объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4-92-403

В.М.Виноградов

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА

Направлено в журнал "Physica Scripta"

1992

Введение

Достоинство теории, помимо новизны, определяет ее возможность сохранить достижения своей предшественницы. Разработка и реализация идеи [I,2] о релятивистском преобразовании Фурье [3] при решении проблемы двух тел позволила не только совместить концепции теории поля [4,5,2] и релятивистского конфигурационного представления

$$(H^\circ - 2E)\Psi(x) = V(x)\Psi(x) \qquad (I)$$

$$\frac{H^\circ}{2}(H^\circ - 2E)\Psi(x) = V(x)\Psi(x) \qquad H^\circ = 2\,\mathrm{ch}(i\partial_x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x(x+i)}\exp(i\partial_x) \qquad (2)$$

$$i\partial_x = i\frac{h}{mc}\frac{d}{dx} \qquad h = m = c = 1 \qquad i = \sqrt{-1},$$

но и применить к новому классу дифференциально-разностных уравнений (I,2) аналитические методы нерелятивистской теории. Были найдены решения уравнения (I) ряда задач: для потенциалов Кулона [6], осцилляторного [7] и потенциала запирания [8]; приближения: эйконала [2], "экспонента-степень" для сечений [9], траекторий Редже [10]; рассмотрена формулировка и численная реализация вариационного метода [II] [1]. Аналитические решения уравнения (2), точного в лестничном приближении уравнения теории поля, практически отсутствуют.

В данной работе методом преобразования Лапласа получено решение уравнения (I) для кулоновского потенциала [2], найденное ранее методом подстановки [6], и предпринята попытка решить эту задачу для уравнения (2).

2. Метод преобразования Лапласа для уравнения второго порядка

Существо метода для исследования разностных уравнений определено его основным свойством: операции в исходном пространстве

$$\varphi(x) = \oint t^{x-1}\,\mathcal{U}(t)\,dt \qquad (3)$$

сводятся к операциям умножения и дифференцирования в пространстве образов

$$\varphi(x+k) = \oint t^{k}\, t^{x-k}\,\mathcal{U}(t)\,dt \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$(x+k)\varphi(x+k) = \oint t^{k}\, t^{x-k}\left(-t\frac{d}{dt}\right)\mathcal{U}(t)\,dt \quad \ldots \qquad (3')$$

Преобразования (3,3′) удобны для уравнений, представленных в нормальной форме. Подстановка $\Psi(x) = (-x)^{(\ell+1)}\varphi(x)$

$$(-x)^{(\ell+1)} = x(x-i)\ldots(x-i\ell) = (-i)^{\ell+1}(ix)_{\ell+1}, \qquad (ix)_{\ell+1} = \frac{\Gamma(ix+\ell+1)}{\Gamma(ix)} \qquad (4)$$

приводит уравнение (I) для кулоновского потенциала к следующему виду $(\ell 1 = \ell+1)$

I) **Многочисленные применения таких решений в феноменологии представлены в [8–10].**

2) **Преобразование Лапласа с фиксированным контуром, альтернативное данной работе, сводит задачу к решению дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом [12].**

$$\left[(x+i\ell 1)e^{i\partial_x} + (x-i\ell 1)e^{-i\partial_x} - x2E - Z\right]\varphi(x) = 0. \qquad (5)$$

К нормальной форме записи придем с помощью новой переменной $x_\ell = ix - \ell$

$$[x_\ell + 2 + 2\ell]\varphi(x_\ell+2) - [2E(x_\ell+1) + 2\ell E + iZ]\varphi(x_\ell+1) + x_\ell\varphi(x_\ell) = 0. \qquad (5')$$

Уравнение в пространстве образов найдем из определений (3,3′)

$$[t^2 - 2Et + 1]\,\mathcal{U}'(t) = [2\ell t - 2\ell E - iZ]\,\mathcal{U}(t). \qquad (6)$$

В соответствии с порядком уравнения (5′) характеристическое уравнение содержит два корня

$$t^2 - 2Et + 1 = (t-\varepsilon_+)(t-\varepsilon_-) = 0$$

$$2E = 2\,\mathrm{ch}\,\chi \qquad \varepsilon_\pm = \exp(\pm\chi) \qquad 0 \leqslant \chi < \infty, \qquad (7)$$

которые являются точками сингулярности (6) в области $0 < t < \infty$

$$\frac{\mathcal{U}'(t)}{\mathcal{U}(t)} = \frac{\ell - Z_\chi}{t-\varepsilon_+} + \frac{\ell + Z_\chi}{t-\varepsilon_-} \qquad Z_\chi = iZ/2\,\mathrm{sh}\,\chi$$

$$\mathcal{U}(t) = (t-\varepsilon_+)^{\alpha_1}(t-\varepsilon_-)^{\alpha_2} \qquad \alpha_{1,2} = \ell \mp Z_\chi. \qquad (6')$$

Независимое решение (5) определяет контур интегрирования в (3), содержащий начало координат и одну из точек (7) [13]

$$\varphi_{1,2}(x) = \oint t^{x_\ell - 1}(t-\varepsilon_+)^{\alpha_1}(t-\varepsilon_-)^{\alpha_2}\,dt. \qquad (3'')$$

Интеграл приводится к гипергеометрической функции подстановкой $t' = \varepsilon_\pm t$

$$\varphi_{1,2}(x) = \varepsilon_\pm^{x_\ell}\,\varepsilon_+^{\alpha_1}\varepsilon_-^{\alpha_2}\left(1 - e^{-i2\pi\alpha_{1,2}}\right)\frac{\Gamma(x_\ell)\Gamma(\alpha_{1,2}+1)}{\Gamma(x_\ell+\alpha_{1,2}+1)}F(x_\ell, -\alpha_{2,1}; x_\ell+\alpha_{1,2}+1; \varepsilon_\pm^2). \qquad (8)$$

Функции (8) образуют первую каноническую систему решений, т.е. любое решение (5) представимо линейной комбинацией $\varphi_{1,2}(x)$ с i-периодическими коэффициентами.

С помощью соотношений Куммера выделим решение (5), конечное при $x=0$

$$\varphi_{1,2}(x) = C_{1,2}\,e^{x\chi}F(\alpha_1+1, -x_\ell+1; \alpha_1+\alpha_2+1; 1-\varepsilon_-^2) + C'_{1,2}\frac{(-x)^{(-\ell)}}{(-x)^{(\ell+1)}}e^{x\chi}F(x_\ell, -\alpha_1; -\alpha_1-\alpha_2; 1-\varepsilon_-^2) \qquad (8')$$

Волновую функцию (4) найдем, составляя линейную комбинацию из (8′)

$$\Psi(x) = (-x)^{(\ell+1)}\,e^{ix\chi}\,F\left(\ell+1-\frac{iZ}{2\,\mathrm{sh}\,\chi}, -ix+\ell+1; 2\ell+2; 2\,\mathrm{sh}\,\chi\, e^{-\chi}\right). \qquad (9)$$

Асимптотические условия для волновой функции дискретного спектра $2E = 2\cos\chi$ дают правило квантования

$$\ell + 1 - \frac{Z}{2\sin\chi} = -n \qquad n = 0,1,2,\ldots \quad 0 \leqslant \chi \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (10)$$

Поправки к уровням энергии связи $W_n = |2E-2|$ можно представить разложением $(\ell=0;\ Z<2)$ [6]

$$W_n \simeq \left(\frac{Z}{2n}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{Z}{2n}\right)^4 + \ldots \qquad n = 1,2,\ldots \qquad (11)$$

3) При физических значениях $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\ell$ нерегулярное **при** $x=0$ решение находится посредством аналитического продолжения [14]. В данном случае для перехода (8,9) достаточно использовать промежуточную регуляризацию.

3. Кулоновская задача для релятивистского дифференциально-разностного уравнения четвертого порядка

Преобразование (4) позволяет представить уравнение (2) в симметричном виде $(\ell 2=\ell+2)$

$$\Big\{(x+i)^{-1}(x+i\ell 1)\left[(x+i\ell 2)e^{i2\partial_x}-E(x+i)e^{i\partial_x}+x-i\ell 1\right]+ (x-i)^{-1}(x-i\ell 1)\left[(x-i\ell 2)e^{-i2\partial_x}-E(x-i)e^{-i\partial_x}+x-i\ell 1\right]-2Z\Big\}\varphi(x)=0. \tag{I2}$$

Нормальную форму записи получим с помощью замены $x=ix'$ $(\ell=0)$

$$-(x+4)\varphi(x+4)+2E(x+3)\varphi(x+3)-\left[2(x+2)-i2Z\right]\varphi(x+2)+2E(x+1)\varphi(x+1)-x\varphi(x)=0. \tag{I3}$$

Уравнение в пространстве образов

$$(t^2+1)(t^2-2Et+1)\,u'(t)=-i\,2Zt\,u(t) \tag{I4}$$

в области $0<t<\infty$ имеет четыре особые точки: $t=\varepsilon_\pm$, совпадающие с (7), отвечают собственному значению $2E$; две другие, в соответствии с (2), определяются собственным значением, равным нулю

$$2E=2\,\mathrm{ch}\,\chi_0=0 \qquad \varepsilon_\pm(\chi_0)=\pm i\equiv i_\pm \qquad \chi_0=i\frac{\pi}{2}. \tag{7'}$$

В обозначениях (7,7') уравнение (I4)

$$\frac{u'(t)}{u(t)}=\frac{-Z_\chi}{t-\varepsilon_+}+\frac{Z_\chi}{t-\varepsilon_-}+\frac{-Z'_\chi}{t-i_+}+\frac{Z'_\chi}{t-i_-} \tag{I4'}$$

$$Z_\chi=iZ/\mathrm{sh}\,2\chi \qquad Z'_\chi=Z/2\,\mathrm{ch}\,\chi,$$

его решение и переход к $\varphi(x)$ аналогичны (6,3")

$$\varphi(x)=\oint t^{x-1}(t-\varepsilon_+)^{\alpha_1}(t-\varepsilon_-)^{\alpha_2}(t-i_+)^{\beta_1}(t-i_-)^{\beta_2}\,dt \tag{I5}$$

$$\alpha_{1,2}=\mp Z_\chi \qquad \beta_{1,2}=\mp Z'_\chi.$$

Интегральное представление (I5) дает четыре независимых решения. Выбрав контур интегрирования согласно (3"), после замены переменных $t=\varepsilon_\pm u$ найдем

$$\varphi_{1,2}(x)=\varepsilon_\pm^{x}\,\varepsilon_+^{\alpha_1}\varepsilon_-^{\alpha_2}\left(1-e^{-i2\pi\alpha_{1,2}}\right)i_+^{\beta_1}i_-^{\beta_2}\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(\alpha_{1,2}+1)}{\Gamma(x+\alpha_{1,2}+1)}F_D^{(3)}$$

$$F_D^{(3)}=\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{\lambda-x-1}(1-\varepsilon_\pm^2u)^{\alpha_{2,1}}(1-y_1u)^{\beta_1}(1-y_2u)^{\beta_2}\,dt \tag{I6}$$

$$\lambda=x+\alpha_{1,2}+1 \qquad y_{1,2}=-i_\pm\varepsilon \qquad \varepsilon=\varepsilon_\pm.$$

Здесь $F_D^{(3)}$ – функция Ларичелли [I5]: гипергеометрическая функция трех переменных, для которой область сходимости ряда для переменных $\varepsilon_\pm^2, y_{1,2}$ $(knm=k+n+m)$

$$F_D^{(3)}(x;-\alpha_{1,2},-\beta_1,-\beta_2;\lambda;\varepsilon_\pm^2,y_1,y_2)=\sum_{k,n,m}\frac{(x)_{knm}(-\alpha_{1,2})_k(-\beta_1)_n(-\beta_2)_m}{(x+\alpha_{1,2}+1)_{knm}}\frac{\varepsilon_\pm^{2k}}{k!}\frac{y_1}{n!}\frac{y_2}{m!} \tag{I7}$$

определяется единичным кругом. Предполагая сходимость ряда[4], выполним суммирование по индексу переменной $\varepsilon_\pm^2$ $(x_{nm}=ix+nm;\ nm=n+m)$

$$F_D^{(3)}=\sum_{n,m}\frac{(x)_{nm}(-\beta_1)_n(-\beta_2)_m}{(x+\alpha_{1,2}+1)_{nm}}\,{}_2F_1(x_{nm},-\alpha_{2,1};x_{nm}+\alpha_{1,2}+1;\varepsilon_\pm^2)\frac{y_1}{n!}\frac{y_2}{m!}$$

Применив линейные преобразования ${}_2F_1$, придем к разделению $\varphi_{1,2}(x)$ на части с регулярным и нерегулярным поведением при $x=in,\ n=0,1,\ldots$

---

[4] Соотношения между $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, ряд которой сходится абсолютно, дают формулы аналитического продолжения $F_D^{(3)}$ [I5]. В соответствии со статусом теории гипергеометрических рядов многих переменных в дальнейшем придется руководствоваться принципом соответствия.

$$\varphi_{1,2}(x)=C_{1,2}e^{ix\chi}\sum_{n,m}\frac{(-\beta_1)_n}{n!}\frac{(-\beta_2)_m}{m!}(-1)^m\,{}_2F_1(\alpha_{1,2}+1,-x_{nm}+1;\alpha_1+\alpha_2+1;1-\varepsilon_-^2)\,e^{-(\chi_0-\chi)nm}+ C'_{1,2}e^{-ix\chi}\sum_{n,m}\frac{(-\beta_1)_n}{n!}\frac{(-\beta_2)_m}{m!}(-1)^m\,{}_2F_1(x_{nm},-\alpha_1;-\alpha_1-\alpha_2;1-\varepsilon_-^2)\,e^{-(\chi_0+\chi)nm}\,x_{nm}^{-1}. \tag{I8}$$

Линейная комбинация $\varphi_{1,2}(x)$ дает волновую функцию уравнения (2) в виде разложения по функциям (9), определяющим решение уравнения (I),

$$\Psi(x)=x\,e^{ix\chi}\sum_{n,m}\frac{(Z'_\chi)_n}{n!}\frac{(Z_\chi-m+1)_m}{m!}\,{}_2F_1\Big(\ell+1-\frac{iZ}{\mathrm{sh}\,2\chi},-ix-nm+1;2;2\,\mathrm{sh}\,\chi\,e^{-\chi}\Big)e^{-(\chi_0-\chi)nm}. \tag{I9}$$

Правило квантования получим из асимптотических условий для волновой функции дискретного спектра (ср.(I0)).

$$1-\frac{Z}{\sin 2\chi}=-n \qquad n=0,1,2,\ldots \qquad 0\leq\chi\leq\frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

Волновую функцию основного состояния находим из (I9,20)

$$\Psi(x)=x\,e^{-x\chi} \qquad \chi=\frac{1}{2}\arcsin(Z).$$

Для возбужденных состояний (I9) дает асимптотическое разложение. Поправки к уровням энергии уравнения (2) отличны от (II)

$$W_n\simeq\left(\frac{Z}{2n}\right)^2+\left(\frac{Z}{2n}\right)^4+\ldots \qquad n=1,2,\ldots \tag{21}$$

Правило квантования (20) теряет смысл при $\chi=\frac{\pi}{2}$. В этом случае пара особых точек (7) уравнения (2) сливается с особыми точками (7'); решения (I4) будут другими; т.е. уравнение (2) в крайней точке дискретного спектра $s=(2E)^2=0$ сингулярно.

4. Выводы

Дифференциально-разностные уравнения (5',I3) с коэффициентами, линейными относительно переменной, принадлежат хорошо известному классу разностных уравнений Лапласа [I3]:

I. любое решение (5') выражается через гипергеометрическую функцию, т.е. уравнение (I) с кулоновским потенциалом доступно полному математическому анализу;

2. функция $F_D^{(3)}$, представляющая решение (I3), принадлежит классу гипергеометрических функций многих переменных, являющихся объектом интенсивных исследований; в отношении уравнения (2), полевого по своей природе, справедливы утверждения:

а) уравнение сингулярно при $s=0$;

б) собственные значения **уравнений (I,2) существенно различны;**

в) решения уравнения удовлетворяют принципу соответствия.

Преобразование Лапласа дает простой метод исследования нового класса уравнений; с необходимостью приходим к постановке следующих задач:

I. решение уравнения четвертого порядка при $\ell\neq 0$ для кулоновского потенциала;

2. решение и исследование релятивистских уравнений с потенциалами степенного типа;

3. природа i-периодического произвола.

Литература

1. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B.– Nuovo Cim., 1968, 55A, p. 233.
2. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б.– ЭЧАЯ, 1972, т. 2, вып. 3, с. 635.
3. Шапиро И.С.– ДАН СССР, 1956, т. 106, с. 647.
4. Кадышевский В.Г.– ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 654, с. 872.
 – ДАН СССР, 1965, т. 160, с. 573.
5. Kadyshevsky V.G.– Nucl. Phys., 1968, B6, p. 125.
6. Freeman M., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M.– Nucl. Phys., 1969, B12, p. 197.
7. Донков А.Д., Кадышевский В.Г., Матеев М.Д., Мир-Касимов Р.М.– ТМФ, 1971, т. 8, вып. 1, с. 61.
8. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л.– ЭЧАЯ, 1978, т. 9, вып. 1, с. 5.
9. Дренска С.Б., Мавродиев С.П.– ЭЧАЯ. 1983. т. 15. вып. 1. с. 94.
10. Виноградов В.М. – ОИЯИ Р4-92-404, Дубна, 1992.
11. Виноградов В.М. – ОИЯИ Р4-92-405, Дубна, 1992.
12. Дей Е.А., Капшай В.Н., Скачков Н.Б.– ТМФ, 1986, 69, №1, с.55.
13. Milne-Thompson L.M., The Calculus of Finite Differences. McMillan and Co., London, 1951.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц И.М.– Квантовая механика. Москва, "Наука", 1989.
15. Srivastava H.M., Karlsson P.W. Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Chichesterm Brisbane and Toronto, 1985. John Wiley. Sons, New York.

Виноградов В.М. Р4-92-403

Исследование релятивистских дифференциально-разностных уравнений методом преобразований Лапласа

С помощью преобразования Лапласа решена кулоновская задача для нового класса релятивистских дифференциально-разностных уравнений второго и четвертого порядка. Решение уравнения четвертого порядка, полевого по своей природе, выражается через гипергеометрическую функцию трех переменных и позволяет установить ($\ell = 0$): правило квантования, сингулярность уравнения при $s = 4E^2 = 0$, принцип соответствия.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод Сандуковской Г.Г.

Vinogradov V.M. P4-92-403

Analysis of Relativistic Differential-Difference Equations Usingly Laplace Transformation

The Coulomb problem for a new class of the relativistic differential-difference equations of second and fourth orders is solved with the use of the Laplace transformation. The solution of the fourth-order equation which is of the field nature is expressed via the hypergeometric function of three variables and allows us to establish ($\ell = 0$) the quantization rule, singularity of the equation at $s = 4E^2 = 0$, and the correspondence principle.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992