объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4-92-367

А.А.Сузько

СУПЕРСИММЕТРИЯ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕАДИАБАТИЧЕСКИЕ ФАЗЫ, АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ДВУХАТОМНЫХ СИСТЕМАХ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1992

Введение

Один из интересных аспектов адиабатического представления связан с возникновением калибровочных полей в нерелятивистских мало- и многочастичных квантовых системах, в особенности в связи с открытием Берри [1] геометрической адиабатической фазы. Дальнейшие этапы развития теории определены работами Вильчека и Зи [2], Агаронова и Анандана [3]. Вильчек и Зи показали, что неабелевы эффективные калибровочные поля возникают в адиабатической трактовке молекулярных систем с вырожденными электронными состояниями. Агаронов и Анандан обобщили подход введением неадиабатических неабелевых геометрических фаз. Одно из следствий подхода - возникновение в молекулярных системах эффектов, эквивалентных эффектам Агаронова - Бома [4] и Холла [5, 6], сверхпроводимости, нелинейных явлений. В частности, при наличии суперсимметрии для систем калибровочных уравнений основное состояние - состояние вакуума вырождено и возможны условия для возникновения эффектов, подобных квантовому эффекту Холла и нестандартной статистики.

Суперсимметричная квантовая механика позволяет находить точные решения для широкого класса задач, включая многие из моделей, получаемых методами обратной задачи рассеяния и преобразований Дарбу [7, 8]. В данной статье обсуждается обобщение суперсимметричной квантовой механики на системы калибровочных уравнений [9, 10, 11], получаемых в адиабатическом представлении. При этом изучается вопрос введения дополнительного скалярного потенциала при сохранении суперсимметрии. В одномерном случае суперсимметрия полностью определяется матрицей скалярных потенциалов, т.е. здесь можно сказать, что суперсимметрия и калибровочная симметрия не перемешиваются. В то же время в многомерном случае наличие суперсимметрии может приводить к возникновению геометрических фаз, которые по сути дела были написаны Агароновым и Кашером в статье [12], посвященной изучению вырождения основного состояния гамильтониана Паули, фаз Вильчека и Зи [2] из-за вырождения уровней, различных топологических эффектов. Возможно также возникновение неадиабатических геометрических фаз вследствие сингулярностей вектор - потенциала в точках пересечения термов. Это второй аспект исследования.

Недиагональные элементы индуцированного оператора связности A реализуют переходы между состояниями параметрического, так называемого мгновенного гамильтониана H^f, и генерируют неадиабатические фазы Агаронова-Анандана [3]. В реалистической постановке трехчастичной задачи [13, 14, 15] недиагональные матричные элементы A должны быть приняты во внимание, так как без них невозможно правильное решение задачи. Более того, возле пересечения уровней адиабатическое приближение несправедливо. При пересечении двух или даже трех уровней возникают сингулярности A_{nm} и, как результат, вызываемые ими фазы. Это делает необходимым введение геометрических неадиабатических матриц в присутствии сингулярностей A дополнительно к фазам Агаронова - Анандана. Фазы Берри [1] получаются в адиабатическом пределе, когда переходами между различными состояниями пренебрегают.

Класс точно решаемых задач квантовой механики существенно расширяется при использовании методов обратных задач рассеяния и преобразований Дарбу - Крама - Крейна [16, 17, 18]. В наших работах [19, 20, 21] предложены обобщенные преобразования Баргмана и Дарбу - Крама - Крейна, позволяющие конструировать в замкнутом аналитическом виде новые серии потенциалов и соответствующие им решения уравнения Шредингера при переменных значениях углового момента l и энергии E вдоль произвольных прямых линий в $(\lambda^2\ ,\ E)$ - плоскости $(\lambda = l + 1/2)$. В частном случае $l = const$ они переходят в обычные выражения для решений и потенциалов баргмановского типа в подходах Гельфанда - Левитана или Марченко с вырожденным ядром оператора обобщенного сдвига и в преобразования такого же типа при $E = const$. В этом смысле подход дает обобщение точно решаемых моделей обратной задачи с тем преимуществом, что не использует интегральных уравнений обратной задачи и соответственно не использует в явном виде полноту набора собственных функций, необходимую для ее вывода, и в то же время является замкнутой алгебраической процедурой. Полученные обобщенные преобразования Баргмана связаны с обобщенными преобразованиями Дарбу подобно тому, как соответствующие им обычные преобразования связаны друг с другом. Проведенные исследования для уравнений Шредингера с переменными значениями энергии и орбитального момента позволили предложить технику алгебраических преобразований Баргмана и Дарбу для уравнений более общего вида с функциональной зависимостью в правой части уравнения

$$-d^2\phi(\gamma,r)/dr^2 + V(R)\phi(\gamma,r) = \gamma^2 h(r)\phi(\gamma,r), \tag{1}$$

находящих применение в атомной физике, теории распространения электромагнитных волн, акустике, геофизике и т.д. При определенном выборе $h(r)$ преобразования Баргмана и Дарбу как для фиксированных значений E и l, так и для переменных получаются как частные случаи этих обобщенных преобразований.

1 Суперсимметрия калибровочных уравнений и геометрические неадиабатические фазы

1.1 Суперсимметрия калибровочных уравнений

Индуцированные калибровочные потенциалы естественно возникают при описаниях квантовомеханических систем, зависящих только от медленно изменяющихся внешних параметров. Это имеет место во многих реальных системах, где имеются медленные и быстрые степени свободы и необходимо оценить влияние медленной динамики на быструю и наоборот. Полный гамильтониан разбивается на две составляющие $H = H^f + H^s$, где $H^f(\mathbf{R})$ - параметрическое семейство быстрых гамильтонианов. Искомая волновая функция полного гамильтониана H представляется в виде разложения по собственным функциям $\Phi_n(\mathbf{R};\mathbf{r})$ мгновенного гамильтониана H^f при каждом фиксированном значении медленных переменных R

$$\Psi(\mathbf{R},\mathbf{r}) = \sum_n \Phi_n(\mathbf{R};\mathbf{r}) F_n(\mathbf{R}); \tag{2}$$

$$H^f(\mathbf{R})\Phi_n(\mathbf{R};\mathbf{r}) = E_n(R)\Phi_n(R;r). \tag{3}$$

Подставляя разложение (2) в исходное уравнение Шредингера

$$H\Psi(\mathbf{R},\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{R},\mathbf{r}) \tag{4}$$

и используя соотношения ортогональности $< n \mid m >= \delta_{nm}$ и полноты $\mid n >< n \mid = 1\delta(\mathbf{r}\text{-}\mathbf{r}')$ собственных состояний $\mid \Phi_n(\mathbf{R}) >$ гамильтониана

$H^f(\mathbf{R})$ при фиксированных значениях R, получаем систему уравнений калибровочного типа для коэффициентов разложения F_n

$$-1/2[\nabla_{\mathbf{R}} I - iA(\mathbf{R})]^2 F(\mathbf{R}) + V(\mathbf{R})F(\mathbf{R}) = EF(\mathbf{R}) \ , \tag{5}$$

где $F = \{F_n\}$ - колонка-вектор размерности M, I - единичная матрица, а A и V - векторная и скалярная компоненты калибровочного поля

$$A_{nm}(\mathbf{R}) = < \Phi_n \mid i\nabla_{\mathbf{R}} \mid \Phi_m >, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} V_{nm}(\mathbf{R}) = & < \Phi_n \mid H^f \mid \Phi_m > \delta_{nm} \ + \ 1/2 \sum_{k \neq n,m} A_{nk} A_{km} \\ & + \ < \Phi_n \mid V^s \mid \Phi_m > . \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнение (5) обладает унитарной калибровочной симметрией $U(M)$ - группы. Для полного набора Φ_n второй член в (7) исчезает, и, если A не имеет сингулярностей, можно найти калибровку (чистую калибровку), когда наведенный вектор-потенциал исчезает. В одноуровневом приближении $F(R)$ становится скалярной волновой функцией.

Рассмотрим вначале одномерную задачу. Представим гамильтониан H уравнения (5) в факторизованном виде

$$H^- = 1/2 Q^- Q^+ \ , \quad H^+ = 1/2 Q^+ Q^- \tag{8}$$

с

$$Q^{\pm} = \pm D + \alpha(R) \ , \quad D = \partial_R - iA(R). \tag{9}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} H^{\pm} = 1/2\{[\ - \ D^2 + \alpha^2(R)]I + \sigma_3(D\alpha(R) - \alpha(R)D)\}; \\ V_+(R) \ = \ V_-(R) + D\alpha(R) - \alpha(R)D. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Суперсимметричный гамильтониан (10) в двухкомпонентном обозначении перепишется следующим образом:

$$H^s = 1/2\{Q_-, Q_+\} = \begin{pmatrix} H^+ & 0 \\ 0 & H^- \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где Q_- and Q_+ определяются как обычные суперсимметричные заряды

$$Q_+ = \begin{pmatrix} 0 & Q^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad Q_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q^- & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

и они удовлетворяют соотношениям алгебры суперсимметрии

$$Q_+^2 = Q_-^2 = [H^s, Q_+] = [H^s, Q_-] = 0. \tag{13}$$

Если проигнорируем недиагональные элементы перехода в системе уравнений (5), то получим систему несвязанных уравнений, т.е. адиабатическое приближение. В этом случае суперсимметричный гамильтониан (11) перепишется в виде

$$H^s = 1/2\{[-D^2 + \alpha^2(R)]I + \sigma_3 \partial_R \alpha(R)\}, \tag{14}$$

где $\alpha(R)$ связано с $V(R)$, как обычно, уравнением Рикатти: $\alpha^2(R) - d\alpha(R) = V_-(R)$. В представлении волновой функции основного состояния $\alpha(R) = d_R W$ волновые функции H^+ and H^- при произвольной энергии связаны преобразованиями

$$\begin{aligned} \chi_+(R,E) \ &= \ Q^+ \chi_-(R,E) = [D + \alpha(R)]\chi_-(R,E) \\ &= \ \chi_0^{-1}(R) W_D\{\chi_0(R), \chi_-(R,E)\}, \end{aligned} \tag{15}$$

обобщающими преобразования Дарбу-Крама-Крейна. Здесь $\chi_0(R)$ - волновая функция основного состояния H^-, представленного в виде

$$\chi_0(R) = P \exp\{-i \int^R A(R')dR'\} exp\{-\int^R \alpha(R')dR'\}, \tag{16}$$

и обобщенный вронскиан W_D определяется через ковариантную производную

$$W_D = \{\chi_0^\dagger D\chi_- - (D\chi_0)^\dagger \chi_-\},$$

P обозначает упорядоченную экспоненту.

Далее, следуя [23, 9, 11], можно представить трех- или двухмерное обобщение (8)-(16) для систем калибровочных уравнений (5), которые описывают медленную динамику нерелятивистских систем (в частности, трехчастичной) и суперсимметрию для них. Введем суперзаряды следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}^+ \ &= \ \frac{1}{\sqrt{2}} \tau_+ \sigma \mathbf{Q}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \tau_+ \sum_\mu \sigma_\mu Q_\mu^+ \ ; \\ \bar{\mathbf{Q}}^- \ &= \ \frac{1}{\sqrt{2}} \tau_- \sigma \mathbf{Q}^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \tau_+ \sum_\mu \sigma_\mu Q_\mu^- \ , \end{aligned} \tag{17}$$

где $\bar{\mathbf{Q}}^+$, $\bar{\mathbf{Q}}^-$ - блочные 2×2 - матрицы, составленные, аналогично (13), из многомерных, многоканальных генераторов суперсимметрии $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$, координатные компоненты которых определяются в соответствии с (9):

$$Q^{\pm}_{\mu} = \pm D_{\mu} + \partial_{\mu} W,\ D_{\mu} = \partial_{\mu} - iA_{\mu}, \tag{18}$$

$\tau_{\pm} = 1/2(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$, $\sigma_{\mu}(\mu = 1,2,3)$ - спиновые матрицы Паули. Тогда суперсимметричный гамильтониан можно представить в виде:

$$H^S = \frac{1}{2}\{\bar{\mathbf{Q}}^+, \bar{\mathbf{Q}}^-\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\sigma\mathbf{Q}^+)(\sigma\mathbf{Q}^-) & 0 \\ 0 & (\sigma\mathbf{Q}^-)(\sigma\mathbf{Q}^+) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Дополнительно к составляющим $H^+ = \frac{1}{2}Q^+Q^-, H^- = \frac{1}{2}Q^-Q^+$, отвечающим одномерному суперсимметричному гамильтониану (8), в H^s (19) возникает матричный тензор

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A^{\nu} - \partial_{\nu}A^{\mu} - i[A^{\nu}, A^{\mu}] = \epsilon^{\nu\mu k}B^k, \tag{20}$$

отождествляемый с магнитным полем, и слагаемые $\sigma(\nabla_R W \times \mathbf{P})$, подобные спин - орбитальной связи для центральных полей $\frac{2}{R}\partial_R W(\sigma\mathbf{L})$ [23]. Процедура (8) - (19) обобщает обычную процедуру суперсимметричной нерелятивистской квантовой механики и основана на факторизации полного гамильтониана уравнения(5). Она позволяет генерировать большой класс точно решаемых моделей для уравнений (5) в присутствии эффективных векторных потенциалов.

Проанализируем подход подробнее, непосредственно обобщая хорошо известную задачу движения заряженной частицы со спином 1/2 под воздействием неоднородного магнитного поля, направленного перпендикулярно к плоскости движения частицы [24, 12]. Суперсимметрия в этом случае основана на том факте, что в двухмерном пространстве гамильтониан Паули

$$H^P = 1/2[-i\nabla - e\mathbf{A}]^2 - e/2B\sigma_3 \tag{21}$$

может быть записан как квадрат гамильтониана Дирака ($\hbar = c = m = 1$)

$$\begin{aligned} H^P &= 1/2(H^D)^2, \\ H^D &= i\sigma_{-3}\nabla + e\sigma\mathbf{A}. \end{aligned} \tag{22}$$

Определим эрмитовы суперзаряды $Q_i \equiv Q_i(x,y)$

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1/2[\sigma_1(\pi_x - \partial_y W) + \sigma_2(\pi_y + \partial_x W)], \\ Q_2 &= 1/2[\sigma_2(\pi_x - \partial_y W) - \sigma_1(\pi_y + \partial_x W)] \end{aligned} \tag{23}$$

с дополнительными скалярными функциями ∂W_{μ} по сравнению с классической задачей (21) - (22). В многоканальном случае адиабатического подхода $W(x,y)$ и π_{μ} связаны с ковариантной производной D соотношением

$$\pi_{\mu} = -iD_{\mu} = [-i\partial_{\mu}I - A_{\mu}]$$

с матрицей A_{μ} определяемой из (6). Суперзаряды Q_i удовлетворяют набору соотношений суперсимметричной квантовой механики Виттена

$$[Q_i, Q_j] = \delta_{ij}H \text{ and } [H, Q_i] = 0, \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{24}$$

В рассматриваемом случае $i = 2$. Как обычно,введем неэрмитовы суперзаряды

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[-Q_2 + iQ_1], \\ \mathbf{Q}^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}[-Q_2 - iQ_1]. \end{aligned} \tag{25}$$

Матричные суперзаряды $\mathbf{Q}^+$ и $\mathbf{Q}^-$ представимы как блочные 2×2 - матрицы

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_+[(i\pi_x + \partial_x W) + (\pi_y - i\partial_y W)] = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_+[Q^+_x - iQ^+_y], \\ \mathbf{Q}^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_-[(-i\pi_x + \partial_x W) + (\pi_y + i\partial_y W)] = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_-[Q^-_x + iQ^-_y], \end{aligned} \tag{26}$$

соответствующие (17). Используя их, конструируем суперсимметричный гамильтониан

$$\begin{aligned} H^s &= 1/2\{\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-\} = 1/2\begin{pmatrix} \mathbf{Q}^+\mathbf{Q}^- & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}^-\mathbf{Q}^+ \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\{\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-\} + 1/2\sigma_3[\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-], \end{aligned} \tag{27}$$

а суперзаряды $\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-$ удовлетворяют соотношениям алгебры суперсимметрии (13).

Суперпартнеры $H^+ = 1/2(\mathbf{Q}^+\mathbf{Q}^-)$ и $H^- = 1/2(\mathbf{Q}^-\mathbf{Q}^+)$ гамильтониана H^s (27) представимы следующим образом:

$$\begin{aligned} H^+ &= 1/2[Q^+_xQ^-_x + Q^+_yQ^-_y + i(Q^+_xQ^-_y - Q^+_yQ^-_x)], \\ H^- &= 1/2[Q^-_xQ^+_x + Q^-_yQ^+_y - i(Q^-_xQ^+_y - Q^-_yQ^+_x)]. \end{aligned} \tag{28}$$

Используя определения (26), после простых преобразований гамильтонианы $H^{\pm}$ можно переписать в явном виде

$$H^{+} = 1/2[\pi_x^2 + \pi_y^2 + i(\pi_x\pi_y - \pi_y\pi_x) + (\partial_x W)^2 + (\partial_y W)^2$$

$$+(i\pi_x + \pi_y)(\partial_x W + i\partial_y W] + \partial_x W\pi_y - \partial_y W\pi_x],$$

$$H^{-} = 1/2[\pi_x^2 + \pi_y^2 - i(\pi_x\pi_y - \pi_y\pi_x) + (\partial_x W)^2 +$$
$$(\partial_y W)^2 + (-i\pi_x + \pi_y)(\partial_x W - i\partial_y W) + \partial_x W\pi_y - \partial_y W\pi_x]. \qquad (29)$$

Перепишем эти соотношения в более удобном для анализа виде

$$H^{+} = 1/2[\pi^{+}\pi^{-} + (\partial_x W)^2 + (\partial_y W)^2 +$$

$$\pi^{+}(\partial_x W - i\partial_y W) + \partial_x W\pi_y - \partial_y W\pi_x];$$

$$H^{-} = 1/2[\pi^{-}\pi^{+} + (\partial_x W)^2 + (\partial_y W)^2 +$$
$$\pi^{-}(\partial_x W + i\partial_y W) + \partial_x W\pi_y - \partial_y W\pi_x]. \qquad (30)$$

Здесь принято во внимание обычное определение неэрмитовых суперзарядов

$$\pi^{+} = (+i\pi_x + \pi_y)\ ,\ \pi^{-} = (-i\pi_x + \pi_y),$$

производящих матричный аналог гамильтониана Паули (21)

$$H^{P} = 1/2\{\pi^{+}\ \ ,\pi^{-}\} = 1/2(\sigma\pi)^2$$

со скалярной потенциальной матрицей

$$V = F_{\mu\nu}\sigma_3. \qquad (31)$$

Как следует из соотношений (26), при $W(x,y) = 0$ неэрмитовы суперзаряды $\mathbf{Q}^{+}$ и $\mathbf{Q}^{-}$ переходят в π^{+} и π_{-}, а суперсимметричный гамильтониан (27) H^{s} переходит в H^{p}. Это эквивалентно принципу минимального включения взаимодействия с электромагнитным полем как с калибровочным A. Если векторный потенциал $A_\mu = 0$, из соотношений (23) - (27) легко получаем виттеновскую конструкцию [25] суперсимметричной квантовой механики в двумерном пространстве [23]. Это становится очевидным, если генераторы $i\pi_x$ и $i\pi_y$ заменяются на обычные частные производные в уравнениях (29),(30). Таким образом, соотношения (23) - (28) представляют естественное обобщение виттеновской конструкции

для систем калибровочных уравнений в двумерном пространстве. Трехмерная модель суперсимметричной квантовой механики для систем калибровочных уравнений получается подобным образом из соотношений (17) - (19).

При применении такого подхода к заряженным частицам со спином 1/2 так называемый спин-флипп эффект имеет место при одновременном изменении координатной зависимости волновых функций, когда генераторы $\mathbf{Q}^{+}$ и $\mathbf{Q}^{-}$ (25) переводят состояния - суперпартнеры друг в друга:

$$\chi_{+} = \mathbf{Q}^{+}\chi_{-} \text{ и } \chi_{-} = \mathbf{Q}^{-}\chi_{+}.$$

Если $\chi_{-\sigma_3}$ - собственное состояние (27), то

$$\chi_{+\sigma_3} = [(i\sigma_3(\pi_x - \partial_y W) + (\pi_y + \partial_x W)]\chi_{-\sigma_3}. \qquad (32)$$

Нулевое собственное состояние $\chi_0 = \chi_{-\sigma_3}$ гамильтониана H^{-} должно аннигилироваться $\mathbf{Q}^{+}$,

$$\mathbf{Q}^{+}\chi_0 = \sigma_3\left\{[\partial_x - i(A_x + \partial_y W)] + (-i\partial_y - A_y + \partial_x W)\right\}\chi_0 = 0. \qquad (33)$$

Легко теперь видеть, что в адиабатическом представлении (2)-(5) мы приходим к хорошо известной ситуации, установленной [12]: основное состояние гамильтониана H^{-} (27) вырождено, причем число нулевых мод определяется индексом теоремы Атиа - Сингера

$$\chi_0(x,y) = f(x,y)P\exp\{-\sigma_3\int\int B_{xy}(x,y)dx\,dy\}, \qquad (34)$$

где матричный тензор B_{xy} представляется в виде

$$B_{xy}(x,y) = F_{xy}(x,y) - (\partial_x + i\partial_y)(\partial_x W(x,y) - i\partial_y W(x,y)) \qquad (35)$$

и функция $f(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial_x + i\sigma_3\partial_y)f(x,y) = 0.$$

Следовательно, в присутствии $W(x,y)$ функция $f(x,y)$ - целая функция $(x + i\sigma_3 y)$, как прежде [12] с $W(x,y) = 0$, и, как результат, также имеем вырождение основного состояния. Причем кратность вырождения нулевых мод для частицы, движущейся во внешнем калибровочном поле, связана с топологическим числом N, определяемым как поверхностный интеграл от матричного тензора $B_{xy}(x,y)$

$$\int\int B_{xy}(x,y)dx\,dy = 2\pi(N + \epsilon)\ ,\ \ 0 < \epsilon < 1. \qquad (36)$$

Здесь N определяет кратность вырождения собственных состояний нулевой энергии, а ϵ, по сути дела, - геометрическая фаза, которую можно назвать фазой Агаронова - Кашера. Если $\epsilon = 0$, поток, определяемый как разница обычного потока $\Phi = \int\int F_{xy}(x,y)dx\,dy$ и добавочного скалярного потенциала $\Phi - W = \int\int B_{xy}(x,y)dx\,dy$, квантован, и можно говорить о квантовом эффекте Холла и нестандартной статистике в двухатомных системах.

Теперь тривиально увидеть из (34) и (35), что присутствие скалярного потенциала может приводить к уменьшению или даже сокращению положительного индекса N и, как результат, к спонтанному нарушению суперсимметрии. Но факт присутствия или отсутствия вырождения вследствие суперсимметрии не исключает других геометрических фаз, в частности фаз Берри [1] или неадиабатических фаз Агаронова - Анандана [3, 22].

1.2 Геометрические фазы

Особый интерес представляют случаи пересечения потенциальных кривых, которые приводят к сингулярностям калибровочного векторного потенциала A. При наличии сингулярностей A возникают нетривиальные геометрические фазы в волновых функциях χ_0 и, следовательно, $\chi(R,E)$, определяемых при произвольных энергиях (15)

$$\delta = \frac{1}{2}\, i \oint_C A(R)\, dR. \tag{37}$$

Эти фазы должны быть приняты во внимание дополнительно к уже определенным геометрическим фазам.

Рассмотрим несколько простых примеров одномерной задачи. При $\alpha(R) = 0$ (или, что то же, $W = 0$) два суперсимметричных партнера одномерной задачи, как следует из (10), совпадают в отличие от N-мерной, $N \geq 2$, т.е. суперсимметрия в существенном определяется скалярным потенциалом $\alpha(R)$.

Пусть $\alpha(R) = -iA(R)$. Тогда

$$V^+(R) = 1/2[-A^2 - i\partial_R A]; \;\; V^-(R) = 1/2[-A^2 + i\partial_R A]\;. \tag{38}$$

Для удобства принято обозначение: $\partial_R = \frac{d}{dR}$. Уравнение (5) с учетом (38) перепишется следующим образом:

$$-1/2(\partial_R - iA(R))^2\chi + 1/2[-A^2 \mp i\partial_R A(R)]\chi = E\chi, \tag{39}$$

что соответствует уравнениям

$$-1/2\partial_R^2\chi + iA(R)\partial_R\chi = E\chi;$$

$$-1/2\partial_R^2\chi + i(\partial_R A(R) + A(R)\partial_R)\chi = E\chi, \tag{40}$$

которые представимы в факторизованном виде (8) с суперзарядами, определяемыми по формулам (9)

$$\begin{aligned} Q^- &= -\partial_R + iA(R) + \alpha(R) = -\partial_R; \\ Q^+ &= +\partial_R - iA(R) + \alpha(R) = \partial_R - 2iA(R). \end{aligned} \tag{41}$$

В одноканальном случае $A(R)$ чисто мнимо. Если $\chi_0(R)$ - основное состояние (40) гамильтониана H^-, то $Q^+(R)$ его должно уничтожить

$$Q^+\chi_0 = 0 \;\text{ или }\; (\partial_R - 2iA(R))\chi_0(R) = 0.$$

Отсюда имеем

$$\chi_0(R) = P\exp 2i\int_{R^\circ}^{R} A(R')dR' = P\exp -2\int_{R^\circ}^{R}\alpha(R')dR'. \tag{42}$$

Вспоминая определение калибровочного преобразования

$$U(R,R^\circ) = P\exp\int_{R^\circ}^{R} A(R')dR',$$

видим, что получили простой пример точно решаемой модели, когда калибровочное преобразование с точностью до коэффициента совпадает с функцией основного состояния $\chi_0(R)$.

При изучении свободного движения в N-мерном пространстве в сферической параметризации $(\mathbf{R}^1_+ \times \mathbf{S}^{N-1})$ введение геометрической фазы необходимо для учета дефекта параметризации пространства сферическими координатами и появления вследствие этого особой точки в начале координат. Уравнению (39) отвечает $A(R) = i\nu R^{-1}$ $(\nu = (N-1)/2)$, где в соответствии с (38)

$$V^+(R) = \nu(\nu-1)/R^2\;,\;\; V^-(R) = \nu(\nu+1)/R^2.$$

Фазы определяются согласно соотношению (37) :

$$\delta+ = (\pi\nu)/2\;;\;\; \delta- = \pi(\nu+1)/2.$$

В трехчастичной задаче, рассматриваемой при гиперсферической параметризации пространства, в точке тройного столкновения возникает аналогичный сингулярный потенциал и соответствующая фаза, отвечающие $\nu = 5/2$. Вообще говоря, сингулярности $A(R)$ не обязательно расположены в начале координат $R = 0$,и функциональная зависимость $A(R)$ может быть более сложной. Например, если

$$A(R) = i\prod_j f(R)/(R - ib_j) \tag{43}$$

с гладкой функцией $f(R)$, имеющей аналитическое продолжение в комплексную плоскость R, то

$$\delta = \frac{\pi i}{2}\sum_j f(ib_j). \tag{44}$$

При $f(R) = 2R$ или $f(R) = (R + ib_j)$ геометрическая фаза определяется следующим образом: $\delta = \pi\sum_j b_j$. Вообще говоря, R должно быть отмасштабировано и безразмерно. Тогда видно, что δ для четных значений b не меняет знак, для нечетных меняет, т.е. это - некоторый аналог эффекта Агаронова - Бома.

Вернемся к рассмотрению более сложной задачи, связанной с уравнениями (5), (6). Недиагональные элементы $A_{n,m}(R) =< n|i\nabla_R|m >$ реализуют переходы между различными собственными состояниями быстрого гамильтониана H^f. Приближение адиабатичности здесь неприменимо, в особенности, в окрестности точки пересечения термов. Перепишем матричные элементы наведенного векторного потенциала (6) в другом виде

$$A_{n,m}(R) = i\frac{< \Phi_n(R;r) \mid \partial_R H^f(R) \mid \Phi_m(R;r) >}{E_n(R) - E_m(R)}, \tag{45}$$

полученном в результате дифференцирования уравнения (3) по R и использования соотношения ортонормировки базисных функций Φ .

Вполне очевидно, что, когда термы $E_n(R)$ пересекаются или квазипересекаются в некоторых точках $R = R_m$, в матричных элементах $A_{nm}(R)$ возникают сингулярности, ответственные за геометрические фазы. Удобно ввести матрицу геометрических фазовых факторов

$$S_{n,m} = \exp Im(\oint A_{nm}(R)dR). \tag{46}$$

В нашем случае получаем

$$S_{n,m} = \exp \pi i\sum_m Res\frac{< \Phi_n(R;r) \mid \partial_R V(R,r) \mid \Phi_m(R;r) >}{E_n(R) - E_m(R)}. \tag{47}$$

Если неполный набор, Φ, принят во внимание, вектор состояний определяется на n- мерном подпространстве $(n+m) = M$- мерного гильбертова пространства, второй член в (7) не исчезает и индуцируются нетривиальные калибровочные поля. Тогда имеем фазы Берри

$$\delta_{ii} = \sum_{j\neq i}^{n}\oint A_{ij}A_{ji} = \sum_{j\neq i}^{n}\oint < \Phi_i \mid \partial_R \mid \Phi_j >< \Phi_j \mid \partial_R \mid \Phi_i > \tag{48}$$

аналогично [1]. Появляются также геометрические фазы, связанные с недиагональными элементами эффективной матрицы вектор - потенциалов $\tilde{A}_{ik}(R) = A_{ij}(R)A_{jk}(R)$. В этом случае лучше использовать геометрическую "S - матрицу" (46)

$$S_{ik} = \exp \pi i\sum_{j\neq i,k}^{n} Res\ \frac{< \Phi_i(R;r) \mid \partial_R H^f(R;r) \mid \Phi_j(R;r) >}{E_i(R) - E_j(R)} \times$$
$$\times\ \frac{< \Phi_j(R;r) \mid \partial_R H^f(R;r) \mid \Phi_k(R;r) >}{E_j(R) - E_k(R)}. \tag{49}$$

В последнем случае возможно пересечение даже трех термов в одной точке. Итак, отметим, неабелевская, неабатическая фаза проявляется даже тогда, когда только радиальная зависимость имеет место. Причина заключается в наличии $A(R)$ сингулярностей. Калибровочное преобразование $U(R, R^\circ) = \int_{R^\circ}^{R} A(R')dR'$ не исключает их, и они проявляются в скалярном потенциале аналогично неисчезающему вихрю векторного потенциала в N - мерном пространстве медленных переменных.

При сведении многоканальной системы калибровочных уравнений к системе из конечного числа может быть получена система несвязанных эффективных уравнений [26] вида

$$\{\mu(R)\frac{d}{dR}\mu^{-1}(R)\frac{d}{dr} + \mu(R)(P^2 - \bar{V}(R))\}\Psi(R) = 0 \tag{50}$$

с ненулевой диагональной связностью

$$\bar{A} = diag\bar{A}(R) = 1/2\mu(R)\frac{d}{dR}\mu^{-1}(R),$$

где

$$\mu^{-1}(R) = 1 - (2M)^{-1}\sum_j^N \frac{A_{ij}(R)A_{ji}(R)}{E_i(R) - E_J(R)} \tag{51}$$

Вполне очевидна применимость здесь формул (48), (49).

При отсутствии сингулярного поведения $\mu^{-1}(R)$, что справедливо вдали от пересечения термов, уравнения (50) с помощью преобразования Лиувилля представляются в виде (1), и для них, как и для уравнения Шредингера, можно конструировать точно решаемые модели, следовательно, получать решения в замкнутом аналитическом виде.

2 Обобщенные алгебраические преобразования Баргмана - Дарбу

Осуществим алгебраические преобразования Дарбу - Крама - Крейна и Баргмана для уравнений более общего вида (1), чем уравнения Шредингера,

$$-\frac{d^2\psi(r)}{dr^2}+V(r)\psi(r)+\frac{l(l+1)}{r^2}\psi(r)=E\psi(r)\,. \tag{52}$$

Соответствующие алгебраические преобразования для уравнений Шредингера как с переменными значениями энергии E и орбитального момента l, так и с фиксированными E и l естественным образом получаются как частные случаи при определенном выборе регулярной за исключением точки $r=0$ функции $h(r)$.

2.1 Преобразования Дарбу

Будем использовать технику, представленную в работе [20]. Решение уравнения (1) с некоторым первоначально неизвестным потенциалом $V(R)$ будем искать через известные решения уравнения (1) с известным потенциалом $V^\circ(R)$ в таком же виде

$$\phi(r,E,\lambda)=y(r)W\{y^\circ(r),\phi^\circ(r,E,\lambda)\}, \tag{53}$$

где $W\{y^\circ(r),\phi^\circ(r,E,\lambda)\}$ - вронскиан функций y° и ϕ°:

$$W\{y^\circ(r),\phi^\circ(r)\}=y^\circ(r)d\phi^\circ(r)/dr-dy^\circ(r)/dr\;\phi^\circ(r),$$

как и для обычного уравнения Шредингера (52). Только теперь функции $y(r)$ и $y^\circ(r)$ удовлетворяют уравнению (1) с $V(R)$ и $V^\circ(R)$, соответственно, при некотором выделенном значении $\gamma^2=\gamma'^2$, которое может отвечать связанному состоянию. В уравнении (1) γ^2 имеет смысл энергии с коэффициентом $h(r)$, зависящим от координатной переменной. При

этом функция $h(r)$ должна удовлетворять общим требованиям, предъявляемым к потенциальной функции в теории рассеяния [27]. Домножая уравнение (1)для $y^\circ(r)$ с известным потенциалом $V^\circ(R)$ на $\phi^\circ(\gamma,r)$ - функцию при произвольном γ, а уравнение для $\phi^\circ(\gamma,r)$ - на $y^\circ(r)$ и вычитая результирующие выражения, получим

$$dW(r)/dr=h(r)(\gamma'^2-\gamma^2)y^\circ(r)\phi^\circ(\gamma,r). \tag{54}$$

Найдем вторую производную $d^2\phi(\gamma,r)/dr^2$, используя определение (53) и соотношение (54),

$$\frac{d^2\phi(\gamma,r)}{dr^2}=\frac{d^2y(r)}{dr^2}W\{y^\circ(r),\phi^\circ(\gamma,r)\}\;+\;y(r)\frac{d[h(r)y^\circ(r),\phi^\circ(\gamma,r)]}{dr}$$
$$+\;2\frac{dy(r)}{dr}h(r)y^\circ(r)\phi^\circ(\gamma,r).$$

Принимая во внимание уравнение (1) для $y(r)$ и осуществляя необходимые преобразования, получим

$$\frac{d^2\phi(\gamma,r)}{dr^2}=[V(r)-\gamma'^2h(r])y(r)W\{y^\circ(r),\phi^\circ(\gamma,r)\}$$
$$+2\frac{d[y(r)y^\circ(r)]}{dr}h(r)\phi^\circ(\gamma,r)+\frac{dh(r)}{dr}y(r)y^\circ(r)\phi^\circ(\gamma,r)$$
$$+h(r)y(r)W\{y^\circ(r),\phi^\circ(\gamma,r)\}.$$

Используя определение (53), перепишем это соотношение в виде

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-V(r)\;+\;h(r)\gamma^2\right)\phi(\gamma,r)=$$
$$2h(r)\frac{dy(r)y^\circ(r)}{dr}\phi^\circ(\gamma,r)\;+\;y(r)y^\circ(r)\frac{dh(r)}{dr}\phi^\circ(\gamma,r). \tag{55}$$

Вполне очевидно, условие обращения правой части тождества (55) в нуль

$$\frac{d}{dr}\ln y(r)y^\circ(r)=\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\ln h(r) \tag{56}$$

приводит к тому факту, что функция $\phi(\gamma,r)$, определяемая соотношением(53), удовлетворяет уравнению (1). Условие (56) соответствует

$$y(r)=\frac{1}{\sqrt{h(r)}y^\circ(r)}. \tag{57}$$

Тогда с учетом определения (53) решение уравнения (1) при произвольном значении γ^2 запишется следующим образом:

$$\phi(\gamma,r)=\frac{1}{\sqrt{h(r)}y^\circ(r)}W\{y^\circ(r),\phi^\circ(\gamma,r)\}. \qquad (58)$$

Найдем теперь в явном виде выражение для потенциала $V(r)$ через известные функции $h(r), y^\circ(r), V^\circ(r)$. Используем соотношение (57) в уравнении (1) для функции $y(r)$

$$V(r)=\frac{d^2y(r)/dr^2}{y(r)}+h(r)\gamma'^2=2\Big(\frac{dy^\circ(r)/dr}{y^\circ(r)}\Big)^2-\frac{d^2y^\circ(r)/dr^2}{y^\circ(r)}$$
$$+\frac{dy^\circ(r)/dr}{y^\circ(r)}\frac{dh(r)/dr}{h(r)}+h\gamma'^2-\frac{1}{2}\frac{d^2h(r)/dr^2}{h(r)}+\frac{3}{4}\Big(\frac{dh(r)/dr}{h(r)}\Big)^2.$$

Преобразовывая это выражение с учетом равенств

$$2\Big(\frac{dy^\circ(r)/dr}{y^\circ(r)}\Big)^2-\frac{d^2y^\circ(r)/dr^2}{y^\circ(r)}=-2\Big(\frac{dy^\circ(r)/dr}{y^\circ(r)}\Big)'+\frac{d^2y^\circ(r)/dr^2}{y^\circ(r)},$$

$$\frac{d^2y^\circ(r)/dr^2}{y^\circ(r)}=V^\circ(r)-h(r)\gamma'^2,$$

получим окончательно

$$V(r)=V^\circ(r)-2\sqrt{h(r)}\frac{d}{dr}\Big[\frac{1}{\sqrt{h(r)}}\frac{d}{dr}\ln y^\circ(r)\Big]+\sqrt{h(r)}\frac{d^2}{dr^2}\frac{1}{\sqrt{h(r)}}. \qquad (59)$$

Легко теперь показать, как соотношения (58), (59) переходят в соответствующие соотношения [20] для преобразований Дарбу в (λ^2,E) - плоскости. В случае, когда значения энергии E и орбитального момента l изменяются вдоль произвольных прямых линий в (λ^2,E) - плоскости $(\lambda=l+1/2)$, т.е. выполняется условие

$$aE+bl(l+1)=aE^\circ+bl^\circ(l^\circ+1)=const, \qquad (60)$$

радиальное уравнение Шредингера (52) может быть записано в виде [31]:

$$-\Big[\frac{d^2}{dr^2}+V(r)+\frac{l^\circ(l^\circ+1)}{r^2}-E^\circ\Big]\psi(r,E,l)=\gamma^2h(r)\psi(r,E,l). \qquad (61)$$

Здесь E° и l°- некоторые фиксированные значения энергии и орбитального углового момента. Легко проверить, что при этом справедливо равенство

$$\gamma^2h(r)=(E-E^\circ)+\frac{\lambda^{\circ2}-\lambda^2}{r^2}. \qquad (62)$$

Полагая

$$h(r)=\frac{a+br^2}{ar^2}, \qquad (63)$$

из соотношений (59) и (58) тотчас получаем аналитические соотношения связи

$$\phi(r,E,\lambda)=\frac{r}{y^\circ(r)\sqrt{1+\alpha r^2}}W\{y^\circ(r),\phi^\circ(r,E,\lambda)\}; \qquad (64)$$

$$V(r)=V^\circ(r)-2\sqrt{\frac{\alpha r^2+1}{r^2}}\frac{d}{dr}\Big[\sqrt{\frac{r^2}{\alpha r^2+1}}\frac{d}{dr}\ln y^\circ(r)\Big]-\frac{3r}{(1+\alpha r^2)^2}. \qquad (65)$$

с $\alpha=b/a$. Используя (63) и (60) в (62), γ^2 можно представить или как функцию E, или как функцию λ^2, в зависимости от того, какая из переменных выбирается независимой на прямой в (λ^2,E) - плоскости, определяемой параметрами a и b

$$\gamma^2(E)=(E-E^\circ)\frac{a}{b};\quad \gamma^2(\lambda)=(\lambda^{\circ2}-\lambda^2). \qquad (66)$$

В статьях [29], [30] функция $h(r)$ определена в виде:

$$h(r)=\frac{a+br^2}{r^2}. \qquad (67)$$

Тогда, как следует из (62),

$$\gamma^2(E)=(E-E^\circ)\frac{1}{b};\quad \gamma^2(\lambda)=(\lambda^{\circ2}-\lambda^2)\frac{1}{a}.$$

Окончательный результат, однако, не зависит от выбора $h(r)$ в виде (63), (67) или

$$h(r)=\frac{a+br^2}{br^2},$$

если проведено согласование с (62) и (60).

Рассмотрим случай фиксированного $l, \lambda^2=\lambda^{\circ2}$. Из соотношения (62) следует равенство $\gamma^2h(r)=(E-E^\circ)$. Сравнивая его с первым из (66), получаем $h(r)=b/a=const$. С таким $h(r)$ выражения для потенциала и решений (59) и (58) переходят в соотношения

$$V(r)=V^\circ(r)-2\frac{d^2}{dr^2}\ln y^\circ(r). \qquad (68)$$

$$\phi(r,E)=\frac{1}{y^\circ(r)}W\{y^\circ(r),\phi^\circ(r,E)\}, \qquad (69)$$

при $\alpha = \infty$ и условии $y^\circ(r) \neq 0$ на отрезке $a < r < b$, полученные из обычных преобразований Дарбу - Крама - Крейна. В случае фиксированной энергии - $E = E^\circ, h(r) = 1/r^2$. Подставляя это $h(r)$ в (59) и (58), получаем преобразования Дарбу

$$V(r) = V^\circ(r) - \frac{2}{r}\left[\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \ln y^\circ(r)\right], \tag{70}$$

$$\phi(r,\lambda) = \frac{r}{y^\circ(r)} W\{y^\circ(r), \phi^\circ(r,\lambda)\}, \text{ при } \lambda \neq \lambda' \tag{71}$$

для уравнения Шредингера при $E = const$.

Как частные случаи различного выбора $h(r)$ могут быть рассмотрены варианты преобразований при наличии кулоновских сил и кулоновской константы связи "C". Полагая при $l = const$, например $h(r) = (a + br)/r$, при условии

$$aE + bc = aE^\circ + bc^\circ = const,$$

из сотношений (59) и (58) тотчас получаем аналитические выражения связи для потенциала и решений.

Полагая $h(r) = r^{-1}$, получаем точно решаемые модели, исследованные в [28], с переменным электрическим зарядом при фиксированных угловом моменте и энергии.

2.2 Преобразования Баргмана

Будем искать решения уравнения (1) в более общем по сравнению с (53) виде:

$$\phi(\gamma, r) = \phi^\circ(\gamma, r) - \sum_\mu^M y_\mu(r) W\{\phi^\circ(\gamma_\mu, r), \phi^\circ(\gamma, r)\}, \tag{72}$$

где функции

$$y_\mu(r) \equiv y(r, \gamma_\mu) = C_\mu \phi(\gamma\mu, r)\,.$$

Найдем условия, при которых функция $\phi(\gamma, r)$, определяемая (72), удовлетворяет уравнению (1). Процедура аналогична предложенной в [19, 21]. Дважды продифференцируем (72). Учитывая (54), получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi(\gamma,r)}{dr^2} &= \frac{d^2\phi^\circ(\gamma,r)}{dr^2} - \sum_\mu^M\Big\{\frac{d^2 y_\mu(r)}{dr^2} W\{\phi^\circ(\gamma_\mu,r), \phi^\circ(\gamma,r)\} + \\ &+ y_\mu(r)\frac{d[h(r)\phi^\circ(\gamma_\mu,r)\phi^\circ(\gamma,r)]}{dr} + 2\frac{dy_\mu(r)}{dr} h(r)\phi^\circ(\gamma_\mu,r)\phi^\circ(\gamma,r)\Big\}.\end{aligned}$$

Преобразуем это выражение с учетом уравнения (1) для $y_\mu(r)$ и определения (72)

$$\begin{aligned}\Big(\frac{d^2}{dr^2} - V(r) + h(r)\gamma^2\Big)\phi(\gamma,r) &= [-V(r) + V^\circ(r)]\phi^\circ(\gamma,r) \\ -2\sum_\mu^M\Big\{h(r)\frac{dy_\mu(r)\phi^\circ(\gamma_\mu,r)}{dr} &+ y_\mu(r)\phi^\circ(\gamma_\mu,r)\frac{dh(r)}{dr}\Big\}\phi^\circ(\gamma,r).\end{aligned} \tag{73}$$

Функция $\phi(\gamma, r)$ удовлетворяет уравнению (1) при обращении правой части последнего соотношения в нуль. Это условие эквивалентно:

$$V(r) = V^\circ(r) - \sum_\mu^M\Big\{2h(r)\frac{dy_\mu(r)\phi^\circ(\gamma_\mu,r)}{dr} + y_\mu(r)\phi^\circ(\gamma_\mu,r)\frac{dh(r)}{dr}\Big\}. \tag{74}$$

Решение $y_\mu(r)$ с потенциалом (74) определяется из (72) с использованием связи $y_\mu(r) = C_\mu\phi(\gamma\mu, r)$

$$y_\mu(r) = \sum_\nu^M C_\nu \phi^\circ(\gamma_\nu, r) P^{-1}_{\nu\mu}(r), \tag{75}$$

где

$$P_{\mu\nu}(r) = \delta_{\mu\nu} + C_\nu W\{\phi^\circ(\gamma_\mu, r), \phi^\circ(\gamma_\nu, r)\}.$$

Подстановка (75) в (74) и (72) позволяет дать определения потенциала и соответствующих ему решений через известные функции $h(r)$ и решения $\phi^\circ(\gamma, r)$,

$$V(r) = V^\circ(r) - 2\sqrt{h(r)}\frac{d}{dr}\Big[\frac{1}{\sqrt{h(r)}}\frac{d}{dr}\ln\det P(r)\Big] \quad , \tag{76}$$

$$\phi(\gamma,r) = \phi^\circ(\gamma,r) - \sum_\mu^M\sum_\nu^M C_\nu\phi^\circ(\gamma_\nu,r)P^{-1}_{\nu\mu}(r)W\{\phi^\circ(\gamma_\mu,r), \phi^\circ(\gamma,r)\}, \tag{77}$$

Легко теперь, используя общие формулы (76) и (77) для уравнений (1), получить преобразования баргмановского типа

$$V(r) = V^\circ(r) - 2\frac{\sqrt{(1+\alpha r^2)}}{r}\frac{d}{dr}\Big[\frac{r}{\sqrt{(1+\alpha r^2)}}\frac{d}{dr}\ln\det P(r)\Big]; \tag{78}$$

$$\phi_l(r,E) = \phi_l^\circ(r,E) - \sum_\mu^M \sum_\nu^M C_\nu \phi^\circ(r,E_\nu,\lambda_\nu) P_{\nu\mu}^{-1}(r) \frac{W\{\phi^\circ(r,E_\mu,\lambda_\mu),\phi^\circ(r,E,\lambda)\}}{E_\mu - E_\nu} \tag{79}$$

для потенциалов и решений уравнения Шредингера (52) и (61) с переменными значениями энергии и орбитального момента вдоль произвольных прямых линий в (λ^2, E) - плоскости [19], [21]. Для этого достаточно принять в (76) и (77) $h(r)$ из (63). Преобразования баргмановского типа конструировались также в работах [29], [30]. В первой из них, как и в [19], [21] осуществлены алгебраические преобразования, вторая основана на общей формулировке обратной задачи [31], [32] при переменных l и E. Так же просто, фиксируя угловой момент l или энергию E, получить из соотношений (76) и (77) выражения Баргмана для задач с фиксированными l и E, полагая $h(r) = b/a$ и $h(r) = 1/r^2$, соответственно.

Подход Гельфанда - Левитана или Марченко с вырожденным ядром оператора обобщенного сдвига $K(r,r')$ получается при надлежащем выборе граничных условий. В подходе Гельфанда - Левитана, разработанном для регулярных решений, вронскиан в уравнениях (76), (77) выражается следующим образом:

$$W\{\phi^\circ(\gamma_\mu,r),\phi^\circ(\gamma,r)\} = (\gamma_\mu^2 - \gamma^2) \int_0^r h(r)\phi^\circ(\gamma_\mu,r')\phi^\circ(\gamma,r')dr'. \tag{80}$$

В подходе Марченко, использующем решения Йоста, вронскиан записывается в виде

$$W\{f^\circ(\gamma_\mu,r),f^\circ(\gamma,r)\} = (\gamma_\mu^2 - \gamma^2) \int_r^\infty h(r)f^\circ(\gamma_\mu,r')f^\circ(\gamma,r')dr'. \tag{81}$$

Учитывая соотношения (80) или (81) в (77), получим

$$\phi(\gamma,r) = \phi^\circ(\gamma,r) - \sum_\mu^M \sum_\nu^M C_\nu \phi^\circ(\gamma_\nu,r) P_{\nu\mu}^{-1}(r)(\gamma_\mu^2 - \gamma^2) \int_{0(r)}^{r(\infty} h(r)\phi^\circ(\gamma_\mu,r')\phi^\circ(\gamma,r')dr', \tag{82}$$

где $P_{\nu\mu}(r)$ тоже перепишем в интегральном виде

$$P_{\nu\mu}(r) = \delta_{\nu\mu} + C_\mu(\gamma_\mu^2 - \gamma^2) \int_{0(r)}^{r(\infty} h(r)\phi^\circ(\gamma_\mu,r')\phi^\circ(\gamma,r')dr'.$$

Теперь вполне очевидно, что в соотношениях (72), (75) - (77) под ϕ подразумеваются любые решения: регулярные, йостовские, задачи Штурма-Лиувилля, в общем, произвольные до тех пор, пока не выбраны определенные граничные условия задачи.

Заключение

Дано обобщение техники алгебраических преобразований для уравнений (1) с функциональной зависимостью от координаты в слагаемом с энергией дополнительно к потенциальной функции. В замкнутом виде получены соотношения связи для потенциалов и соответствующих им решений, обощающие соответствующие формулы баргмановского подхода. Частные случаи такого подхода - преобразования с переменными и фиксированными значениями энергии, орбитального момента и кулоновской константы связи.

Полученные в рамках суперсимметричного подхода соотношения для уравнений с калибровочным потенциалом позволяют генерировать новый класс точно решаемых моделей. Особый интерес представляет развитие предложенного подхода для конструирования моделей с сингулярными потенциалами и нетривиальными топологическими фазами.

Рассмотренный подход открывает новые возможности для построения точно решаемых моделей, полезных для интерпретации особенностей поведения потенциальных кривых; связывает их с современной геометрической трактовкой теории рассеяния в терминах расслоенных гильбертовых пространств. Хотелось бы отметить, что при наличии суперсимметрии для систем калибровочных уравнений, описывающих медленную динамику квантовомеханических систем, возникают геометрические фазы и возможны топологические эффекты. Неадиабатические геометрические фазы, дополнительные к фазам Агаронова, Анандана возникают из-за сингулярностей индуцированного оператора связности A в точках пересечения термов.

References

[1] Berry M.// Proc. R.Soc. Lond. 1984. T.A392. C.45.

[2] Wilczek F., Zee A.// Phys.Rev.Lett. 1984. V.52. P.2111.

[3] Aharonov Y., Anandan J.// Phys.Rev. Lett. 1987. V.58. P.1593.

[4] Mead C.A.// Phys.Rev.Lett.//1987. V.59. P.161; J.Chem.Phys.//1980. V.49. P.23.

[5] Semenoff G.W.// Phys.Rev.Lett., 1986. V.56. P.1195.

[6] Kohmoto M.// Annals of Phys. 1985. V.160. P.343.

[7] Sukumar C.V.// J.Phys. 1985. V.A18. P.L.57; J.Phys. 1985. V.A18. P.2917; P.2937.

[8] Генденштейн Л.// Письма ЖЭТФ. 1983. Т.38. С.299.

[9] Camboa J., Zanelli J.// J.Phys. 1988. V.A21. P.L.283.

[10] Сузько А.А.// ЯФ. 1992. Т.55. С.2161.

[11] Suzko A.A.// Supersymmetry of gauge equations and geometric nonadiabatic phases. Препринт E4-282, Dubha, 1992, 11p.

[12] Aharonov Y., Casher A.// Phys.Rev. 1979. V.A19. P.2461.

[13] Dubovik V.M., Markovski B.L., Suzko A.A., Vinitsky S.I.// Phys.Lett. 1989. V.A142. P.133.

[14] Виницкий С.И., Марковский Б.Л., Сузько А.А.// ЯФ. 1992. Т.55. 669;

[15] Vinitsky S.I., Suzko A.A., Markovski B.L., Kadomtsev M.B., Dubovik V.M., in Proc.Intern.Seminar "Topological Phases in Quantum Theory", Dubna. Sep. 1988. Singapore: World Sci.1989. P.173.

[16] Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980. 408с.; 2-ое изд. New York: Springer Verlag, 1990.

[17] Захарьев Б.Н., Сузько А.А. Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. М.: Энергоатомиздат, 1985. 224с.; 2-ое изд. New York: Springer Verlag, 1990.

[18] Виницкий С.И., Сузько А.А.// ЯФ. 1990. Т.52. С.686.

[19] Suzko A.A.// Physica Scripta. 1985. V.31, P.447.

[20] Rudyak B.V., Suzko A.A., Zakhariev B.N.// Physica Scripta. 1984. V.29. P.515.

[21] Suzko A.A.// Physica Scripta 1986. V.34. P.5.

[22] Anandan J.// Phys.Lett. 1988. V.A133. P.171.

[23] Ui H.// Progr.Theor.Phys. 1984. V.72. P.813.

[24] Генденштейн Л.// Письма ЖЭТФ. 1984. Т.39. С.234.

[25] Witten E.// Nucl.Phys. 1981. V.B185. 513; 1982. V.B202. P.253.

[26] Виницкий С.И.// Автореферат диссерт. на соискание уч.степени докт. физ.-мат. наук. 4-91-364, Дубна: ОИЯИ. 1991. с.12.

[27] Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969. 608с.; 2-е изд. на англ. New York: Springer Verlag, 1982.

[28] Поплавский И.В.// Укр.Физ.Журн. 1983. т.28. С.1631; 1984. т.29. с.977; С.1148.

[29] Schnizer W.A., Leeb H. in Proc.Intern. Conf. on Inverse Problems. p.455.

[30] Rudyak B.V., Zakhariev B.N.// Inverse Problems. 1987. V.3. P.125.

[31] Cornille H.// J.Math.Phys., 1976. V.17. P.2143.

[32] Coudray C., Coz. M.// Ann.Phys., 1970, V.61, P.488.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 августа 1992 года.

Сузько А.А. Р4-92-367

Суперсимметрия, геометрические неадиабатические фазы, аналитические решения в двухатомных системах

Вводятся неадиабатические геометрические фазы дополнительно к фазам Агаронова - Анандана, возникающие вследствие сингулярностей недиагональных элементов наведенного оператора связности в точках пересечения термов. Исследуются проблемы суперсимметрии систем калибровочных уравнений, связанных с введением скалярных потенциалов и геометрическими фазами. Разрабатываются обобщенные алгебраические преобразования Баргмана, Дарбу.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод автора

Suzko A.A. P4-92-367

Supersymmetry, Geometric Nonadiabatic Phases, Exact Solutions in Diatomic Systems

It is shown that the nonadiabatic geometric phases are generated in addition to the Aharonov - Anandan ones. The extra geometric phases are produced by A-singularities of the nondiagonal elements of the connection operator A arising due to crossing of potential curves. The problems are investigated of the supersymmetric extension for the system of gauge equations connected with introducing and changing scalar and vector potentials and geometric phases. Generalised Bargmann, Darboux algebraic transformations are elaborated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992