объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4-92-32

А.А.Сузько

ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ ТРЕХЧАСТИЧНЫЕ МОДЕЛИ С ДВУХЦЕНТРОВЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1992

Сузько А.А. Р4-92-32

Точно решаемые трехчастичные модели с двухцентровыми потенциалами

Разработаны точно решаемые модели трехчастичной задачи рассеяния в адиабатическом подходе на основе алгебраических обобщенных преобразований Баргмана — Дарбу. В замкнутом виде построен класс двухцентровых сфероидальных потенциалов и соответствующих им аналитических решений в задачах рассеяния для быстрой подсистемы с параметрической зависимостью от адиабатической переменной. Дана суперсимметричная трактовка адиабатических уравнений калибровочного типа, позволяющая генерировать новый класс точно решаемых моделей в задаче трех тел. Построены аналитические решения для медленной подсистемы уравнений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Suzko A.A. P4-92-32

Exactly Solvable Three-Body Models with Two-Center Potentials

Exactly solvable models of the three-particle scattering problem in the adiabatic approach are developed on the basis of algebraic generalized Bargmann — Darboux transformations. A class of two-center spheroidal potentials and the corresponding analytic solutions in the scattering problem for a fast subsystem which depends on the adiabatic variable as a parameter are constructed in a losed form. Supersymmetric treatment of gauge adiabatic equations is given which allows generation of a new class of exactly solvable models in the three-body problem. Analytic solutions are constructed for a slow subsystem of equations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992

I. Введение

Для изучения процессов взаимодействия в системе трех частиц М.Борном было предложено использовать метод адиабатического разложения [I]. Решения двухцентровых задач могут служить адиабатическим базисом [2], по которому разлагаются решения более сложных задач при описании быстрого движения легкой частицы в поле двух тяжелых [3]. Сюда же относятся задачи о столкновении атомов [4] и мезоатомов [5]. Последнюю можно рассматривать как практически важный случай более общей постановки трехчастичной задачи в глобальном адиабатическом подходе [6,7]. В ядерной физике существует класс задач о квантово-механическом рассеянии в произвольном аксиально-симметричном поле, для которого уравнение Шредингера допускает разделение переменных в сфероидальных координатах [8]. Все это делает привлекательной возможность использования различных типов адиабатических базисов при решении прямой и обратной трехчастичных или многомерных задач рассеяния и построении соответствующих точно решаемых моделей. В работе [9] на основе метода обратной задачи в адиабатическом подходе разработан способ конструирования многопараметрических точно решаемых моделей. Этот метод можно применить к задачам рассеяния на аксиально-симметричном двухцентровом потенциале, в котором расстояние между двумя взаимодействующими частицами, помещенными в центрах сфероида, имеет смысл адиабатической переменной.

В данной работе разработаны точно решаемые модели для задач рассеяния со сфероидальными потенциалами на основе обобщенных преобразований Баргмана - Дарбу [10,11] как для системы "медленных" уравнений [12], так и для параметрической "быстрой" задачи с аксиально-симметричным потенциалом [13]. Здесь рассмотрены также геометрические аспекты адиабатического подхода, связанные с удлинением производной по радиальной медленной переменной. До недавнего времени с геометрической точки зрения [14] в задачах трех тел изучалась лишь вращательная связь, возникающая в результате удлинения производной по угловым медленным переменным [15].

2. Постановка задачи

а) Система радиальных уравнений

Пусть исходное уравнение Шредингера представимо в виде: $(\hbar = \mu = 1)$

$$\left[-\frac{1}{2}\nabla_{\bar R}^2 + H^f(R;\bar r) + V(R)\right]\Psi(\bar R,\bar r) = E\Psi(\bar R,r). \quad (1)$$

Причем взаимодействие зависит от радиуса-вектора $\bar r$, определяющего положение рассеиваемой частицы и расстояния R между центрами эллипсоида (двумя тяжелыми частицами), однако не зависит от углов радиуса-вектора $\bar R$. Разложим, как в обычном сферически-симметричном случае, полную волновую функцию $\Psi(\bar R,\bar r)$ по сферическим волнам

$$\Psi(\bar R,\bar r) = \sum_{LM} \chi^{LM}(R,\bar r)\, Y^{LM}(\theta,\varphi). \quad (2)$$

Тогда для коэффициентов разложения $\chi^{LM}(R,\bar r)$ получим уравнение в частных производных

$$\left[-\frac{1}{2}\partial_R^2 + H^f(R,\bar r) + V(R) + \frac{L(L+1)}{R^2} - E\right]\chi^{LM}(R,\bar r) = 0. \quad (3)$$

Разложим парциальную волновую функцию $\chi^{LM}(R,\bar r)$ по полному набору каналовых состояний $\Psi_i(R,\bar r)$, являющихся решениями задачи для оператора быстрого движения $H^f(R,\bar r)$

$$\chi^{LM}(R,\bar r) = \sum_i\!\!\!\!\!\!\int \Psi_i(R,\bar r)\,\chi_i^{LM}(R). \quad (4)$$

Подстановка (4) в (3) и усреднение по быстрым переменным $\bar r$ базиса $\Psi_i(R,\bar r)$ приводит к системе радиальных уравнений с удлиненной производной для коэффициентов разложения $\chi(R) = \chi_i^{LM}(R)$, описывающих медленное движение частиц (центров):

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\partial_R + iA(R)\right)^2 + \frac{L(L+1)}{R^2} + \mathcal{V}(R) - P^2\right]\chi(R,P) = 0. \quad (5)$$

Эффективный скалярный потенциал $\mathcal{V}(R) = \mathcal{V}^f(R) + \mathcal{V}^s(R) - \mathcal{E}_i(\mathring{R})$ в такой постановке - диагональная матрица. Элементы $\mathcal{V}^f(R)$ совпадают с собственными значениями - термами $\mathcal{E}_i(R)$ мгновенного гамильтониана $H^f(R,\bar r)$.

$$U^f_{ij}(R) = \langle \Psi_i(R,\bar{r}) | H^f(R,\bar{r}) | \Psi_j(R,\bar{r}) \rangle \equiv \mathcal{E}_i(R)\delta_{ij}. \quad (6а)$$

Элементы диагональной матрицы $U^s(R)$ определяются сферически-симметричным потенциалом взаимодействия между частицами в центрах эллипсоида

$$U^s_{ij}(R) = \langle \Psi_i(R,\bar{r}) | V(R) | \Psi_j(R,\bar{r}) \rangle = V(R)\delta_{ij}. \quad (6б)$$

Здесь использована ортогональность функций базиса $\Psi_i(R,\bar{r})$(I4) [8]. В системе уравнений (5) $A(R)$ имеет смысл радиальной части эффективного векторного потенциала $\bar{A}(\bar{R})$, образованной функциями базиса

$$A_{ij}(R) = -i \langle \Psi_i(R,\bar{r}) | \partial_R | \Psi_j(R,\bar{r}) \rangle . \quad (7)$$

В более общей постановке, когда быстрый гамильтониан H^f параметрически зависит от радиуса-вектора $\bar{R}$, возникает угловая часть связности $\bar{A}(\bar{R})$, анализ которой проведен в работе [I5].

б) Адиабатический двухцентровый базис

Пусть $H^f(R,\bar{r})$ определяется произвольным аксиально-симметричным потенциалом

$$V(R,\bar{r}) = \frac{2}{R^2}\,\frac{a(\xi)+b(\eta)}{(\xi^2-\eta^2)}, \quad (8)$$

допускающим разделение переменных в вытянутых сфероидальных координатах $\xi=(r_1+r_2)/R$ $(1\le\xi<\infty)$, $\eta=(r_1-r_2)/R$ $(-1\le\eta\le 1)$, $\varphi = \mathrm{arctg}(y/x)$ $(0\le\varphi\le 2\pi)$, где r_1 и r_2 – расстояния частицы от центров I и 2, ось z направлена от центра I к центру 2. Оператор Лапласа с помощью коэффициентов Ламе в вытянутых сфероидальных координатах записывается следующим образом:

$$\Delta_{\bar{r}} = \frac{4}{R^2(\xi^2-\eta^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2-1)\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{(\xi^2-\eta^2)}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

Представим волновую функцию для уравнения Шредингера с потенциалом (8)

$$\left[-\frac{1}{2}\Delta_{\bar{r}} + V(R,\bar{r})\right]\Psi(R,\bar{r}) = \mathcal{E}(R)\Psi(R,\bar{r}) \quad (9)$$

в виде

$$\Psi(R,\bar{r}) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,X(\xi)Y(\eta) \quad (I0)$$

($m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ – азимутальное число). Подставим (8) в (9). Тогда вследствие разделения переменных имеем систему уравнений для квазирадиальной и квазиугловой базисных функций

$$\frac{d}{d\xi}(\xi^2-1)\frac{dX}{d\xi} + \left[K^2(R)(\xi^2-1) - a(\xi) - \frac{m^2}{(\xi^2-1)} - \lambda\right]X = 0; \quad (II)$$

$$\frac{d}{d\eta}(1-\eta^2)\frac{dY}{d\eta} + \left[K^2(R)(1-\eta^2) - b(\eta) - \frac{m^2}{(1-\eta^2)} + \lambda\right]Y = 0, \quad (I2)$$

где $K^2(R) = ER^2/2$, $E = k^2/2$, λ – константа разделения. Свойства и поведение функций X и Y, а следовательно, функций $\Psi(R,\bar{r})$ (I0) двухцентровой задачи изучены в [8]. Решение задачи Штурма – Лиувилля для углового уравнения (I2) приводит к набору вещественных собственных значений λ_{nm} и соответствующих собственных функций $Y_{nm}(\eta)$, образующих полную ортонормированную систему на отрезке $[-1,1]$. Индекс n = 0,I,2,... указывает число нулей $Y_{nm}(\eta)$ внутри этого отрезка. Квазирадиальные функции $X_{nm}(\xi)$, соответствующие константе разделения λ_{nm}, удовлетворяют граничным условиям конечности при $\xi=1$

$$\lim_{\xi\to 1} X(\lambda,\xi)(\xi^2-1)^{-m/2}=1 \tag{I3а}$$

и имеют асимптотику при $\xi\to\infty$

$$X_{nm}(\xi)=\left(\frac{kR}{2}\xi\right)^{-1}\sin\left[\frac{kR}{2}\xi+\Delta_{nm}-\frac{\pi}{2}(n+m)\right]+O(\xi^{-2}). \tag{I3б}$$

Нормировка функций Ψ_{nm} (I0), соответствующих различным значениям энергии и индексов, имеет при этом вид

$$\int\Psi^*_{nm}(R,\bar r,k)\Psi_{n'm'}(R,\bar r,k')d\bar r=\frac{\pi}{k^2}\delta_{nn'}\delta_{mm'}\delta(k-k'). \tag{I4}$$

Определим в некоторой фиксированной точке базы B $R=\mathring{R}$ репер

$$|e(\bar r)\rangle\equiv|\Psi(\mathring{R},\bar r)\rangle. \tag{I5}$$

Унитарный билокальный оператор $\mathcal{U}(R)\equiv\mathcal{U}(R,\mathring{R})$, $\mathcal{U}^+(R)=\mathcal{U}^{-1}(R)$ осуществляет параллельный перенос репера вдоль базы B из $\mathring{R}$ в R

$$|\Psi(R,\bar r)\rangle=|e(\bar r)\rangle\,\mathcal{U}(R,\mathring{R}) \tag{I6}$$

$$\mathcal{U}(R,\mathring{R})=\langle e(\bar r)|\Psi(R,\bar r)\rangle.$$

Из определения оператора $A(R)$ (7) с помощью соотношений (I6),(I4), получаем

$$A(R)=-i\,\mathcal{U}^{-1}(R)\partial_R\mathcal{U}; \tag{I7}$$

$$\mathcal{U}(R)=\mathcal{P}\exp i\int_{\mathring{R}}^{R}A(R')dR'. \tag{I7а}$$

На геометрическом языке эффективный векторный потенциал $A(R)$ имеет смысл индуцированной связности в расслоенном пространстве $\mathcal{H}$ с базой $B=R^1\ni R$ и слоем $\mathcal{F}_R$, образованным из базисных функций $\Psi(R,\bar r)$ задачи двух фиксированных центров (9).

Таким образом, исходная задача рассеяния на двухцентровом аксиально-симметричном потенциале, способном сжиматься и вытягиваться вдоль оси сфероида в процессе взаимодействия, свелась к согласованному решению двух задач: для системы связанных уравнений (5) с ковариантной производной $D(R)=\partial_R+iA(R)$ ($\hat P=-iD(R)$), описывающих медленное движение центров, и для параметрических уравнений (II),(I2), соответствующих гамильтониану $H^f(R,\bar r)$ быстрого движения при каждом фиксированном значении медленной переменной.

3. Точно решаемые модели для системы уравнений с удлиненной производной

Общая формулировка обратной многомерной и трехчастичной задач рассеяния в адиабатическом представлении и способ генерирования на этой основе точно решаемых моделей даны в предшествующих работах [6,7,9]. Здесь мы используем чисто алгебраические методы построения точно решаемых моделей, обобщающие преобразования Дарбу, Баргмана, как для базисных параметрических уравнений, так и для систем связанных уравнений. На каждом этапе для большей ясности проблемы будем исходить из максимально простой ситуации.

В диагональном приближении, которое обычно применяется для изучения геометрических аспектов адиабатического разложения [I4], система уравнений (5) распадается на m (по числу каналов) несвязанных уравнений:

$$-\frac{1}{2}(\partial_R+iA(R))^2\chi(R)+V(R)\chi(R)+\frac{L(L+1)}{R^2}\chi(R)=E\chi(R). \tag{5a}$$

Такой же вид имеют уравнения (5а) в одноуровневом приближении (приближении Борна-Оппенгеймера).

Для каждого из расцепленных уравнений $A(R)$ — обычный векторный потенциал, $V(R)$ – скалярный, а само уравнение (5а) подобно обычному уравнению движения частицы в магнитном поле.

Одним из эффективных подходов к построению точно решаемых моделей является метод факторизации, который применялся к исследованию квантово-механических задач, начиная с работ Шредингера [I6](см.также[I7]). Связи спектров и собственных функций одномерных гамильтонианов, которые устанавливаются в методе факторизации - это проявление ковариантности обыкновенных дифференциальных уравнений относительно преобразований Дарбу - Крама - Крейна [I8]. Преобразования Дарбу на основном состоянии исходного гамильтониана, представленного в факторизованном виде, дают два суперсимметричных партнера.

Используем метод факторизации для построения точно решаемых моделей при наличии потенциала, зависящего от скорости, для уравнений (5а). С помощью унитарного калибровочного преобразования $\mathcal{U}(R)$ (I7) уравнения (5а) представимы в обычном потенциальном виде ($L=0$)

$$\left[-\frac{1}{2}\partial_R^2+V'(R)-E\right]\chi'(R)=0. \tag{I8}$$

Гамильтониан этого уравнения $H_-(R)$ и его суперсимметричный партнер $H_+(R)$ факторизуются

$$H_-=\frac{1}{2}Q_-Q_+,\qquad H_+=\frac{1}{2}Q_+Q_-, \tag{I9}$$

$$H_\pm=\frac{\hat{p}^2}{2}+\frac{1}{2}(\alpha^2(R)\pm\partial_R\alpha(R))\equiv\frac{\hat{p}^2}{2}+V_\pm'(R),$$

$$Q_\mp=(\mp\partial_R+\alpha(R)),\quad \alpha(R)=-\partial_R\ln\mathring{\chi}'(R). \tag{20}$$

Волновая функция $\mathring{\chi}'(R)$ – решение уравнения $H_-\mathring{\chi}'(R)=$ $=\mathring{\mathcal{E}}\mathring{\chi}'(R)$, не имеющая узлов. Поэтому $\mathring{\mathcal{E}}\leq E_0$, где E_0 - энергия основного состояния H_- . При $\mathring{\mathcal{E}}=E_0$ спектры H_- и H_+ совпадают, за исключением основного состояния. Их собственные функции связаны между собой преобразованием Дарбу - Крама - Крейна

$$\chi_+'(R,E)=Q_+\chi_-'(R,E)=\frac{1}{\mathring{\chi}'(R)}W\{\mathring{\chi}'(R),\chi_-'(R,E)\};$$

$$Q_+\mathring{\chi}'(R)=0,\qquad \mathring{\chi}'=\exp\left(-\int_0^R\alpha(R')dR'\right). \tag{21}$$

Потенциал $V_+'(R)$, соответствующий H_+ , определяется в виде:

$$V_+'(R)=V_-'(R)-\frac{d^2}{dR^2}\ln\mathring{\chi}'(R). \tag{I9a}$$

Теперь легко показать, что гамильтониан $\mathcal{H}_-$ уравнения (5а) с $L=0$, так же как и его суперсимметричный партнер $\mathcal{H}_+$, представимы в факторизованном виде:

$$\mathcal{H}_- = \frac{1}{2} Q_- Q_+ , \qquad \mathcal{H}_+ = \frac{1}{2} Q_+ Q_- , \tag{22}$$

где

$$Q_{\mp} = (\mp D + \alpha(R)). \tag{23}$$

Тогда имеем

$$\mathcal{H}_{\pm} = \frac{1}{2} D^2 + \frac{1}{2}\left[\alpha^2(R) \pm (D\alpha(R))\right].$$

В отличие от (20) Q записываются через удлиненную производную $D(R) = \partial_R + iA(R)$. Волновая функция основного состояния гамильтониана $\mathcal{H}_-$ представима в виде

$$\overset{\circ}{\chi}(R) = \exp\left(-\int_0^R \alpha(R')dR'\right) \cdot \mathcal{P}\exp i\int_{\overset{\circ}{R}}^R A(R')dR'. \tag{24}$$

Собственные функции $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ при произвольной энергии связаны между собой преобразованием

$$\chi_+(R,E) = Q_+\chi_-(R,E) = (D+\alpha(R))\chi_-(R,E) = $$
$$= \frac{1}{\overset{\circ}{\chi}(R)} W_D \{\overset{\circ}{\chi}(R), \chi_-(R,E)\}, \tag{25}$$

обобщающим преобразование Дарбу, Крама - Крейна (21). Вронскиан $W_D = \{(D\overset{\circ}{\chi})\chi_- - \overset{\circ}{\chi}(D\chi_-)\}$ определен на удлиненной производной. Отметим, что рассмотренная схема факторизации осуществляется и в общем случае, когда отсутствует

сферическая симметрия по $\bar{R}$, т.е. $A(R) \to \bar{A}(\bar{R})$ [19]. Как обычно, калибровочная симметрия гарантирует инвариантность (5) при одновременном изменении $A \to A - \partial\lambda$, $\overset{\circ}{\chi} \to \exp(+i\lambda)\overset{\circ}{\chi}$. Если $\lambda(R) \equiv \ln \mathcal{U}(R)$ и $A(R) = -i\partial_R \ln \mathcal{U}(R)$ и не имеет точек сингулярностей, то подобное калибровочное преобразование приводит соотношения (22)-(24) к (19)-(21).

Процедура (22)-(25) обобщает (19)-(21) и позволяет генерировать класс точно решаемых моделей для уравнений (5а) при наличии эффективных векторных потенциалов. Рассмотрим простой пример точно решаемой модели, позволяющий выделить и ясно представить роль эффективного вектор-потенциала. Пусть для уравнений (5а) с ($L=0$) эффективный скалярный потенциал определяется соотношением

$$V_-(R) = \frac{1}{2}\left[-A^2 + i(\partial_R A)\right]. \tag{26a}$$

Сравнение с (21) дает $A(R) = i\alpha(R)$. С учетом (26а) уравнения (5а) переписываются следующим образом:

$$-\frac{1}{2}(\partial_R + iA(R))^2\chi(R) + \frac{1}{2}\left[-A^2 + i(\partial_R A)\right]\chi(R) = E\chi(R) \tag{27}$$

или

$$-\frac{1}{2}\partial_R^2\chi(R) - iA\partial_R\chi(R) = E\chi(R),$$

т.е. полностью определяются векторным потенциалом $A(R)$. В соответствии с (22) представим уравнение (27) в факторизованном виде:

$$\mathcal{H}_- = \frac{1}{2} Q_- Q_+ = \frac{1}{2} \partial_R^2 - i A(R) \partial_R ,$$

где

$$Q_- = -\partial_R + i A(R) + \alpha(R) = -\partial_R - 2 i A(R),$$

$$Q_+ = \partial_R + i A(R) + \alpha(R) = \partial_R .$$

Суперсимметричный партнер $\mathcal{H}_-$ запишется следующим образом:

$$\mathcal{H}_+ = \frac{1}{2} Q_+ Q_- = \frac{1}{2} \partial_R^2 - i A(R) \partial_R - i(\partial_R A(R)).$$

Эффективный скалярный потенциал, отвечающий $\mathcal{H}_+$, примет вид

$$V_+(R) = \frac{1}{2}\left[-A^2 - i\partial_R A\right]. \qquad (26б)$$

Рассмотренный пример удобен для изучения геометрических фаз, возникающих при наличии точек, в которых $A(R)$ сингулярно. В [9] при изучении свободного движения в N -мерном пространстве $(R_+^1 \times S^{N-1})$

$$-\frac{(N-1)}{R} \partial_R \psi - \partial_R^2 \psi - R^2 \Delta_{\hat{R}} \psi = E\psi$$

продемонстрировано возникновение фазы, связанное с дефектом вложения сферы S^{N-1} в $R^N \setminus \{0\}$. Это уравнение отвечает (27) с $A(R) = -i\nu R^{-1}$ $(\nu = (N-1)/2)$.
В соответствии с (26а) и (26б)

$$V_-(R) = \nu(\nu-1) R^{-2};$$

$$V_+(R) = \nu(\nu+1) R^{-2}.$$

Фазы определяются согласно соотношению

$$\delta_\mp = \frac{i}{2} \operatorname{Im} \oint \dot{A}(R') dR' = \begin{cases} \pi\nu \\ \pi(\nu+1). \end{cases}$$

Вполне очевидно, что точки сингулярностей $A(R)$ не обязательно располагаются в начале координат, и функциональная зависимость $A(R)$ может быть более сложной. Например, потенциалу $A(R) = -i(R+ib)/(R-ib)$ отвечает фаза $\delta = 2\pi b$. Исследование класса точно решаемых моделей с сингулярными потенциалами и в матричном случае представляет самостоятельный интерес и составляет предмет отдельной работы автора.

На основе техники вырожденных ядер для интегральных уравнений обратной задачи в замкнутом аналитическом виде конструируются баргмановские потенциальные матрицы и соответствующие им решения после сведения системы связанных уравнений с удлиненной производной (5) к потенциальному виду [9]:

$$-\frac{d^2}{dR^2}\chi_{ij}(R,P)+\sum_{j'}^{m}U_{ij'}(R)\chi_{j'j}(R,P)=P^2\chi_{ij}(R,P) \qquad (28)$$

$(P=\mathrm{diag}\,P_j)$.

Представим многоканальное обобщение преобразований Дарбу и получение точных решений системы связанных уравнений (28) без использования интегральных уравнений обратной задачи. Будем искать решения χ [x)] системы уравнений (28) с неизвестной матрицей взаимодействия $U(R)$ в виде

$$\chi_{jj'}(R,P)=\mathring{\chi}_{jj'}(R,P)-$$
$$-\psi_j(R)\sum_{i}^{m}\frac{W\{\mathring{\psi}_i(R),\mathring{\chi}_{ij'}(R,P)\}}{(E_i'-E_i)}, \qquad (29)$$

где $\mathring{\chi}_{ij}(R,P)$ - элементы матрицы решений системы уравнений (28), отвечающие известной потенциальной матрице $\mathring{U}(R)$, в общем случае недиагональной. Последняя может быть диагональной, в частности, отвечать расцепленной системе уравнений (I9), рассмотренной выше с аналитическими решениями, или вообще тождественно равняться нулю. Функции $\psi_i(R)$ и $\mathring{\psi}_i(R)$ – векторы решений системы уравнений (28) для $U(R)$ и $\mathring{U}(R)$ соответственно при некотором фиксированном значении энергии $E=E'$, например, отвечающем добавляемому связанному состоянию или изменению

x) Штрих для решений $\chi'=U\chi$ системы уравнений (28) и во всех последующих формулах до (37) опущен.

его нормировочной матрицы $\mathring{M}\to M$

$$\psi_i(R)=\sum_{j}^{m}\chi_{ij}(R,P')C_j, \quad \mathring{\psi}_i(R)=\sum_{j}^{m}\mathring{\chi}_{ij}(R,P')C_j. \qquad (30)$$

Здесь C_j - некие не зависящие от координаты элементы векторов $|C\rangle$, связанные с нормировочными матрицами состояний дискретного спектра

$$M=|C\rangle\langle C|.$$

Дважды продифференцируем (29). Учитывая (30) и (28) для $\psi_i(R)$ и проведя преобразования, получим

$$\frac{d^2}{dR^2}\chi_{ij}(R,P)-\sum_{j'}^{m}U_{ij'}(R)\chi_{j'j}(R,P)+P_i^2\chi_{ij}(R,P)=$$
$$=\sum_{j'}^{m}\left[U_{ij'}(R)-\mathring{U}_{ij'}(R)\right]\mathring{\chi}_{j'j}(R,P)-$$
$$-2\frac{d}{dR}\left[\psi_i(R)\sum_{j'}^{m}\mathring{\psi}_{j'}(R)\right]\mathring{\chi}_{j'j}(R,P). \qquad (31)$$

Из условия обращения правой части этого соотношения в нуль получаем одну из систем уравнений на две пока неизвестные матрицы $U(R)$ и $\psi(R)$:

$$U_{ij}(R)=\mathring{U}_{ij}(R)+2\frac{d}{dR}\left[\psi_i(R)\mathring{\psi}_j(R)\right]. \qquad (32)$$

Вторую систему найдем из определения (29) при $P'=P$, домножив на $C_{j'}$, просуммировав по j' и учитывая (30), а также интегральное соотношение для вронскиана W:

$$\frac{W\{\mathring{\psi}_i(R),\mathring{\chi}_{ij'}(R)\}}{(E_i'-E_i)}=\int_{a(R)}^{R(B)}dR'\mathring{\psi}_i(R')\mathring{\chi}_{ij'}(R'), \qquad (33)$$

полученное с использованием определения $W\{\psi,\chi\}=$ $=\mathring{\psi}\partial_R\mathring{\chi}-(\partial_R\mathring{\psi})\mathring{\chi}$ $\left(\partial_R\mathring{\chi}\equiv\frac{d}{dR}\mathring{\chi}\right)$ и (28). Пределы интегрирования зависят от того, в какой точке a или b тестируемого интервала $[a, b]$ W обращается в нуль. Окончательно после подстановки (33) в (29) имеем

$$\Psi_j(R) = \mathring{\Psi}_j(R)\left[1 + \sum_i^m \int\limits_{a(R)}^{R(b)} |\mathring{\Psi}_i(R')|^2 dR'\right]^{-1}. \qquad (34)$$

Учитывая (34) в (29) и (32), получаем преобразование (29) в явном виде, связывающее решения системы (28), которые отвечают потенциальным матрицам $\mathring{U}(R)$ и $U(R)$, отличающимся либо на одно связанное состояние, либо нормировками одного из состояний. При распространении интервала $[a, b]$ на $[0, \infty)$ или на всю ось $(-\infty, \infty)$ соотношения (32), (29), (34) будут отвечать соотношениям обратной задачи при вырожденных ядрах $Q(R, R')$, $K(R, R')$ в подходах Гельфанда - Левитана или Марченко в зависимости от выбора граничных условий [20]. Отметим однако, что здесь при их выводе не были использованы интегральные уравнения обратной задачи, а проведены лишь алгебраические преобразования [12]. Легко записать обобщение этого подхода при конструировании в замкнутом аналитическом виде потенциалов и решений, отличающихся N связанными состояниями. В этом случае преобразование (29) обобщим следующим образом:

$$\chi_{jj'}(R,P) = \mathring{\chi}_{jj'}(R,P) - \sum_\lambda^N \psi_j(R, i\chi_\lambda) \sum_i^m \frac{W\{\mathring{\Psi}_i(R, i\chi_\lambda), \mathring{\chi}_{ij'}(R,P)\}}{(E_i^\lambda - E_i)}, \qquad (35)$$

где $|\Psi(R, i\chi_\lambda)\rangle$ и $|\mathring{\Psi}(R, i\chi_\lambda)\rangle$ — векторы решений (28) при заданных значениях энергий изменяемых состояний дискретного

спектра. Повторяя алгебраическую процедуру вывода соотношений (32), (34), получим для матрицы потенциалов $U(R)$ и векторов решений $|\Psi\rangle$ следующие выражения:

$$U_{ij}(R) = \mathring{U}_{ij}(R) + 2\frac{d}{dR^\lambda}\sum^N \Psi_i(R, i\chi_\lambda)\mathring{\Psi}_j(R, i\chi_\lambda), \qquad (36)$$

где

$$\Psi_i(R, i\chi_\lambda) = \sum_\nu^N \mathring{\Psi}(R, i\chi_\nu)\left[\delta_{\nu\lambda} + \sum_j^m \int\limits_{0(R)}^{R(\infty)} dR' \mathring{\Psi}_j(R', i\chi_\nu)\mathring{\Psi}_j(R', i\chi_\lambda)\right]^{-1}. \qquad (37)$$

Отметим, что при конструировании точно решаемых моделей выбор спектральных характеристик следует подчинять условиям на данные рассеяния, предъявляемым к ним спектральной теорией операторов [21]

4. Обобщенные преобразования Баргмана - Дарбу для аксиально-симметричных двухцентровых потенциалов

Задачи такого рода представляют самостоятельный интерес и могут быть использованы в адиабатическом подходе в качестве базисных. В данном параграфе на основе обобщенных преобразований Баргмана - Дарбу [10] конструируются серии потенциалов $a(\xi)$, допускающие решения в замкнутом аналитическом виде для квазирадиальных уравнений (11). Аналогично можно конструировать потенциалы $b(\eta)$ для квазиугловых уравнений (12). Правда, для уравнений (12) больше подходят обратные задачи Штурма - Лиувилля при заданных собственных значениях λ_{nm} и их нормировках.

С помощью преобразования $\chi(\xi^2-1)^{-1/2}\varphi(\xi)$ уравнение (II) можно записать в виде:

$$\frac{d^2\varphi(\xi)}{d\xi^2}+\left[K^2(R)-\frac{a(\xi)}{\xi^2-1}-\frac{m^2-1}{(\xi^2-1)^2}-\frac{\lambda}{\xi^2-1}\right]\varphi(\xi)=0 \quad (38)$$

а) Обобщенные преобразования Баргмана - Дарбу в (k^2,λ) – плоскости

Построим преобразование при фиксированном значении индекса m и переменных λ и k^2:

$$\varphi(\xi,\lambda_n,k)=\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_n,k)-\sum_{\mu}^{N}y_\mu(\xi)\frac{W\{\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_\mu,k_\mu),\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_n,k)\}}{(\lambda_n-\lambda_\mu)} \quad (39)$$

Это преобразование связывает решения $\overset{\circ}{\varphi}(\xi)$ и $\varphi(\xi)$ уравнения (38), соответствующие известному потенциалу $\overset{\circ}{a}(\xi)$ и неизвестному первоначально $a(\xi)$. Функции $y_\mu(\xi) = y(\xi,\lambda_\mu,k_\mu)$ удовлетворяют уравнению (38) и совпадают с точностью до некоторой, не зависящей от ξ константы C_μ с общим решением $\varphi(\xi\lambda_n,k)$ при $\lambda_n=\lambda_\mu$, $k^2=k_\mu^2$

$$y_\mu(\xi)=C_\mu\varphi(\xi,\lambda_\mu,k_\mu). \quad (40)$$

Будем считать, что функции $\overset{\circ}{\varphi}(\xi)$ – некоторые произвольные решения (38) с известным потенциалом $\overset{\circ}{a}(\xi)$. В частности, это могут быть регулярные решения, удовлетворяющие граничным условиям (I3 а)

$$\lim_{\xi\to1}\varphi(\xi,\lambda,E)(\xi^2-1)^{(-1/2-m/2)}=1,$$

$$\lim_{\xi\to1}\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda,E)(\xi^2-1)^{(-1/2-m/2)}=1, \quad (41)$$

или решения Йоста $f^{\pm}(\xi)$, определяемые условием

$$\lim_{\xi\to\infty}f^{\pm}(\xi,\lambda,k)\exp(\mp ik\xi)=\lim_{\xi\to\infty}\overset{\circ}{f}{}^{\pm}(\xi,\lambda,k)\exp(\mp ik\xi). \quad (42)$$

Найдем условия, при которых функция $\varphi(\xi,\lambda_n,k)$, определяемая преобразованием (39), является решением уравнения (38). Домножая квазирадиальное уравнение (38) для $\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_\mu,k_\mu)$ на $\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_n,k)(\lambda_n-\lambda_\mu)^{-1}$ и вычитая из результата уравнение (38) для $\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_n,k)$, домноженное на $\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_\mu,k_\mu)(\lambda_n-\lambda_\mu)^{-1}$, получаем

$$\frac{d}{d\xi}W\{\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_\mu,k_\mu),\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_n,k)\}(\lambda_n-\lambda_\mu)^{-1}=$$

$$=\left[\frac{(E_\mu-E)}{(\lambda_n-\lambda_\mu)}+\frac{1}{(\xi^2-1)}\right]\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_\mu,k_\mu)\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_n,k). \quad (43)$$

Дважды продифференцируем (39), используя (43),

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\varphi(\xi,\lambda_n,k)=\frac{d^2}{d\xi^2}\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_n,k)-$$

$$-\sum_{\mu}^{N}\frac{d^2}{d\xi^2}y_\mu(\xi)W\{\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_\mu,k_\mu),\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_n,k)\}(\lambda_n-\lambda_\mu)^{-1}$$

$$-2\sum_{\mu}^{N}\frac{d}{d\xi}y_\mu(\xi)\left[(E_\mu-E)/(\lambda_n-\lambda_\mu)+(\xi^2-1)^{-1}\right]\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_\mu,k_\mu)\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_n,k)$$

$$-\sum_{\mu}^{N}y_\mu(\xi)\frac{d}{d\xi}\left[(E_\mu-E)/(\lambda_n-\lambda_\mu)+(\xi^2-1)^{-1}\right]\cdot\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_\mu,k_\mu)\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_n,k).$$

Принимая во внимание уравнение (38) для $y_\mu(\xi)$, получим:

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\varphi(\xi,\lambda_n,k)+\left[E(R)-\frac{a(\xi)}{(\xi^2-1)}-\frac{(m^2-1)}{(\xi^2-1)^2}-\frac{\lambda_\mu}{(\xi^2-1)}\right]\varphi(\xi,\lambda_n,k)=$$

$$=\frac{[\mathring{a}(\xi)-a(\xi)]}{(\xi^2-1)}\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_n,k)-$$

$$-2\sum_\mu^N\left[\frac{d}{d\xi}\,y_\mu(\xi)\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_\mu,k_\mu)\right]\left[\frac{(E_\mu-E)}{(\lambda_n-\lambda_\mu)}+\frac{1}{(\xi^2-1)}\right]\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_n,k)-$$

$$-\sum_\mu^N\left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{(E_\mu-E)}{(\lambda_n-\lambda_\mu)}+\frac{1}{(\xi^2-1)}\right)\right]y_\mu(\xi)\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_\mu,k_\mu)\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_n,k).$$

Нетрудно убедиться, анализируя это выражение, что функция $\varphi(\xi,\lambda_n,k)$ удовлетворяет уравнению (38), если

$$a(\xi)=\mathring{a}(\xi)-2(\xi^2-1)\sum_\mu^N\left[\frac{d}{d\xi}\,y_\mu(\xi)\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_\mu,k_\mu)\right]\left(\frac{(E_\mu-E)}{(\lambda_n-\lambda_\mu)}+\frac{1}{(\xi^2-1)}\right)+ \tag{44}$$

$$+\sum_\mu^N\left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{(E_\mu-E)}{\lambda_n-\lambda_\mu}+\frac{1}{(\xi^2-1)}\right)\right]y_\mu(\xi)\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_\mu,k_\mu).$$

Пусть λ_n и E изменяются не произвольно, а в соответствии с соотношением

$$(E_\mu-E)/(\lambda_n-\lambda_\mu)=\beta=const, \tag{45}$$

что соответствует условию

$$a\,E+b\lambda_n=\beta=const,\quad \beta=b/a.$$

Воспользуемся определением (39) для $y_\mu(\xi)$, используя связь $y_\mu(\xi)$ с $\varphi(\xi,\lambda_\mu,k_\mu)$ (40),

$$y_\mu(\xi)=\sum_{\mu'}^N C_\mu\,\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_{\mu'},k_{\mu'})P^{-1}_{\mu'\mu}(\xi), \tag{46}$$

где

$$P_{\mu'\mu}(\xi)=\delta_{\mu'\mu}+C_{\mu'}W\{\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_{\mu'},k_{\mu'}),\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_\mu,k_\mu)\}. \tag{47}$$

Учет $y_\mu(\xi)$ (46) в соотношениях для потенциала (44) и соответствующих ему решениях (39) позволяет представить их в замкнутом виде через известные функции $\mathring{a}(\xi)$ и $\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_\mu,k_\mu)$:

$$a(\xi)=\mathring{a}(\xi)-2\sqrt{\frac{\beta(\xi^2-1)+1}{(\xi^2-1)}}\frac{d}{d\xi}\left[\sqrt{\frac{(\xi^2-1)}{\beta(\xi^2-1)+1}}\ln\det P(\xi)\right]; \tag{48}$$

$$\varphi(\xi,\lambda_n,k)=\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_n,k)-$$
$$-\sum_\mu^N\sum_{\mu'}^N C_\mu\,\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_{\mu'},k_{\mu'})P^{-1}_{\mu'\mu}(\xi)\,\frac{W\{\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_\mu,k_\mu),\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_n,k)\}}{(\lambda_n-\lambda_\mu)}. \tag{49}$$

Соотношения (48), (49) есть не что иное, как обобщенные преобразования Баргмана – Дарбу [I0] для аксиально-симметричной мишени. Для аналога точно решаемых моделей в подходе Гельфанда – Левитана [22] в качестве функций φ и $\mathring{\varphi}$ выступают регулярные решения, определяемые граничными условиями (4I), для аналога в методе Марченко, в качестве φ и $\mathring{\varphi}$ необходимо использовать функции Йоста (42). Интегрирование (43) в первом случае осуществляется в пределах от I до ξ, во втором случае – в пределах от ξ до ∞.
Это дает следующее выражение для W:

$$W\{\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_\mu,k_\mu),\mathring{\varphi}(\xi,\lambda_n,k)\}/(\lambda_n-\lambda_\mu)=$$
$$=\int_{1(\xi)}^{\xi(\infty)}\frac{\beta(\xi'^2-1)+1}{(\xi'^2-1)}\mathring{\varphi}(\xi',\lambda_\mu,k_\mu)\mathring{\varphi}(\xi',\lambda_n,k)\,d\xi',$$

учет которого в соотношениях (48), (49), и (47) приводит к привычному виду с вырожденным ядром оператора обобщенного сдвига $K(\xi,\xi')$. Рассмотрим частный случай $\beta=0$, что соответствует $k^2=const$. Из соотношения (48) немедленно следует

$$a(\xi)=\overset{\circ}{a}(\xi)-\frac{2}{\sqrt{(\xi^2-1)}}\frac{d}{d\xi}\left[\sqrt{(\xi^2-1)}\ln\det P(\xi)\right]; \quad (50)$$

$$\varphi(\xi,\lambda_n)=\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_n)-$$
$$-\sum_{\mu}^{N}\sum_{\mu'}^{N}C_\mu\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{\mu'})P^{-1}_{\mu'\mu}(\xi)\cdot\int_{1(\xi)}^{\xi(\infty)}\frac{(\beta(\xi'^2-1)+1)}{(\xi'^2-1)}\overset{\circ}{\varphi}(\xi',\lambda_\mu)\varphi(\xi',\lambda_n)d\xi' \quad (51)$$

б) Алгебраические преобразования в (m^2,λ) – плоскости

При $k=const$ построим преобразование

$$\varphi(\xi,\lambda_{nm})=\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{nm})-$$
$$-\sum_{n'm'}\mathcal{Y}(\xi,\lambda_{n'm'})W\{\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{n'm'}),\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{nm})\}/(\lambda_{nm}-\lambda_{n'm'}), \quad (52)$$

которое связывает решения $\overset{\circ}{\varphi}(\xi)$ и $\varphi(\xi)$, отвечающие известному $\overset{\circ}{a}(\xi)$ и неизвестному $a(\xi)$ потенциалам соответственно. Функции $\mathcal{Y}(\xi,\lambda_{n'm'})$, так же как и $\varphi(\xi,\lambda_{nm})$, удовлетворяют уравнению (38) с $a(\xi)$ при некоторых выбранных значениях индексов $n=n'$, $m=m'$, отличаясь только константой $C(\lambda_{n'm'})$, не зависящей от ξ. Поэтому, используя соотношение (52) при $n=n'$, $m=m'$, функцию $\mathcal{Y}(\xi,\lambda_{n'm'})$ можно записать в виде:

$$\mathcal{Y}(\xi,\lambda_{n'm'})=\sum_{n''m''}\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{n''m''})P^{-1}_{n''m'',n'm'}(\xi)C(\lambda_{n'm'}), \quad (53)$$

где $P(\xi)$ – матрица с элементами

$$P_{\mu\nu}(\xi)=\delta_{\mu\nu}+C_\mu W\{\overset{\circ}{\varphi}_\mu(\xi),\overset{\circ}{\varphi}_\nu(\xi)\}/(\lambda_\mu-\lambda_\nu). \quad (54)$$

Если уравнение (38) для $\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{nm})$ умножить на $\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{n'm'})/(\lambda_{nm}-\lambda_{n'm'})^{-1}$ и вычесть из результата уравнение (38) для $\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{n'm'})$, умноженное на $\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{nm})\cdot(\lambda_{nm}-\lambda_{n'm'})^{-1}$, то выражение для вронскиана W запишется

$$\frac{d}{d\xi}W\{\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{n'm'}),\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{nm})\}/(\lambda_{nm}-\lambda_{n'm'})=$$
$$=\left[\frac{1}{(\xi^2-1)}+\frac{1}{(\xi^2-1)^2}\frac{(m^2-m'^2)}{(\lambda_{nm}-\lambda_{n'm'})}\right]\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{n'm'})\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{nm}). \quad (55)$$

Давайте m и n отбирать в соответствии с соотношением

$$(m^2-m'^2)/(\lambda_{nm}-\lambda_{n'm'})=\alpha, \quad (56)$$

что отвечает $am^2+b\lambda_{nm}=const=\alpha$; $\alpha=b/a$.

Тогда решения (38) будем получать вдоль прямых линий в (m^2,λ)– плоскости. Аналогично предыдущему найдем условия, при которых функция, удовлетворяющая преобразованию (52), будет решением (38). Эти условия позволят нам выразить потенциал $a(\xi)$ через заранее известные $\overset{\circ}{a}(\xi)$ и $\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{nm})$, неизвестные решения $\mathcal{Y}(\xi,\lambda_{n'm'})$ и $\varphi(\xi,\lambda_{nm})$ — через известные $\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{nm})$:

$$a(\xi)=\overset{\circ}{a}(\xi)-\frac{2\sqrt{\xi^2-1+\alpha}}{(\xi^2-1)}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{(\xi^2-1)}{\sqrt{\xi^2-1+\alpha}}\ln\det P(\xi)\right], \quad (57)$$

$$\varphi(\xi,\lambda_{nm}) = \overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{nm}) - \tag{58}$$
$$-\sum_{n'm'}\sum_{n''m''} C_{n'm'}\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{n''m''})P^{-1}_{n''m''n'm'}(\xi)\frac{W\{\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{n'm'}),\overset{\circ}{\varphi}(\xi,\lambda_{nm})\}}{(\lambda_{nm}-\lambda_{n'm'})}.$$

Интересно рассмотреть случай $\alpha = 0$, поскольку этому соответствует $k^2 = const$ и, как следует из (56), $m = const$, т.е. пример, полученный в (k^2, λ) – плоскости при $m = const$ и $k^2 = const$ по другим формулам (48),(49). При $\alpha = 0$ из соотношения (47) получаем выражение для потенциала

$$a(\xi) = \overset{\circ}{a}(\xi) - \frac{\ell}{\sqrt{(\xi^2-1)}}\frac{d}{d\xi}\left[\sqrt{(\xi^2-1)}\,\ln\det P(\xi)\right], \tag{59}$$

полностью эквивалентное (51). Действительно, поскольку формулы для вронскианов (43), (55) при $\beta = 0$ $(E_\mu = E)$, $\alpha = 0$ $(m = m')$ совпадают, то совпадают и матрицы $P(\xi)$, через которые определяются потенциалы и решения в обоих случаях. Вполне очевидно, как можно построить множество других точно решаемых моделей.

Заключение

В данной работе в замкнутом виде получены соотношения связи для двухцентровых потенциалов и соответствующих решений, обобщающие соответствующие формулы баргмановского подхода. Конструируются алгебраические преобразования и для систем связанных уравнений с удлиненной производной. Полученные в рамках суперсимметричного подхода соотношения для уравнений с калибровочным потенциалом позволяют генерировать новый класс точно решаемых моделей. Особый интерес представляет развитие предложенного подхода для конструирования моделей с сингулярными потенциалами и нетривиальными топологическими фазами.

Литература

1. Born M.–Nachr.Akad.Wiss.Gottingen 1951, Bd.1, N 6, S.1. Хуан Кунь. Динамическая теория кристаллических решеток. Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

2. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю.–Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции, М.:Наука, 1976.
3. Виницкий С.И., Пономарев Л.И.–ЭЧАЯ, 1982, т.13, вып.6, с.1336.
4. Мотт Н., Мэсси Т.–Теория атомных столкновений. Пер. с англ. М.Мир, 1969.
5. Виницкий С.И., Кадомцев М.Б., Сузько А.А.–ЯФ, 1990, т.51, с.952.
6. Виницкий С.И., Марковски Б.Л., Сузько А.А.–ЯФ, 1992, т.53, N 3, с.

   Препринт ОИЯИ Е4-91-379, Дубна, 1991, 40 с.
7. Dubovik V.M. et al.–Phys.Lett. 1989. v.142A, p.133.

8. Абрамов Д.И., Комаров И.В.–ТМФ. 1975, т.22, с.253.
9. Виницкий С.И., Сузько А.А.–ЯФ, 1990, т.52, с.686.
10. Suzko A.A.–Physica Scripta, 1985, v.31, p.447.
11. Rudyak B.V., Suzko A.A., Zakhariev B.N.–Physica Scripta, 1984, v.29, p.515.
12. Suzko A.A.–Physica Scripta, 1986, v.34, p.5.
13. Suzko A.A.–Intern.Conf. on Atomic Physics and Few-Body Systems, Japan, 1986.

14. Berry M.B.–Proc. Roy.Soc. 1984. v.A262, p.45.

15. Zygelman B.–Phys.Lett. 1987, v.125A, p.476.

16. Schrodinger E.–Proc. Roy. Irish.Acad. 1940, 46A, N 6, p.183.

17. Infeld L., Hull T.E.– Rev.Mod.Phys. 1951, v.23, N 1, p.21–68.

18. Darboux J.G. – C.R.Acad.Sci.Paris, 1882, v.94, p.1456.

19. Gamboa J., Zanelli J.–J.Phys.: Math.Gen. 1988, v.21A, L 283.

20. Захарьев Б.Н., Сузько А.А.–Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. М.: Энергоатомиздат, 1985. Изд.2. N.Y. Springer-Verlag, 1990, 225 с.

21. Марченко В.А.–Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев: Наук.думка, 1977. 330 с.

22. Pivovarchik V.N., Suzko A.A., Zakhariev B.N.–Physica Scripta, 1986, v.34, p.101–105.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 января 1992 года.