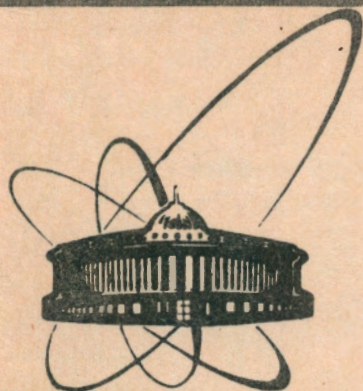


92-130



СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P4-92-130

В.К. Игнатович

ЗАКОН ДИСПЕРСИИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО ВЕКТОРА  
УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ  
ВНУТРИ СРЕДЫ

1992

# 1. Введение

Общепринято взаимодействие холодных и ультрахолодных нейтронов (УХН) с веществом описывать оптическим потенциалом[2]:

$$a) U = (\hbar^2/2m)u_0, \quad b) u_0 = 4\pi N_0 b_0, \quad (1)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ ,  $m$  — масса нейтрона,  $N_0$  — число атомов в единице объема вещества, а  $b_0$  — когерентная длина рассеяния.

Если нейтрон с волновым вектором  $k_0$  падает на поверхность вещества, то он преломляется на границе раздела, и волновой вектор нейтрона  $k'_0$  внутри вещества оказывается равным

$$a) k'_0 = (k_{0\parallel}, k'_{0\perp}), \quad b) k'_{0\perp} = \sqrt{k_0^2 - u_0}, \quad c) k'_0 = \sqrt{k_0^2 - u_0}, \quad (2)$$

где  $k_0 = (k_{0\parallel}, k_{0\perp})$  — волновой вектор нейтрона в вакууме, значки  $\parallel$  и  $\perp$  отмечают компоненты вектора-параллельные и перпендикулярный границе вещества, а  $k = |k|$ .

УХН определяются как нейтроны, кинетическая энергия  $k^2$  которых меньше  $u_0$ . Им свойственно полное отражение, поскольку амплитуда отражения от границы раздела

$$R = (k_{0\perp} - k'_{0\perp}) / (k_{0\perp} + k'_{0\perp}), \quad (3)$$

непоглощающего, идеально упорядоченного и когерентно рассеивающего вещества по модулю равна единице.

В работе[1] было сделано утверждение, что при

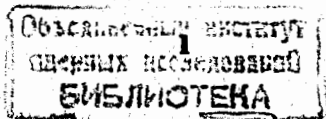
$$k_0 \leq u_0 a, \quad (4)$$

где  $a$  — расстояние между атомами, волновой вектор в веществе, с учетом многократных перерассеяний, определяется выражением

$$k' \approx \sqrt{-u_0 k_0}, \quad (5)$$

что сильно отличается от (2с).

Если это утверждение справедливо, то должны быть существенно изменены представления о взаимодействии нейтрона с веществом. В



частности, если амплитуда отражения от границы раздела описывается выражением (3), то справедливость (5) означает, что при скользящем падении, когда нормальная к поверхности раздела компонента волнового вектора удовлетворяет условию  $k_{0\perp} \leq u_0 a$ , (4), полное отражение отсутствует. Это могло бы дать ключ к разгадке аномалий, наблюдаемых при хранении УХН в замкнутых сосудах [2], которые вот уже более 20 лет не поддаются теоретическому объяснению.

На самом деле утверждение (5) несправедливо. В следующем параграфе демонстрируется, как получается потенциал взаимодействия нейтрона с веществом. Этот потенциал с высокой степенью точности представляется выражением (1). Процедура вычисления потенциала позволяет найти все необходимые поправки к выражению (1). В данной работе получены поправки с относительной величиной до  $10^{-5}$ . В 3-м параграфе прослеживается ход рассуждений работы [1]. Показывается, что выражение (5) можно принять только как гипотезу, которая недостаточно хорошо обоснована и приводит к неприемлемым с точки зрения физики следствиям.

## 2. Уравнения теории МРВ

То, что потенциал взаимодействия нейтрона с веществом дается выражением (1), требует обоснования. На первый взгляд выражение (1) кажется парадоксальным. Действительно, всякое вещество состоит из атомов, нейтрон взаимодействует, в основном, с ядрами атомов, а взаимодействие ядер с нейтроном описывается отрицательным, т.е. притягивающим, потенциалом. Таким образом, потенциал взаимодействия нейтронов с веществом, казалось бы, тоже должен быть отрицательным. Если же принять, что это взаимодействие описывается потенциалом (1), то большинство веществ отталкивает нейтроны, поскольку для них величина (1) положительна.

Одно из обоснований потенциала (1) принадлежит Ферми и Цинну [3]. Они ввели положительный псевдопотенциал взаимодействия нейтрона с одним ядром, который в первом порядке теории возмущений приводит к правильной амплитуде рассеяния  $b$ . Тогда выражение (1) получается в результате усреднения псевдопотенциала по всему

веществу. Ясно, что такое обоснование нельзя считать достаточно строгим.

Наиболее последовательное обоснование потенциала дается теорией многократного рассеяния волн (МРВ), развитой Фолди [4] а также Лаксом [5, 6]. Рассеяние и перерассеяние на ядрах формируют отраженную и преломленную волны, амплитуды которых оказываются точно такими же, как если бы отражение происходило от потенциального барьера, высота которого  $u_0$  в некотором приближении равна (1).

Теория Фолди и Лакса еще не позволяла найти потенциал с любой наперед заданной точностью, но из нее следовало, что многократное перерассеяние формирует на каждом ядре свое локальное эффективное нейтронное поле, которое приводит к перенормировке амплитуды рассеяния. Этот результат дал основание И.М. Франку [7] выдвинуть гипотезу, что локальное поле может иметь большую мнимую часть, которая эффективно увеличивает мнимую часть амплитуды рассеяния и таким образом описывает аномальные потери УХН при отражении от стенки. В принципе, такой эффект может иметь место, но перенормировка амплитуды в результате многократного перерассеяния волн всегда происходит таким образом, чтобы обеспечивалось выполнение условий унитарности. В частности, если рассеиватели располагаются в пространстве таким образом, что рассеяние в какие-то углы подавляется, то мнимая часть амплитуды рассеяния должна уменьшаться. Если же, наоборот, совместное действие рассеивателей открывает ранее недоступные каналы рассеяния, то мнимая часть амплитуды должна возрастать. Поэтому, если эффективное поле увеличивает мнимую часть амплитуды рассеяния, то необходимо выяснить, в какие каналы уходят теряющиеся при отражении нейтроны. Обнаружение этих каналов и является основной задачей при решении проблемы аномальных потерь УХН.

Исследования Фолди и Лакса далеко продвинули теорию МРВ, но оставался нерешенным вопрос, насколько достаточны те приближения, которые приводят к выражению (1). Не может ли оказаться так, что при более строгом рассмотрении мы все же придем к выражению типа (5) для какого-нибудь диапазона энергий падающего нейтрона? Ответ

на этот вопрос отрицателен. И чтобы показать это, воспользуемся теорией МРВ в том виде, как она изложена в монографии [2].

Чтобы строго определить, какие волны формируются при падении плоской нейтронной волны на границу раздела, примем, что на отдельных ядрах нейтрон испытывает только  $s$ -рассеяние, т.е. волна, рассеянная на отдельно взятом неподвижно закрепленном, непоглощающем ядре, описывается выражением

$$a) \Psi_1 = -\frac{b}{r} \exp(ik_0 r), \quad b) b = \frac{b_0}{1 + ik_0 b_0}, \quad (6)$$

где  $b_0$  — вещественная длина рассеяния, а амплитуда  $b$  удовлетворяет требованию унитарности.

Уравнения теории МРВ записываются следующим образом. Волновая функция,  $\psi(r)$ , сформированная в результате многократных перерассеяний, равна

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp(ik_0 \mathbf{r}) - \sum_i \psi(\mathbf{r}_i) \frac{b_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \exp(ik_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|), \quad (7)$$

где  $\psi(\mathbf{r}_i)$  — эффективное поле, освещающее ядро  $i$ . Отметим, что каждое ядро дает сферическую волну с волновым вектором  $k_0$ , поскольку для нейтронного поля нет понятия ближней зоны, и запись рассеянного поля в виде сферической волны справедлива на любых расстояниях от ядра, превышающих размер самого ядра.

Для эффективного поля на ядре  $i$  имеет место следующее уравнение

$$\psi(\mathbf{r}_i) = \exp(ik_0 \mathbf{r}_i) - \sum_{j \neq i} \psi(\mathbf{r}_j) \frac{b_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \exp(ik_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) взяты за основу во всех последующих рассуждениях.

Поскольку выводы работы [1] не зависят от того, является ли среда упорядоченной или нет, рассмотрим идеальный одноатомный точечный кристалл с кубической решеткой, для которого теория МРВ [2] приводит к абсолютно точной системе уравнений в широком диапазоне энергий падающего нейтрона.

Для большей наглядности удобно сначала несколько упростить задачу. А именно, представим себе кристалл в виде совокупности кристаллических плоскостей, параллельных границе раздела и отстоящих

друг от друга на расстоянии  $a$ . Рассеяние же на отдельной плоскости будем описывать неким эффективным потенциалом, который получит свое обоснование в дальнейшем. При этом мы отвлекаемся от возможной дифракции на каждой из кристаллических плоскостей, и задача приобретает одномерный характер. Посмотрим, к какого рода зависимости  $k'$  от  $k$  приводит такая задача. В результате будет получено выражение для потенциала (1) и поправки к нему, обусловленные дискретностью отражающей среды вдоль нормали к входной поверхности.

Далее мы учтем дискретность каждой плоскости, но пренебрежем процессами дифракции при низких энергиях. В результате будет получено выражение для эффективного потенциала отдельной плоскости (т.е. доказана справедливость принятого ранее выражения) и найдены поправки к потенциалу (1), обусловленные дискретностью атомных плоскостей, параллельных входной поверхности.

Следующий шаг состоит в учете дифракции на каждой кристаллической плоскости. При низкой энергии падающего нейтрона все дифрагированные волны оказываются виртуальными, т.е. экспоненциально затухают при удалении от плоскости. Они не приводят к существенному изменению зеркально отраженных волн, но вносят небольшие поправки к потенциалу (1). Нижеприведенные оценки показывают, что в области энергий УХН эти поправки имеют относительную величину порядка  $10^{-5}$  и никак не могут преобразовать волновой вектор внутри среды к виду (5).

## 2.1. Одномерный периодический потенциал

В случае одномерной задачи компоненты волнового вектора нейтрона, параллельные границе раздела, не меняются, поэтому от них можно абстрагироваться. Все амплитуды отражения и пропускания при чисто упругом рассеянии на ядрах вдали от резонансов зависят только от нормальной компоненты волнового вектора. Имея это в виду, значок  $\perp$  будем для простоты тоже опускать.

Чтобы найти рассеяние на каждой из кристаллических плоскостей, введем для них эффективный потенциал

$$a) u(x) = 2p\delta(x), \quad b) 2p = u_0 a. \quad (9)$$

(В дальнейшем, при переходе к трехмерному случаю; этот потенциал также будет следовать непосредственно из теории МРВ.)

Задачу теперь можно сформулировать так: необходимо решить уравнение Шредингера

$$[d^2/dx^2 - u(x) + k^2]\Psi(x) = 0 \quad (10)$$

с потенциалом

$$u(x) = 2p \sum_n \delta(x - na). \quad (11)$$

Выберем в качестве потенциала одного периода выражение

$$u_1(x) = 2p\theta(-a/2 \leq x \leq a/2)\delta(x). \quad (12)$$

где  $\theta$ -функция равна единице при выполнении неравенства, указанного в ее аргументе, и нулю в противоположном случае. Период, выбранный таким образом, симметричен и содержит дельта-образный потенциал в центре.

Амплитуды отражения и пропускания такого периода представятся выражениями [2]

$$a) r = -\exp(ika) \frac{p}{p - ik}, \quad b) t = -\exp(ika) \frac{ik}{p - ik}, \quad (13)$$

где для простоты опущены значки 0 и  $\perp$  у  $k_{0\perp}$ . Эти выражения получаются в результате строгого решения уравнения Шредингера с потенциалом (12), но в их справедливости можно убедиться и с помощью чисто физических рассуждений. Действительно, если потенциал  $p$  равен нулю, то отражение должно отсутствовать, т.е.  $r = 0$ , а пропускание должно быть полным, т.е.  $t = \exp(ika)$ . Если же амплитуда  $p$  бесконечно велика, то пропускание должно отсутствовать ( $t = 0$ ), а амплитуда отражения от дельта-функции должна равняться  $-1$ , а от всего периода  $r = -\exp(ika)$ .

Отметим две особенности выражений (13). 1) величина  $p = u_0 a$  выбрана чисто действительной ( $u_0 = 4\pi N_0 b_0$ ), поскольку только в этом случае выполнено условие унитарности. 2) абсолютные значения  $r$  и  $t$  ни при каких значениях  $k$  не превосходят единицы.

Амплитуда отражения  $R$  от полубесконечного периодического потенциала находится с помощью алгебраического уравнения [2]

$$R = r + tR(1 - rR)^{-1}t, \quad (14)$$

решение которого может быть записано в виде

$$R = \frac{\sqrt{k + p \tan(ka/2)} - \sqrt{k - p \cot(ka/2)}}{\sqrt{k + p \tan(ka/2)} + \sqrt{k - p \cot(ka/2)}}. \quad (15)$$

Поскольку период потенциала выбран равным (12), то амплитуда (15) описывает отражение от плоскости, отодвинутой в вакуум на полпериода по отношению к входной поверхности кристалла. Чтобы получить амплитуду отражения непосредственно от входной поверхности кристалла, достаточно умножить выражение (15) на фазовый множитель  $\exp(-ika)$ . Однако эта фазовая поправка несущественна и учитываться не будет.

Нетрудно видеть, что при  $p = 0$  отражение отсутствует. Если же  $p \rightarrow \infty$ , то при  $ka \rightarrow 0$  получаем  $R \rightarrow -1$ .

Выражение (15) можно привести к виду (3), если в качестве  $k'$  принять выражение

$$k' = \sqrt{\frac{k^2 - u_0(ka/2) \cot(ka/2)}{1 + (u_0/k^2)(ka/2) \tan(ka/2)}}. \quad (16)$$

Рассмотрим случай  $ka \rightarrow 1$ . Разложим выражение (16) по степеням  $ka$ . Очевидно, что при малых  $ka$  полученный ряд очень хорошо сходится. Ограничимся членами квадратичными по  $a$ . В результате будем иметь

$$k' = \sqrt{\frac{k^2 - u_0[1 - (ka)^2/12]}{1 + u_0 a^2/4}} - \sqrt{k^2 - \bar{u}_0}, \quad (17)$$

где

$$\bar{u}_0 = u_0[1 - u_0 a^2/4 + (ka)^2/6]. \quad (18)$$

Таким образом, в этом приближении отражение происходит так же как от сплошной среды с потенциалом (18), отличающимся от (1) только небольшими поправками, указанными в (18). Поэтому можно утверждать, что соотношение (5) в этом приближении не имеет места.

Посмотрим теперь, не внесет ли чего-нибудь существенного дискретность самих кристаллических плоскостей, параллельных границе раздела.

## 2.2. Рассеяние на трехмерном периодическом точечном потенциале

Рассеяние на упорядоченно расположенных ядрах внутри одной кристаллической плоскости приводит к дифракционной картине рассеянных волн. Соответственно, отражение от кристаллического полупространства характеризуется амплитудной матрицей дифракционного отражения  $R$ . Матричные элементы  $R_{fi}$  этой матрицы представляют собой амплитуду отражения, при котором плоская волна с волновым вектором  $\mathbf{k}_i$  преобразуется в плоскую волну с волновым вектором  $\mathbf{k}_f$ , где

$$\begin{aligned} a) \mathbf{k}_f &= (\mathbf{k}_{f\parallel}, k_{f\perp}), & b) k_{f\perp} &= \sqrt{k_0^2 - \mathbf{k}_{f\parallel}^2}, \\ c) \mathbf{k}_{f\parallel} &= \mathbf{k}_{i\parallel} + \vec{\tau}_{fi}, & d) \vec{\tau}_{fi} &= (2\pi/a)(m_{fi}, n_{fi}, 0), \end{aligned} \quad (19)$$

$\mathbf{k}_{i\parallel}$  — компоненты волнового вектора  $\mathbf{k}_i$ , параллельные поверхности кристалла, а  $m_{fi}, n_{fi}$  — целые числа, которые соответствуют вектору  $\vec{\tau}_{fi}$  обратной решетки одной кристаллической плоскости, параллельной входной поверхности отражающего кристалла.

Матрица  $R$  определяется через дифракционные матрицы отражения  $r$  и пропускания  $t$  одного элементарного слоя, т.е. кристаллического слоя толщиной в одну элементарную ячейку, параллельного границе раздела. Соответствующее уравнение по виду совпадает с уравнением (14) в одномерном случае. Единственное отличие состоит в том, что, когда  $r, t$  и  $R$  — матрицы, их нельзя переставлять произвольным образом.

Матрицы  $r$  и  $t$  для идеальной решетки вычисляются аналитически [2] и представляются в виде

$$a) r = r_0 \mathcal{E} \mathcal{K} \mathcal{N} \mathcal{E}, \quad b) t = \mathcal{E} (1 + r_0 \mathcal{K} \mathcal{N}) \mathcal{E}, \quad (20)$$

где

$$a) r_0 = -i \frac{p/k_{0\perp}}{1 + ip \sum_n (k_{0\perp}/k_{n\perp})}, \quad b) p = 2\pi N_0 b_0 a, \quad (21)$$

$N_0$  — число ядер в единице объема,  $b_0$  — когерентная длина рассеяния ядер кристалла,  $a$  — расстояние между ядрами, матрица  $\mathcal{N}$  содержит одни единицы ( $\mathcal{N}_{fi} = 1$ ), матрицы  $\mathcal{E}, \mathcal{K}$  диагональны, их матричные элементы равны

$$\begin{aligned} a) \mathcal{E}_{fi} &= e_f \delta_{fi}, & b) e_f &= \exp(ik_{f\perp} a/2), \\ c) \mathcal{K}_{fi} &= K_f \delta_{fi}, & d) K_f &= k_{0\perp}/k_{f\perp}, \end{aligned} \quad (22)$$

а  $\delta_{fi}$  — символ Кронекера, равный 1 при  $i = f$  и нулю при  $i \neq f$ .

Посмотрим, насколько сильно матрицы (20) отличаются от скалярных амплитуд (13) при малых  $k_0 a$ . Матричные элементы  $r_{fi}$  имеют вид

$$r_{fi} = r_0 \frac{k_{0\perp}}{k_{f\perp}} \exp[ia(k_{f\perp} + k_{i\perp})/2]. \quad (23)$$

При малых  $k_0 a$  все  $k_{n\perp}$ , кроме  $k_{0\perp}$ , оказываются чисто мнимыми. Поэтому все  $r_{nm}$ , кроме  $r_{00}$ , экспоненциально малы с показателями экспонент порядка  $\pi n$ , где  $n$  — целые числа. Таким образом, всеми, кроме одного, матричными элементами матриц (20) можно пренебречь.

Выражение (21) можно привести к виду

$$r_0 = -p'/(p' - ik_{0\perp}), \quad (24)$$

где

$$p' = p \frac{1}{1 + p \sum_{n \neq 0} (i/k_{n\perp})} \quad (25)$$

при малых  $k_0 a$  — вещественное число. Поэтому амплитуды  $r_{00}$  и  $t_{00}$ , согласно (23), равны

$$a) r_{00} = \exp(iak_{0\perp}) \frac{-p'}{p' - ik_{0\perp}}, \quad b) t_{00} = \exp(iak_{0\perp}) \frac{-ik_{0\perp}}{p' - ik_{0\perp}}. \quad (26)$$

Отсюда следует, что, если ограничиться только зеркальным отражением, т.е. пренебречь экспоненциально затухающими дифрагированными волнами, то рассеяние на каждой кристаллической плоскости происходит так же, как если бы ей был приписан потенциал вида (9), и учет дискретности приводит только к замене  $u_0$  на потенциал  $u'_0$ , отличающийся от  $u_0$  небольшой дополнительной поправкой. Найдем эту поправку в наименьшем приближении по  $k_0 a$ .

Для этого заметим, что индекс суммирования  $n$  в (25) обозначает номер вектора обратной решетки  $\tau$ , определяемого в соответствии с выражением (19d). При  $k_0 a \ll 1$  имеем  $k_0 \ll \tau_n$ , и потому

$$k_{n\perp} \approx i\tau_n \approx 2\pi i \sqrt{l_n^2 + m_n^2}/a, \quad (27)$$

где  $l_n$  и  $m_n$  — целые числа. Подставив (27) в (25), получим

$$u'_0 \approx u_0 [1 - (u_0 a^2 / 4\pi) \sum_{||l||+|m| \neq 0} (1/\sqrt{l^2 + m^2})]. \quad (28)$$

Сумма в (28) расходится; однако, как показано в [2], этот ряд является формальным представлением хорошо сходящейся функции и может быть просуммирован так, как указано в [2, 8]. Для пояснения укажем, что ряд  $\sum x^n$  при больших значениях  $x$  представляет собой формальное разложение функции  $1/(1-x)$ , и, чтобы найти значение этого ряда при  $x = 2$ , нужно найти значение в этой точке порождающей его функции. В данном случае это значение равно -1. Аналогичным образом производится суммирование и интересующего нас ряда. В результате получаем

$$u'_0 \approx u_0 (1 + u_0 a^2 / 4\pi). \quad (29)$$

Подставив (29) в (18) вместо  $u_0$ , окончательно получим, что зеркальное отражение от кристалла описывается так же, как и от сплошной среды с потенциалом

$$\bar{u}_0 \approx u_0 [1 - u_0 a^2 (\pi - 1) / 4\pi + (k_{0\perp} a)^2 / 6]. \quad (30)$$

Учет дискретности кристаллической плоскости привел к дополнительной по отношению к выражению (18) малой поправке

$$\Delta u_0 / u_0 = u_0 a^2 / 4\pi.$$

Таким образом, и в этом приближении соотношение (5) не имеет места.

### 2.3 Учет перерасеяния экспоненциально затухающих волн

Результат (30) может показаться неубедительным, поскольку, ограничившись только зеркальным отражением, мы пренебрегли дифрагированными волнами. Конечно, при дифракции медленных нейтронов

на кристаллической плоскости дифрагированные волны оказываются экспоненциально затухающими, однако экспоненциально затухающие волны могут достичь следующей кристаллической плоскости и на ней испытать обратную дифракцию, преобразовавшись в распространяющуюся волну. Нетрудно рассчитать соответствующие процессы по теории возмущений, приняв в качестве возмущения однократный процесс дифракции. Однако лучше воспользоваться системой уравнений для матрицы  $R$  вида (14), поскольку она позволяет найти необходимые поправки с любой желаемой точностью.

Уравнения (14) и выражения (20) для матриц  $r$  и  $t$ , показывают, что матрицу  $R$  можно представить в виде

$$a) R = r_0 \text{---}, \quad b) -f_i = -i f. \quad (31)$$

Это позволяет преобразовать уравнение (14) для матрицы — следующим образом

$$\text{---}^2 \text{---}^2 = (1 + r_0 \text{---}^2) \gamma - (1 + r_0 \text{---}^2), \quad (32)$$

где

$$a) \gamma = 1/(1 - \rho), \quad b) \rho = r_0^2 \sum_{m,n} e_m^2 K_{m-mn} K_n e_n^2. \quad (33)$$

Из (32) следует, что матричные элементы приведенной матрицы — можно представить выражениями:

$$a) -f_i = \gamma s_f s_i / (1 - e_f^2 e_i^2), \quad b) s_f = 1 + r_0 e_f^2 \sum_m -f_m K_m e_m^2. \quad (34)$$

Заметим, что формула (34a) аналогична формуле Брейта-Вигнера. Коэффициенты  $s_i$  играют роль корней из приведенных парциальных ширин, а выражение

$$1 - \exp(ik_{f\perp} a + ik_{i\perp} a),$$

которое при некоторых значениях  $k_{f\perp} + k_{i\perp}$  может обращаться в нуль, играет роль резонансного знаменателя.

Система уравнений (34) позволяет с любой наперед заданной точностью вычислить матричные элементы  $-f_i$  и, соответственно,  $R_{fi}$ .

Однако мы обратимся непосредственно к уравнению (32), которое приводит к системе уравнений для матричных элементов  $\mathcal{R}_{fi}$ :

$$\mathcal{R}_{fi} = \gamma(1 + r_0 e_f^2 \sum_m \mathcal{R}_{fm} K_m e_m^2)(1 + r_0 \sum_m e_m^2 K_m \mathcal{R}_{mi} e_i^2) / (1 - e_f^2 e_i^2). \quad (35)$$

После подстановки (33) получим

$$\mathcal{R}_{fi} = \frac{(1 + r_0 e_f^2 \sum_m \mathcal{R}_{fm} K_m e_m^2)(1 + r_0 \sum_m e_m^2 K_m \mathcal{R}_{mi} e_i^2)}{(1 - e_f^2 e_i^2)(1 - r_0^2 \sum_{mn} e_m^2 K_m \mathcal{R}_{mn} K_n e_n^2)}. \quad (36)$$

В качестве нулевого приближения ограничимся зеркальным отражением, т.е. пренебрежем дифракцией на отдельной кристаллической плоскости. Обозначим

$$x \equiv R_{00} = r_0 \mathcal{R}_{00} e_0^2.$$

Пренебрегая в числителе и знаменателе уравнений (36) членами, содержащими  $\mathcal{R}_{0m}$  и  $\mathcal{R}_{mn}$  при  $m, n \neq 0$ , поскольку они содержат малые множители порядка  $k_0 a \exp(-2\pi) \approx 10^{-5}$  и  $[k_0 a \exp(-2\pi)]^2 \approx 10^{-10}$ , соответственно, получим уравнение

$$x = x_0 = r_0 e_0^2 (1 + x_0 e_0^2)^2 / (1 - e_0^4)(1 - r_0 x_0 e_0^2), \quad x_0 \equiv R_{00}^{(0)}. \quad (37)$$

Решение этого квадратного уравнения, как и должно быть, полностью совпадает с выражением (15) при замене  $p$  на  $p'$  или  $u_0$  в (18) на потенциал  $u'_0$ , определенный в (29).

Учтем теперь в первом приближении слагаемые с  $y \equiv \mathcal{R}_{0m}$ . В нулевом приближении из (36) следует, что

$$y = y_0 = (1 + x_0 e_0^2) / (1 - r_0 x_0 e_0^2), \quad y \equiv \mathcal{R}_{0m}^{(0)}. \quad (38)$$

Будем теперь искать  $x \equiv R_{00}$ , полагая, что  $x = x_0 + \Delta x_0$ . Тогда из (36) будет следовать

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = e_0^2 \left[ 2 \frac{\Delta x_0 - y_0 r_0 s a k_{0\perp} / 2\pi}{1 + x_0 e_0^2} + r_0 \frac{\Delta x_0 - 2y_0 r_0 s a k_{0\perp} / 2\pi}{1 - r_0 x_0 e_0^2} \right], \quad (39)$$

где

$$s = \sum_{m,n} \frac{\exp(-2\pi\sqrt{m^2+n^2})}{\sqrt{m^2+n^2}} \approx \exp(-2\pi) \approx 2 \times 10^{-3}, \quad (40)$$

и суммирование производится по всем  $m$  и  $n$ , кроме  $m = n = 0$ . Выражение (40) с учетом (38) и (37) преобразуется к виду

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = -2i(1 + r_0) s k_{0\perp} a / 2\pi \frac{x_0(1 - e_0^4)}{(1 + x_0 e_0^2)(1 - x_0 e_0^2 - 2r_0 x_0 e_0^2)}. \quad (41)$$

Заметим, что в области полного отражения  $|x_0| = 1$ , т.е.

$$a) x_0 = \exp(-2i\phi), \quad b) \phi = \arctan |k'_{0\perp} / k_{0\perp}|, \quad (42)$$

и потому  $\Delta x_0 / x_0 = 2i\Delta\phi$ . Учитывая, что

$$a) r_0 + 1 = -ik_{0\perp} \exp(i\chi) / \sqrt{p'^2 + k_{0\perp}^2}, \quad b) \chi = \arctan(k_{0\perp} / p'), \quad (43)$$

получим

$$i\Delta\phi = -is \frac{k_{0\perp}^2 a}{4\pi\sqrt{p'^2 + k_{0\perp}^2}} \frac{\sin(k_{0\perp} a)}{\cos(\phi - k_{0\perp} a/2) \cos(\phi - \chi - k_{0\perp} a/2)}. \quad (44)$$

Отсюда следует, что поправка к фазе чисто вещественна, и имеет величину порядка  $sk_{0\perp} a$ . Учитывая (42b), можно сделать такое же заключение относительно поправки к  $k'_{0\perp}$ , а, значит, и относительно  $u_0$ . При  $k_{0\perp} \ll p' \equiv u'_0 a$  имеем  $\phi \approx \pi/2$ ,  $\chi \approx k_{0\perp} a / u'_0 a^2$ , и поправка  $\Delta\phi$  приобретает значение порядка  $sk_{0\perp} a / 2\pi$ . Соответственно, поправка к потенциалу  $u'_0$  равна

$$\Delta u'_0 = s\sqrt{u_0} a k_{0\perp}^2 / 2\pi.$$

Таким образом, и здесь не возникает никаких намеков на возможность перехода дисперсионного соотношения к виду (5).

### 3. Анализ результатов работы [1]

Из всего вышесказанного следует, что строгое решение уравнений МРВ приводит только к небольшим поправкам к потенциалу  $u_0$ , и, значит, утверждение работы [1] несправедливо. Однако, это заключение опирается на общепринятые представления, и его справедливость ограничена рамками этих представлений. Вполне возможно, что для существенного продвижения в понимании процессов отражения необходимо изменить саму идеологию. Посмотрим, что содержится в работе [1] с этой точки зрения. Иными словами, необходимо выяснить, какие введены дополнительные гипотезы, как эти гипотезы обоснованы и какие строгие выводы получены на основе этих гипотез.



### 3.1. Гипотезы

Чтобы сформулировать основную гипотезу, авторы рассматривают тонкий, бесконечно протяженный слой вещества, который мало возмущает первичную волновую функцию нейтрона, выбранную в виде падающей плоской волны с волновым вектором  $k_0$ . (Фактически авторы рассматривают нормальное падение на слой, но все их рассуждения справедливы, как будет показано ниже, для падения под любым углом. При этом под  $k_0$  следует понимать нормальную компоненту волнового вектора.)

Чтобы найти возмущение волновой функции внутри слоя толщины  $\xi \gg a$  ( $a$  — межатомное расстояние), обусловленное наличием самого слоя, авторы пользуются методом Гюйгенса и складывают сферические волны, пришедшие в данную точку от всех рассеивателей слоя. Обычно в таких случаях рассеянные волны берутся в виде невозмущенных сферических волн

$$\Psi_1 = -\frac{b}{r} \exp(ik_0 r), \quad (45)$$

тогда для той части волновой функции, которая обусловлена возмущением, получается выражение

$$\psi_1 = -b\xi N_0 \int_0^\infty \frac{\exp(ik_0 \rho)}{\rho} 2\pi \rho d\rho = -i\xi 4\pi N_0 b / 2k_0. \quad (46)$$

Основная гипотеза авторов состоит в том, что при  $k_0 \ll u_0 a$  рассеянные сферические волны должны содержать не вакуумный волновой вектор  $k_0$ , как в (45) и (46), а волновой вектор  $k$  внутри среды, т.е.

$$\Psi_1 = -\frac{b}{r} \exp(ikr). \quad (47)$$

### 3.2. Обоснование гипотезы

Обоснование состоит в том, что при малых  $k_0$  величина  $|\xi 4\pi N_0 b / 2k_0|$  может стать больше единицы. Это считается недопустимым, поскольку возмущенная часть волновой функции становится больше невозмущенной. Если поправить теорию возмущения, выбрав в качестве рассея-

ных волн выражение (47), то поправка окажется равной

$$\psi_1 = -b\xi N_0 \int_0^\infty \frac{\exp(ik\rho)}{\rho} 2\pi \rho d\rho = -i\xi 4\pi N_0 b / 2k. \quad (48)$$

Далее, из сопоставления выражения (48) с полной волновой функцией внутри слоя, определенной обычным образом и разложенной по степеням  $\xi$  с точностью до линейного члена, находится соотношение (5).

Здесь необходимо отметить следующие обстоятельства:

- 1) волна, рассеянная  $i$ -м ядром, содержит, кроме сферической волны, также и падающую  $\exp(ik_0 r_i)$ . Учет этого множителя приводит к тому, что все выводы авторов должны быть отнесены не к полному волновому вектору, а к его нормальной по отношению к слою компоненте;

- 2) неравенство

$$|\xi 4\pi N_0 b / 2k_0| \leq 1 \quad (49)$$

нарушается не при выполнении условия (4), а при значительно больших  $k_0$ , поскольку  $\xi \gg a$ . Поэтому, если бы авторы были правы, то соотношение (5) выполнялось бы при  $k_0 \approx u_0 \xi / 2$ , т.е. полное отражение нейтронов, в частности, хранение УХН в сосудах, было бы запрещено, что полностью противоречит эксперименту;

- 3) поставленная ими цель добиться выполнения неравенства (49) оказалась недостигнутой, поскольку даже при  $\xi \approx a$  абсолютное значение

$$u_0 \xi / \sqrt[3]{u_0 k_0}$$

- при  $k_0 \leq u_0^2 a^3$  снова больше единицы;

- 4) поскольку рассеянные волны формируют волновую функцию не только внутри среды, но и снаружи, то отраженная и прошедшая сквозь слой волны должны иметь энергию иную, нежели у падающей. Если рассеивающие ядра строго фиксированы на своих местах и их внутренняя структура не учитывается, то изменение энергии означает нарушение закона сохранения энергии.

Заметим также, что при наличии в среде неоднородностей рассеяние на них рассчитывается по теории возмущений с помощью волновых функций, имеющих внутри среды волновой вектор  $k$ , а не  $k_0$  (метод искаженных волн), но это не сферические функции вида (45), а функции, учитывающие граничные условия. Возможно, что с помощью таких же функций можно переформулировать и теорию МРВ, но тогда нужно позаботиться о том, чтобы перерассеяние не оказалось пересчитанным дважды.

### 3.3. Строгие выводы

Поскольку вещество можно охарактеризовать либо потенциалом (1), либо величиной волнового вектора  $k$  внутри него, то дальнейшее решение задачи приводит к амплитуде отражения УХН, совпадающей с (3), откуда однозначно определяется коэффициент потерь

$$\mu = 1 - |R|^2 = 2\sqrt{k_0^2/u_0}. \quad (50)$$

Таким образом, принятая гипотеза эквивалентна предположению, что мнимая часть амплитуды рассеяния на одном ядре должна быть изменена в соответствии с (50), что приводит к увеличению коэффициента потерь. Вопрос, однако, состоит не в том, чтобы описать аномальный коэффициент потерь УХН в ловушках, это всегда можно сделать, приписав достаточно большую мнимую часть амплитуде рассеяния, а в том, чтобы выяснить те каналы утечки, которым соответствует эта большая мнимая часть, т.е. куда деваются пропавшие нейтроны.

Чтобы описать пропажу нейтронов, авторы работы вводят термин "инфильтрация" и поясняют его следующим образом. Полная волновая функция представляется в виде

$$\psi = \psi_c(x)e^{i\omega_0 t} + \psi_n(x, t), \quad (51)$$

где первое слагаемое отвечает когерентной волновой функции, получаемой с помощью уравнения Шредингера с волновым вектором (5) внутри среды, а второе слагаемое ответственно за утечку недосчитываемых нейтронов. (Далее цитирую)

За кажущееся нарушение унитарности ответственна волновая  $\psi_n$ . Она, по сути дела, описывает инфильтрацию нейтронов в вещество.

Эта нестационарная часть состояния  $\psi_n(x, t)$  сравнительно вяло эволюционирует... (конец цитаты).

Разумеется, в конечном счете все потери связаны с неупругим рассеянием и поглощением, и авторы это отмечают. Однако они не указывают никакого механизма усиления этих процессов, никак не поясняют смысл дополнительной функции  $\psi_n$ , и поэтому эта дополнительная функция только отражает их желание восстановить выполненные условия унитарности, но не восстанавливает его.

Таким образом, пока большая величина коэффициента потерь не соотносена с конкретными физическими процессами, слова "инфильтрация" и "эффективное поле" являются только синонимами слов "аномальные потери".

### 4. Заключение

Подводя итоги, можно сказать, что утверждение в работе [1] о несправедливости общепринятого закона дисперсии (2b) не имеет под собой никаких оснований, принятая авторами гипотеза не обоснована, а полученные с ее помощью результаты противоречат требованию унитарности и закону сохранения энергии, а потому с точки зрения физики неприемлемы.

Результаты работы [1] относятся не к полной энергии нейтрона, а к той ее части, которая отвечает нормальному движению по отношению к поверхности вещества. Поэтому, будь они правильны, они были бы приложимы к нейтронам во всем диапазоне энергий. В принципе, однако, можно так сконструировать зависимость амплитуды рассеяния  $b$  от энергии, чтобы получить желаемые ими соотношения только для сверхнизких энергий, когда только полная энергия удовлетворяет неравенству (4). Но и тогда остаются вопросы: 1) как возникает такая зависимость и 2) куда деваются нейтроны, потери которых описываются коэффициентом (50). Ответов на эти вопросы в работе [1] нет.

## Литература

- [1] Носов В.Г., Франк А.И. Сверхмедленные нейтроны и закон дисперсии ультрахолодных нейтронов. Препринт ИАЭ-5403/1, М. — 1991.
- [2] Игнатович В.К. Физика ультрахолодных нейтронов. М.: Наука, 1986; с. 116; The Physics of Ultracold Neutrons. Oxford: Clarendon Press, 1990.
- [3] Fermi E., Zynn W. Phys. Soc. Cambridge Conf. Rep. 92, Chicago, 1947.
- [4] Foldy L.L. The Multiple Scattering of Waves. 1. General Theory. Phys. Rev. 1945, v. 67, p. 107.
- [5] Lax M. Multiple Scattering of Waves. Rev. Mod. Phys. 1951, v. 23, p. 287.
- [6] Lax M. Multiple Scattering of Waves. II. The Effective Field in Dense Systems. Phys. Rev. 1952, v. 85, p. 621.
- [7] Франк И.М. Нейтронная оптика и УХН. УФН 1991, т. 161, N. 11, с. 108.
- [8] Glaser M.I. Evaluation of lattice sums. I. Analitic procedure. J. Math. Phys. 1973, v. 14, p. 409.

Рукопись поступила в издательский отдел  
24 марта 1992 года.