+ d_+ + d_+^2 & & + 2 \frac{d_+}{d_+} [\mathcal{V}(d_+) - 1 - m_2 d_+^2 - m_4 d_+^4] + \\ m_6: & d_+^4 + 2 d_+^2 d_+ + 3 d_+^2 d_+^2 + 2 d_+^3 d_+ + \dots & & + 3 (\frac{d_+}{d_+})^2 [\mathcal{V}(d_+) - 1 - m_2 d_+^2 - m_4 d_+^4 - m_6 d_+^6] + \dots \} \\ m_8: & 2 d_+^6 + 3 d_+^4 d_+^2 + 4 d_+^3 d_+^3 + 3 d_+^4 d_+^2 + \dots & & + \mathcal{V}(\sqrt{16T}) + \{ (+) \rightarrow (0) \} . \\ \dots & & & \end{aligned}$$

Согласно правилу прогрессии

$$d_+^{-1} \sum_{j=1}^{j_+} = d_+^{-2} (1 - \frac{d_+}{d_+})^{-2} \{ \mathcal{V}(d_+) - 1 - m_2 d_+^2 - d_+^2 \sum_{j=1}^{j_+} m_{2j+2} d_+^{2j} (\frac{d_+}{d_+})^{2j} [1 + i(1 - \frac{d_+}{d_+})] \} + \mathcal{V}(\sqrt{16T}) + \{ (+) \rightarrow (0) \}$$

или

$$d_+^{-2} (1 - \frac{d_+}{d_+})^2 \{ \mathcal{V}(d_+) - 1 - \frac{d_+}{d_+} [\mathcal{V}(\sqrt{16T}) - 1] - \frac{d_+}{d_+} (1 - \frac{d_+}{d_+}) [-(\mathcal{V}(\sqrt{16T}) - 1) + d_+ \mathcal{V}'(\sqrt{16T})] \} + \mathcal{V}(\sqrt{16T}) + \{ (+) \rightarrow (0) \}$$

После приведения подобных членов находим $\sum_{j=1}^{j_+}$ и приближение $o(d_+^2)$

$$(I2) \quad d_+^{-1} \sum_{j=1}^{j_+} = d_+^{-2} (1 - \frac{d_+}{d_+})^2 \{ \mathcal{V}(d_+) + \mathcal{V}(d_+) - 2\mathcal{V}(\sqrt{16T}) \} \quad (II2)$$

Литература

- I. Kadyshchevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. - Nuovo Cim. 1968, 55A, p. 233.
2. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. - ЭЧАЯ, 1972, т. 2, вып. 3, с. 635.
3. Шепиро И.С. - ДАН СССР, 1956, т. 106, с. 647.
4. Кадышевский В.Г. - ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 654, с. 872.
- ДАН СССР, 1965, т. 160, с. 573.
5. Freeman M., Matveev M.D., Mir-Kasimov R.M. - Nucl. Phys., 1969, B12, p. 197.
6. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. - ЭЧАЯ, 1978, т. 9, вып. 1, с. 5.
7. Амирханов И.В., Груша Г.В., Мир-Касимов Р.М. - ЭЧАЯ, т. 12, вып. 3, с. 651.
8. Дренска С.Б., Мавродиев С.П. - ЭЧАЯ, 1983, т. 15, вып. 1, с. 94.
9. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. - ЯФ, 1980, т. 31, с. 1332.
Скачков Н.Б., Сидоров А.В. - ТМФ, 1981, т. 46, с. 213.
10. Miller H.J. - In: Lectures in Theoretical High Energy Physics, London, N.Y., Sydney: A.Wiley Interscience Publication, 1968, p. 371
11. Виноградов В.М. - ОИЯИ Р4-92-405, Дубна, 1992.
12. Shung V., Snider D.R. - Phys. Rev., 1967, v. 162, p. 1639.
13. Balaz L.A.P. - Phys. Rev. B, 1965, v. 137, p. 1510.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 сентября 1992 года.

Виноградов В.М.

P4-92-404

Метод приближенного решения релятивистского дифференциально-разностного уравнения в дискретном спектре. Аналитические и численные результаты для траекторий Редже

Для нового класса релятивистских дифференциально-разностных уравнений найдена аппроксимация $\ell(s)$ в терминах экспоненциальной функции потенциала. Поведение траекторий Редже соответствует представлениям теории поля; при $|s| \leq 4m^2$ справедливо линейное приближение. Численные значения воспроизводят решения уравнения Бете - Солпитера (точность $\approx 3-10\%$) и ρ -мезонную траекторию в $\pi\pi$ -системе (точность $\approx 20\%$) при физических параметрах потенциала. Общий вывод: новый класс уравнений реализует лестничное приближение теории поля.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод Сандуковской Г.Г.

Vinogradov V.M.

P4-92-404

Method of Approximate Solution of Relativistic Differential-Difference Equations in Discrete Spectrum. Analytical and Numerical Results for the Regge Trajectories

The approximation $\ell(s)$ in terms of the exponential function of potential is obtained for a new class of relativistic differential-difference equations. The behaviour of the Regge trajectories is consistent with the ideas of field theory; in particular, when $|s| \leq 4m^2$ linear approximation is valid. Numerical values describe solutions of the Bethe-Salpeter equations (within 3-10%) and the ρ -meson trajectory in $\pi\pi$ -system (within 20%) at physical parameters of the potential. Therefore, we conclude that the new class of the equations realizes the ladder approximation of field theory.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992