

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



                      
Н-429

29/xII-70  
P4 - 9195

К.Неергорд, В.В.Пашкевич, С.Фрауендорф

4969/2-75

ОБОЛОЧЕЧНАЯ ЭНЕРГИЯ  
БЫСТРО ВРАЩАЮЩИХСЯ ЯДЕР.

Формулировка модели и метод расчета

**1975**

К. Неергорд,<sup>1</sup> В. В. Пашкевич, С. Фраундорф<sup>2</sup>

ОБОЛОЧЕЧНАЯ ЭНЕРГИЯ  
БЫСТРО ВРАЩАЮЩИХСЯ ЯДЕР.

Формулировка модели и метод расчета

*Направлено в Nuclear Physics*

---

<sup>1</sup> Адрес с 1 сентября 1975 года: Институт ядерной физики. Центр по ядерным исследованиям, Юлих, ФРГ.

<sup>2</sup> Центральный институт ядерных исследований, Россендорф, ГДР.

## 1. Введение

Изучение оболочечных эффектов в быстро вращающихся ядрах /1, 2/ важно для понимания свойств ядер в этой области фазового пространства, которая недавно стала доступной /3, 4/ для экспериментального исследования.

В настоящей работе теория, развитая ранее /1/, применяется для изучения неаксиальной деформации во всем интервале возможных спинов в редкоземельных ядрах вблизи линии бета-стабильности. На важность учета неаксиальной деформации при больших спинах указывалось в работах Бора и Моттельсона /5, 6/. Конкретная модель, используемая в этой связи, описана в разд. 2 и 3. Метод расчета оболочечной поправки и некоторые результаты его использования представлены в разд. 4 и 5.

В приложении проводится сравнение наших оценок с аналогичными выводами, сделанными в рамках модели вращаемого анизотропного гармонического осциллятора, для которой известно точное решение /7/.

Часть результатов, представленных здесь, была опубликована ранее /8/.

## 2. Формулировка модели

Для расчета оболочечных эффектов необходимо конкретизировать вид одночастичного потенциала  $\bar{V}$ , "гладкой" части R-функции  $\bar{R}^{1/2}$  и форму ядра.

Практически невозможно рассматривать одновременно большое число параметров. Поскольку мы в особенности интересуемся проблемой трехосных деформаций,

рассмотрим два параметра, описывающих произвольную эллипсоидальную форму. Такая форма однозначно характеризуется тремя главными полуосями  $R_i$ ,  $i = 1-3$ . Предполагая сохранение объема, можно выразить  $R_i$  через обычные параметры  $\beta$  и  $\gamma$ :

$$R_i = R_0(\beta, \gamma) \left(1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos(\gamma - i \frac{2\pi}{3})\right), \quad /1/$$

где  $R_0$  дается соотношением

$$R_1 R_2 R_3 = A r_0^3, \quad r_0 = 1,225 \text{ ферми.} \quad /2/$$

Ограничимся рассмотрением таких конфигураций, в которых спин  $\vec{I}$  параллелен оси 1. Тогда из симметрии задачи следует, что и угловая частота  $\vec{\omega}$  должна быть параллельной той же оси и что обе величины можно считать скалярными. Энергия  $E(\beta, \gamma, I)$  будет симметричной относительно линии  $\sin(\gamma - 2\pi/3) = 0$  в  $\beta$ - $\gamma$ -плоскости, так что интересной областью изменения параметра  $\gamma$  является <sup>/9/</sup>

$$-\pi/3 \leq \gamma \leq 2\pi/3. \quad /3/$$

Оболочечные поправки выражаются <sup>/1/</sup> через собственные значения оператора

$$r = t - \vec{j} \cdot \vec{\omega} + \vec{V}, \quad /4/$$

где  $t$  - одночастичная кинетическая энергия, а  $\vec{j}$  - одночастичный угловой момент.

Остается выбрать разумные выражения для  $\vec{R}(\beta, \gamma, \omega)$  и  $\vec{V}(\beta, \gamma, \omega)$ . О зависимости  $\vec{V}$  от  $\omega$  делается простейшее предположение, а именно,  $\vec{V}(\beta, \gamma, \omega) = \vec{V}(\beta, \gamma, 0)$ . Чтобы иметь возможность провести численные расчеты для трехосных форм, в качестве  $\vec{V}(\beta, \gamma, 0)$  было выбрано выражение Нильссона с учетом  $\epsilon_2$ -деформации. Во втором члене в выражении  $/4/$   $\ell_1$  было заменено на "растянутую" величину  $\ell_1^1$  /ср. работу <sup>/10/</sup> /. Тем самым матрица  $r(\beta, \gamma, \omega)$  разделяется на подматрицы вдоль

главной диагонали, максимальная размерность которых равна 55, когда включаются главные оболочки вплоть до  $N = 9$ . Частоты гармонического осциллятора были выбраны следующим образом:

$$\omega_i = \frac{(R_1 R_2 R_3)^{1/3}}{R_i} \bar{\omega}, \quad \bar{\omega} = \frac{55}{A^{1/3}}. \quad /5/$$

Такое значение  $\bar{\omega}$ , которое на 35% больше обычного  $41/A^{1/3}$  МэВ, было выбрано для того, чтобы обеспечить вогнутость <sup>/1/</sup>  $R(\beta, \gamma, \omega)$ . В остальном мы используем обычные параметры для редкоземельной области <sup>/11/</sup>  $\kappa_{p,n} = 0,0637$ ;  $\mu_p = 0,6$ ;  $\mu_n = 0,42$ .

Зависимость  $R$  от  $\omega$  должна быть учтена. Действительно, ротационная энергия составляет основную часть энергий при больших спинах. Форма зависимости была выбрана следующей:

$$\vec{R}(\beta, \gamma, \omega) = U_{LD}(\beta, \gamma) - \frac{1}{2} J_{rig}(\beta, \gamma) \omega^2, \quad /6/$$

что эквивалентно

$$\vec{E}(\beta, \gamma, I) = \vec{R}(\beta, \gamma, \omega) + \omega I = U_{LD}(\beta, \gamma) + \frac{I^2}{2J_{rig}(\beta, \gamma)}, \quad /7/$$

где  $\omega$  получено из выражения <sup>/1/</sup>

$$\vec{I}(\beta, \gamma, \omega) = I. \quad /8/$$

Здесь  $J_{rig}(\beta, \gamma)$  означает момент инерции относительно 1-ой оси однородного эллипсоида с главными полуосями, даваемыми уравнением <sup>/1/</sup>, т.е.

$$J_{rig}(\beta, \gamma) = \frac{1}{5} AM(R_2^2 + R_3^2), \quad /9/$$

где  $M$  - масса нуклона,  $M c^2 = 939,15$  МэВ.

Энергия жидкой капли была разложена <sup>/12/</sup> по степеням  $\beta$  вплоть до третьего порядка,

$$U_{LD}(\beta, \gamma) = (16 \text{ МэВ}) A^{2/3} \left[ \frac{2}{5}(1-x) \left( \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \right)^2 - \frac{4}{105}(1+2x) \left( \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \right)^3 \cos 3\gamma \right], \quad /10/$$

$$x = \frac{1}{45} z^2 / \Lambda.$$

В принципе, выражение /7/ для "гладкой" энергии идентично тому, которое рассматривалось при изучении различных классических моделей /см. работу /13/ и ссылки в ней/. В табл. 1 результаты для вращающегося основного состояния классического ядра, полученные на основе формул /9/ и /10/, сравниваются с соответствующими результатами работы /13/. Видно, что наша простая классическая модель воспроизводит результаты более детальных вычислений с хорошей точностью. Особенно следует отметить согласие в критических спинах  $I_I$  и  $I_{II}$  /определение этих величин дано в работе /13/./

### 3. "Гладкий" угловой момент в модели Нильссона

При определении R-функции /1/ подразумевается, что она является вогнутой функцией  $\omega$ . В нашем случае это означает, что должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial I(\beta, \gamma, \omega)}{\partial \omega} \geq 0. \quad /11/$$

Оболочечная часть углового момента /1/,

$$I_{sh}(\beta, \gamma, \omega) = \sum_{\text{по протонам}} \sum_{\epsilon_i < \lambda} \langle j_i \rangle_i, \quad /12/$$

и нейтронам, а также и "гладкая" часть /1/,

$$\tilde{I}(\beta, \gamma, \omega) = J_{rig}(\beta, \gamma) \omega, \quad /13/$$

Таблица 1

I	Наша модель $\beta$	$E$ (МэВ)	$\beta$	Работа /13/ $E$ (МэВ)	$E$ (МэВ)
20	0,03	- 60	0,04	- 60	2,6
40	0,11	- 60	0,14	- 60	10,2
60	0,23	- 60	0,30	- 60	22,8
70	0,30	- 60	0,41	- 60	30,3
80	0,40	- 43	0,51	- 60	38,6
90	нестабилен				
$I_I$	$\approx 79$				80,7
$I_{II}$	$> 80,$	$< 90$			85,7

а) Получены на основе главных полуосей, приведенных в работе /13/ и уравнения (1).

удовлетворяют этому условию. Однако полный угловой момент дается выражением

$$I = I_{sh} - \tilde{I}_{sh} + \tilde{I}, \quad /14/$$

где

$$I_{sh}(\beta, \gamma, \omega) = \sum_i \tilde{n}_i \langle j_i \rangle_i \quad /15/$$

по протонам  
и нейтронам

Здесь  $\tilde{n}_i$  - "гладкие" числа заполнения  $\omega$ .  
Вычисляя  $I_{sh}$  в модели Нильссона с  $\omega = 4A^{-1/3}$  МэВ, мы заметили, что с хорошей точностью

$$\tilde{I}_{sh}(\beta, \gamma, \omega) = \tilde{J}_{sh}(\beta, \gamma) \omega, \quad /16/$$

где  $\tilde{J}_{sh} = 1,30 J_{rig}$  /см. рис. 1/. Следовательно, когда производные  $I_{sh}$  довольно близки к нулю, условие вогнутости может нарушиться.

В наших вычислениях вогнутость  $R(\beta, \gamma, \omega)$  была восстановлена повышением на 35% значения  $\omega$ , т.е. использовалось  $\omega = 55/A^{1/3}$  МэВ, как это рекомендовано в /14/, что пропорционально уменьшает значение  $\tilde{J}_{sh}$ . Следует подчеркнуть, однако, что такой выход из положения следует считать крайней мерой. Существование такой проблемы в сильной степени указывает на необходимость использования более реалистического потенциала, как например, потенциала типа Вудса-Саксона.

Расхождение между  $J_{sh}$ , полученным в потенциале Нильссона, и твердотельным моментом инерции, как это можно проследить, связано с присутствием зависящего от скорости члена с  $\tilde{\rho}^2$  в потенциале Нильссона. Известно /6/, что в локальном потенциале приближение Томаса-Ферми, обобщенная форма которого является хорошим приближением /15-18/ для "гладкой" части плотности в оболочечной модели, дает уравнение /16/ с  $J_{sh}$ , равным моменту инерции распределения Томаса-Ферми. Рассмотрим, однако, потенциал, составленный из локального потенциала плюс член с  $\tilde{\rho}^2$ ,

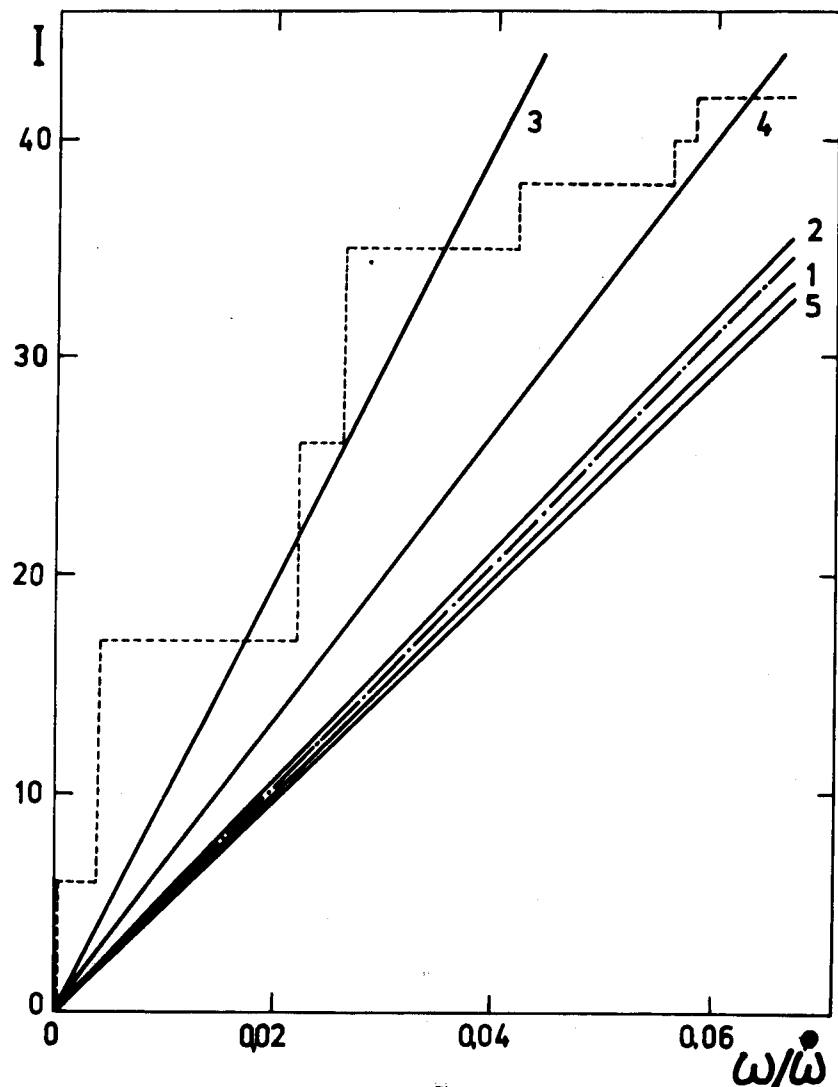


Рис. 1. График зависимости  $\tilde{I}_{sh}$  от  $\omega$  в различных моделях: 1. Гармонический осциллятор в приближении, когда  $\ell_1$  заменено на  $\ell_1^2$  /см. текст/. 2. Как в пункте 1, плюс спин-орбитальное взаимодействие Нильссона. 3. Как в пункте 2, плюс член с  $\tilde{\rho}^2$ . 4. Полный потенциал Нильссона, как в работе /11/. 5. Точное выражение для гармонического осциллятора. Все расчеты проведены для  $^{150}\text{Gd}$  с  $\beta = 0,133$  и  $\gamma = -60^\circ$ . Штрих-пунктирной линией показана функция  $J_{rig} \cdot \omega$ , пунктир - функция  $I_{sh}(\omega)$  в модели 4. /При  $\gamma = -60^\circ$  это ступенчатая функция/.

$$V_{\vec{r}^2} = -\omega \mu \vec{\ell}^2. \quad /17/$$

Эта добавка может быть представлена перенормировкой массы нуклона, входящей в момент инерции, в направлении, перпендикулярном  $\vec{r}$ . Соответствующая эффективная масса  $M^*(\vec{r})$  равна

$$\frac{1}{M^*(\vec{r})} = \frac{1}{M} - 2\omega \mu \vec{r}^2. \quad /18/$$

Эта эффективная масса определяет сдвиг среднего момента, наведенный вращением  $\omega$  в точке  $\vec{r}$ . Следовательно, приближение Томаса-Ферми дает в этом случае

$$\tilde{J}_{sh} = \int M^*(\vec{r}) \rho(\vec{r}, \omega) (x_2^2 + x_3^2) d\tau. \quad /19/$$

Эта величина превышает соответствующую величину в потенциале без члена с  $\vec{\ell}^2$ ,

$$(\tilde{J}_{sh})_{\mu=0} = M \int \rho_{\mu=0}(\vec{r}, \omega) (x_2^2 + x_3^2) d\tau, \quad /20/$$

хотя соответствующие распределения  $\rho(\vec{r}, \omega)$  и  $\rho_{\mu=0}(\vec{r}, \omega)$  приблизительно равны между собой. В действительности, как включение члена с  $\vec{\ell}^2$ , так и конечное значение  $\omega$  меняют среднеквадратичный радиус только на несколько процентов. /Мы благодарны С.Нильссону за полезное обсуждение этого вопроса/. Пренебрегая этими малыми изменениями и используя распределение  $\rho_{\mu=0}(\vec{r}, \omega)$  сферического гармонического осциллятора в обеих формулах /19/ и /20/, получаем

$$\tilde{J}_{sh} / (\tilde{J}_{sh})_{\mu=0} = 1,76,$$

что действительно близко к "эмпирическому" отношению  $\approx 1,9$ , следующему из рис. 1.

Из рис. 1 видно также, что включение члена  $\vec{\ell}^2$  с  $\langle \vec{\ell}^2 \rangle$  уменьшает расхождение на 70%. Вклад в  $\tilde{J}_{sh}$  спин-орбитального члена мал.

#### 4. Детали численных расчетов и точность вычислений

Вычисления выполнялись следующим образом. Во-первых, в каждой точке координатной сетки в  $\beta$ - $\gamma$ -плоскости рассчитывались величины  $1/I(\beta, \gamma, \omega)$  и  $E(\beta, \gamma, I(\beta, \gamma, \omega))$  при значениях  $\omega$ , равных  $\omega/\omega_0 = 0,00; 0,03; 0,06; 0,08; 0,10$  и  $0,12$ . Затем для того, чтобы получить величину  $E(\beta, \gamma, I)$  при заданном значении  $I$ , проводилась интерполяция между рассчитанными точками с учетом соотношения /6/ работы /11/. Окончательно интерполяция проводилась между точками координатной сетки по  $\beta$  и  $\gamma$ .

Координатная сетка в  $\beta$ - $\gamma$ -плоскости была выбрана с постоянным шагом по  $\beta$ ,  $\Delta\beta = 1/30$ . Рассматривались три интервала по  $\beta$ , в каждом из которых шаг по  $\gamma$  выбирался постоянным, свой для каждого интервала, как это указано в табл. 2.

В вычислениях по методу Струтинского учитывались протонные и нейтронные уровни из больших оболочек вплоть до  $N=9$ . Параметр сглаживания выбирался равным  $1,0 \omega_0$ ; учитывалась поправка на кривизну до 6-го порядка включительно. Качество плато для  $\delta R$  и  $\delta I$  оказалось таким же хорошим, как и в случае малых  $\omega$  /19/.

Рассматривалось также влияние включения большой оболочки с  $N=10$ . Максимальная поправка доходила до  $\approx 0,5$  МэВ в  $\delta R$  и  $\approx 1$  для  $\delta I$ .

Таблица 2

Интервал по $\beta$	Интервал по $\gamma$	Шаг по $\gamma$
0,000 - 0,167	(-60) - 30	18
0,200 - 0,567	(-60) - $22\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$
0,600 - 0,900	(-28) - 8	4

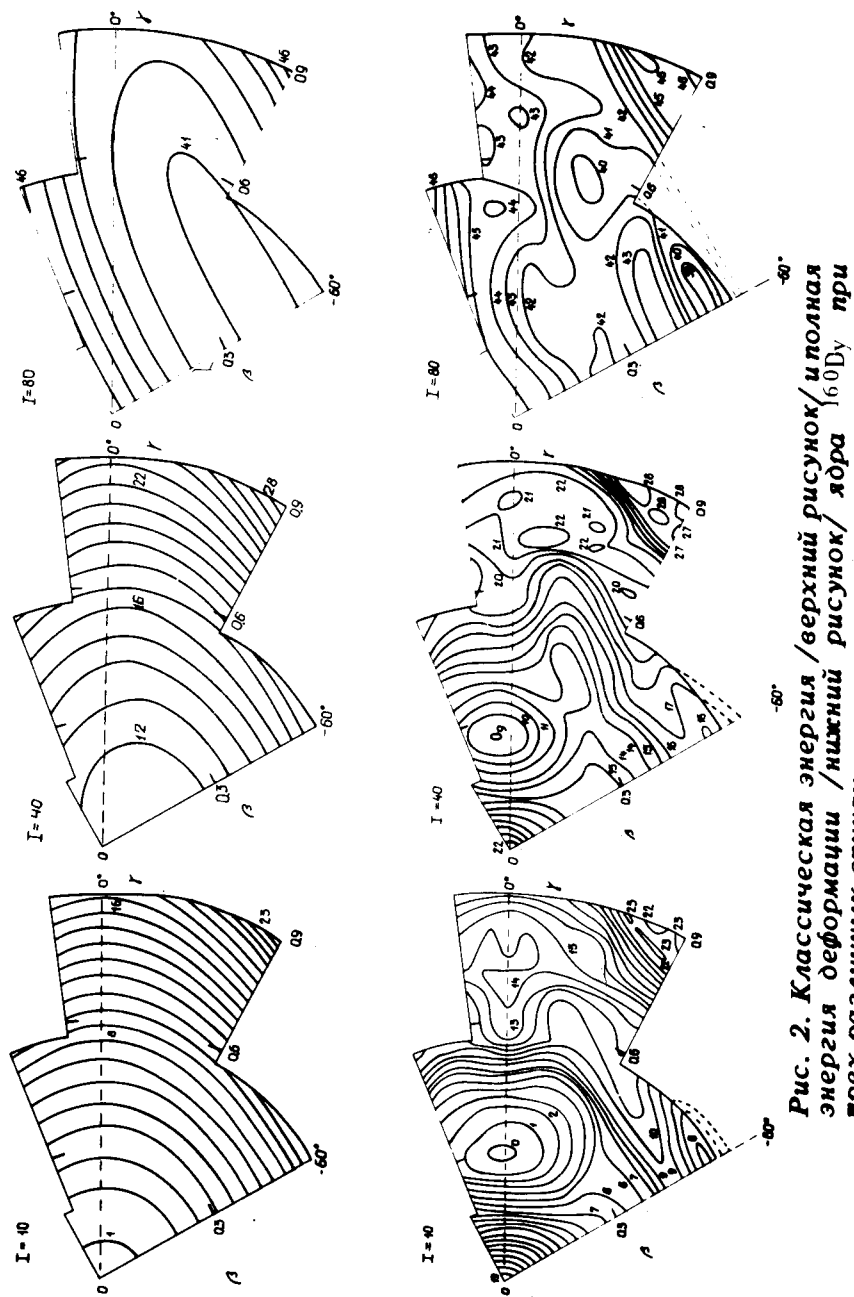


Рис. 2. Классическая энергия / верхний рисунок / и полная энергия деформации / нижний рисунок / ядра  ${}^{160}\text{Dy}$  при трех различных спиных.

Как и в случае без вращения, оболочечная поправка существенно меняет поведение энергии деформации, полученной в классической модели. Это иллюстрируется рис. 2.

При рассмотрении эффективной оболочечной поправки, т.е. разности между полной энергией и ее классической частью, которые даны на рисунке, видно, что для трех показанных значений  $I$  области положительной и отрицательной оболочечной энергии остаются в основном одними и теми же. Единственное исключение составляет область вокруг  $\beta = 0$ . Здесь большая положительная оболочечная энергия невращающегося ядра плавно уменьшается с ростом  $I$  в результате ослабления сильной вырожденности одночастичного спектра при  $\omega = 0$ , и при  $I = 80$  оболочечная энергия сферического ядра даже слегка отрицательна.

Рассматривая "рельеф" более подробно, наблюдаем, однако, некоторые изменения в оболочечной энергии. Эти вариации, хотя и относительно малые, оказываются решающими при подробном обсуждении различных минимумов в энергии деформации. Отметим, например, что абсолютный минимум движется в направлении *меньших* значений  $\beta$  и *больших* значений  $\gamma$ , когда  $I$  возрастает от 10 до 40. При постоянной оболочечной энергии минимум двигался бы в прямо противоположном направлении вследствие роста классической центробежной силы. Отметим также меняющуюся глубину и почти постоянное положение "сплюснутого" минимума в случае  $\beta \approx 0,5$ . При постоянной оболочечной энергии минимум получается в результате разреза вдоль "сплюснутой" оси, с ростом  $I$  становился бы все более глубоким и слегка передвигался бы в направлении больших  $\beta$ .

## 6. Заключение

На основе общей теории сформулирована модель для изучения формы быстро вращающегося ядра с учетом



легко видеть, что точки  $\beta - \gamma$  -плоскости, в которых спектр последовательно оказывается одним и тем же при растущих значениях  $\omega$ , движутся по направлению к оси симметрии  $\sin(\gamma - 2\pi/3) = 0$ , причем движение происходит приблизительно вдоль прямой линии, перпендикулярной этой оси. Ось симметрии достигается при

$$\omega = \frac{1}{2}(\Omega_2 - \Omega_3) \approx \bar{\omega} \sqrt{\frac{15}{16\pi}} \beta_0 \sin(\gamma_0 - 2\pi/3). \quad /25/$$

Таким образом, поверхность оболочечной поправки при любом конечном значении  $\omega$  получается из поверхности при  $\omega = 0$  просто непрерывным отображением плоскости  $\beta - \gamma$  на себя, при этом каждая точка приближается к оси симметрии и исчезает на ней при определенном значении  $\omega$ . В частности, таким же будет поведение любого локального минимума. Классическая часть  $R$ -функции /1/ добавит легкое центробежное растяжение. В конечном счете, из общих свойств преобразования Лежандра следует, что непрерывное движение минимумов  $E(\beta, \gamma, I)$  с ростом  $I$  будет обладать такой же тенденцией, как и движение минимумов  $R(\beta, \gamma, \omega)$  с ростом  $\omega$ . Таким образом, непрерывное движение минимумов энергии деформации, получаемое в модели гармонического осциллятора, всегда будет состоять из наложения приближения к оси симметрии и легкого центробежного растяжения. Очевидно, что наши результаты, полученные в модели Нильссона, существенным образом, качественно отличаются от такой картины.

#### Литература

1. К.Неергорд, В.В.Пашкевич, С.Фрауендорф. Препринт ОИЯИ, Р4-9194, Дубна, 1975.
2. R. Bengtsson, S.E. Larsson, G. Leander, P. Möller, S.G. Nilsson, S. Åberg, Z. Szymanski. Preprint, June, 1975.
3. M.V. Banashik, R.S. Simon, P. Colombani, D.P. Soroka, F.S. Stephens, R.M. Diamond. Phys. Rev. Lett., 34, 892 (1975).
4. G.V. Hagemann, R. Broda, B. Herskind, M. Ishikara, S. Ogaza, H. Ryde. Nucl. Phys., A245, 166 (1975).

5. B.R. Mottelson. Proc. Nuclear Structure Symp. of the Thousand Lakes, Joutsa, 1970 (Dept. of Phys., Univ. of Jyväskylä, Res. Rep. 4/1971), part II, p. 148.
6. A. Bohr, B.R. Mottelson. Nuclear Structure, vol. 1, (Benjamin, New York, 1969), vol. II (in press).
7. J.G. Valatin. Proc. Roy. Soc. (London), 238, 132 (1956).
8. К.Неергорд, В.В.Пашкевич. ОИЯИ, Р4-8947, Дубна, 1975.
9. И.Н. Михайлов. Сообщения ОИЯИ, Р4-7862, Дубна, 1974.
10. S.G. Nilsson. Mat. Fys. Medd. Dan. Selsk. Vid., 29, 16 (1955).  
См. перевод в сб. "Деформация атомных ядер", ИЛ, М., 1958, стр. 232.
11. C. Gustafson, I.L. Lamm, B. Nilsson, S.G. Nilsson. Arkiv for Fysik, 36, 613 (1966).
12. N. Bohr, J.A. Wheeler. Phys. Rev., 56, 426 (1939).
13. S. Cohen, F. Plasil, W.J. Swiatecki. Ann. Phys., 82, 557 (1974).
14. M. Brack, J. Damgaard, A.S. Jensen, H.C. Pauli, V.M. Strutinsky, C.Y. Wong. Rev. Mod. Phys., 44, 320 (1972).
15. А.С. Тяпин. ЯФ, 11, 98 /1970/.
16. R.K. Bhaduri, C.K. Ross. Phys. Rev. Lett., 27, 606 (1971).
17. А.С. Тяпин. ЯФ, 14, 88 /1971/.
18. В.К. Jennings. Nucl. Phys., A207, 538 (1973).
19. В.В. Пашкевич, С.Фрауендорф. ЯФ, 20, 1122 /1974/.

Рукопись поступила в издательский отдел  
24 сентября 1975 года.