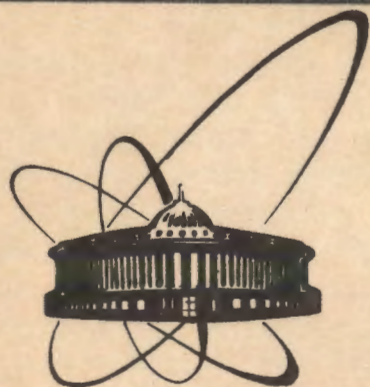


91-453



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

Р4-91-453

Л.Г.Заставенко, Б.Н.Захарьев

НОВЫЙ ВЗГЛЯД НА МЕХАНИЗМЫ ОБРАЗОВАНИЯ  
СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗОН

(Дискретная и обычная квантовая механика)

1991

приводит к бесконечному чередованию зон разрешенных (проводимости) и запрещенных (лакун).

После этого становится более понятным и общий случай произвольных периодических потенциалов (см. работы [8-16]).

Будет также рассмотрена связь спектральных параметров, отвечающих потенциалу на конечном отрезке (задача Штурма-Лиувилля), с зонной структурой периодического потенциала, полученного бесконечным повторением потенциала на отрезке. Так, например, повторив бесконечно глубокую прямоугольную яму с шириной  $\pi$ , мы получим в периодическом случае бесконечное вырождение каждого уровня  $E_n = n^2$  исходного спектра. Если же убрать непроницаемые перегородки между ямами, то бесконечно вырожденные уровни "развернутся" в участки непрерывного спектра от породившего их уровня до нижнего соседа (основной же уровень опустит свою "занавеску" непрерывного спектра до дна ямы) - в результате получится сплошной непрерывный спектр свободного движения. А что произойдет со спектром, если в исходной потенциальной яме деформировать дно так, чтобы [1] изменить приведенную ширину (нормировочную константу, управляющую поведением волновой функции на конце интервала) одного из уровней, не меняя их положений. Оказывается, в окрестности избранного уровня произойдет разрыв непрерывного спектра соответствующего периодического потенциала. Хотя получающиеся потенциалы и не являются строго конечнозонными, но незапланированные запретные зоны оказываются малыми. Соответствующие точно-решаемые модели проливают дополнительный свет на механику образования лакун.

### СВОБОДНЫЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Покажем, как появляется разрешенная зона конечной ширины для свободного движения волн с дискретной переменной.

Простейшее разностное уравнение Шредингера с потенциалом, равным нулю, имеет вид:

$$-\Psi(n+1) + 2\Psi(n) - \Psi(n-1) = E \Psi(n). \quad (1)$$

Вторая разностная производная в левой его части (мы опустили

знаменатель  $\Delta^2$ , где  $\Delta$  - шаг конечно-разностного дифференцирования, который будем полагать равным 1) является изменением первой производной решения при переходе из точки  $n$  в точку  $n+1$ . Согласно (1) первая производная меняется пропорционально правой части (1): и энергии  $E$ , и значению функции в точке  $n$  (иначе: сила "излома" функции пропорциональна  $E \Psi(n)$ ). При отрицательных значениях энергии "изломы" функции  $\Psi$  (рис.1а) имеют тот же знак, что и сама  $\Psi$ .

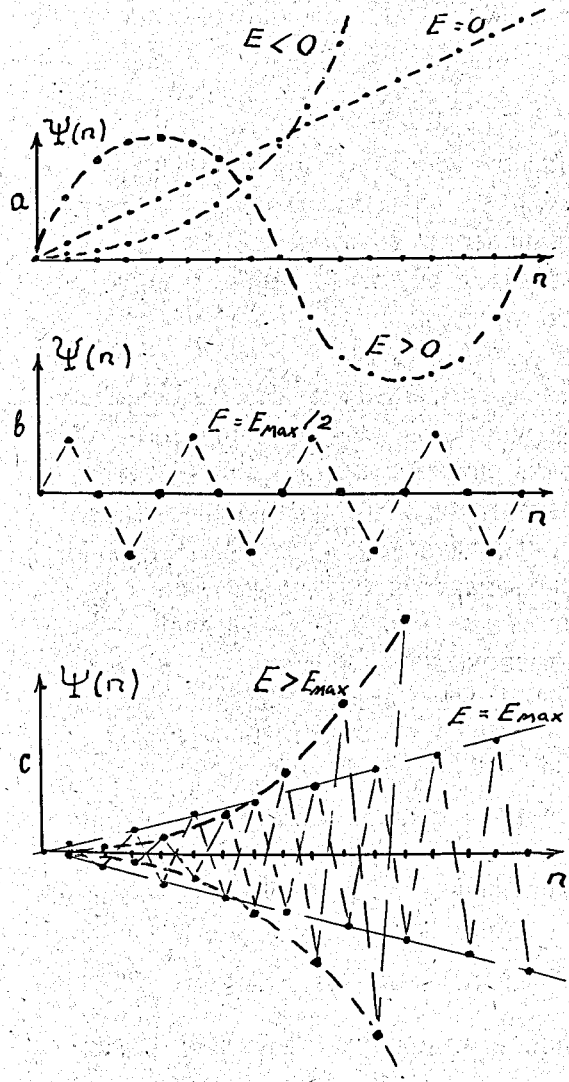


Рис.1. Решения уравнения (1) при различных энергиях. Дискретные значения  $\Psi(n)$  соединены для наглядности штриховыми линиями:  
 а - при переходе через нижнюю границу разрешенной зоны ( $E=0$ ) решение из экспоненциального (при  $E<0$ ) превращается в линейное ( $E=E_{\min}=0$ ), а затем в синусоидальное ( $E>0$ );  
 б - в середине разрешенной зоны ( $E=E_{\max}/2=2$ );  
 с - на верхней границе  $E=E_{\max}=4$  решение как и при  $E=0$  по модулю линейное, а при  $E>E_{\max}$  по модулю экспоненциальное, как и при  $E<0$ . Обратите внимание на симметрию решений (по энергии относительно середины зоны проводимости) с точностью до знака.

Частными решениями являются  $\Psi$ , все увеличивающиеся или все уменьшающиеся по модулю по экспоненциальному закону:

$$\Psi(n) = C_{\pm} \exp(\pm \kappa n).$$

При нулевой энергии (на нижней границе разрешенной зоны  $E_{\min}=0$ ) изломов в функции вообще нет и значения  $\Psi(n) = \alpha + \beta n$  располагаются на прямой линии (см. рис.1а). Эту линию можно рассматривать как значения синуса  $\sin(k\Delta n)$  в пределе нулевой частоты:  $k=0$ . При малых  $E>0$  происходит постепенное изменение производной, как показано на рис.1а. При положительных значениях функции производная монотонно уменьшается, а при отрицательных - возрастает в соответствии с отрицательным знаком второй производной в левой части (1). Таково решение  $A \sin(k\Delta n)$  с малой частотой. Повышая непрерывно энергию, можно получить функцию, изображенную на рис.1б, обращаясь в нуль через одну точку и колеблющуюся вокруг нулевого значения с постоянной амплитудой. (В точках, где  $\Psi(n)$  обращается в нуль, производная, как и полагается, не меняется). При дальнейшем увеличении энергии достигается такое значение  $E$ , при котором амплитуда колебаний линейно растет от точки к точке (рис.1с). Это другая граница разрешенной зоны:  $E = E_{\max} = 4$ . Модуль решения, как и при  $E = 0$ , меняется линейно с  $n$ , только  $\Psi$  меняет знак от точки к точке:  $\Psi(n) = -[\Psi(n+1) + \Psi(n-1)]/2$ . При еще больших энергиях размах колебаний начинает по модулю возрастать (или убывать) экспоненциально с переменной знака в каждой следующей точке (рис.1с) - это верхняя запрещенная зона, которая простирается до  $E \rightarrow \infty$ , симметрично относительно  $E = 2$  нижней запретной зоне. Сравним теперь рассмотренную картину движения волн в поле эквидистантно расположенных  $\delta$ -барьеров.

"ГРЕБЕНКА ДИРАКА"

Для упрощения наших рассуждений будем нетрадиционно рассматривать вещественные, а не комплексные решения Блоха (волны в периодическом поле  $\delta$ -барьеров). Для того, чтобы судить о характере решения (относится ли оно к разрешенной или запрещенной зоне), этого достаточно.

Решение уравнения Шредингера с потенциалом в виде периодически расположенных  $\delta$ -функций

$$-\psi''(x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0 \delta(x-x_n) \psi(x) = E \psi(x) \quad (2)$$

имеет общие черты с конечно-разностным. В точках  $\delta$ -сингулярностей происходит излом решения — скачок производной, пропорциональный  $V_0 \psi(x_n)$ , а не  $E\psi$ , как в (1) (благодаря непрерывности  $x$ , этот член отвечает теперь за плавные изгибы  $\psi$ ):

$$\psi'(x_n + 0) = \psi'(x_n - 0) + V_0 \psi(x_n), \quad (3)$$

при  $\psi(x_n) > 0$  излом происходит вверх, а при отрицательных значениях  $\psi$  в точках  $\delta$ -стенок — вниз. Эти изломы приводят при  $E > 0$  к уменьшению фазового сдвига решения  $A \sin(kx + \delta)$  (не следует путать фазовый сдвиг  $\delta(k)$  и потенциальные  $\delta(x-x_n)$ -стенки). Между  $\delta$ -пиками решение представляет собой волну свободного движения, например,  $A \sin(kx + \delta)$ , и происходит постепенное накопление (увеличение) фазы между точками ломки первой производной. Так что идет конкуренция между увеличением фазы за счет изгиба функции между потенциальными стенками и уменьшением фазы (скачком) при их прохождении. (В случае конечно-разностного уравнения свободного движения (1) было лишь дискретное накопление фазы от точки к точке). Вследствие этой конкуренции происходит разрыв зоны непрерывного спектра лагунами — участками запретных зон. Можно подобрать энергию  $E = E_n$  так, чтобы узлы решения совпадали с положениями барьеров ( $x_n$ ). Тогда, в соответствии с (3), изломы решения исчезают:  $\delta$ -функции не возмущают волновую функцию свободного движения. Эти значения энергий совпадают с уровнями бесконечной прямоугольной ямы с непроницаемыми стенками вместо  $\delta$ -пиков. Именно эти значения энергии  $E_n$  служат границами между разрешенными и запрещенными зонами. При энергиях немного выше и ниже  $E_n$  изломы решения барьером имеют разные знаки.

При отрицательных энергиях решением между пиками является, например, растущее:  $S e^{\alpha x}$  ( $\alpha > 0$ ), которое в точках

зубцов потенциальной гребенки претерпевает изломы, только усиливающие рост. Так что, как и следовало ожидать, при  $E < 0$  имеем запрещенную зону. При  $E = 0$  между барьерными пиками происходит линейный рост  $\psi$ , а в пиках изломы, все время усиливающие этот рост, так что в результате получается все же рост экспоненциального (в среднем) типа, — см. рис. 2. Значит, верхняя граница нижней запретной зоны сдвигается по сравнению со случаем свободного движения в область  $E > 0$ . В верхней предельной точке нижней запрещенной зоны ( $E = E_{\min}$ ) между перегородками поведение синусоидальное, а барьеры так ломают функцию, что получается рост линейного типа (на одной линии, например, лежат точки изломов) — получается равновесие между выгибанием в одну сторону кривой решения между пиками и ломкой в другую сторону — см. рис. 2.

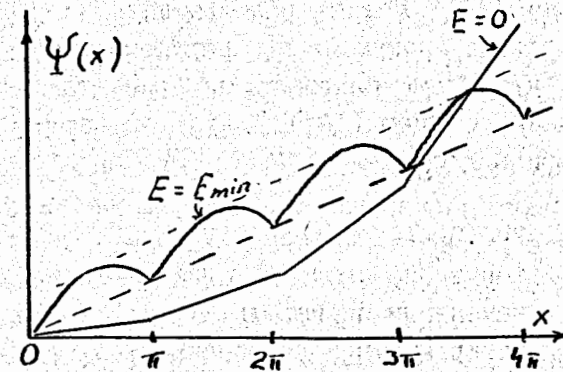


Рис. 2. Примеры волновых функций в поле "гребенки Дирака". В отличие от рис. 1 при  $E = 0$  происходит рост экспоненциального типа за счет изломов линейной функции. На нижней границе первой зоны проводимости  $E = E_{\min}$  синусоидальное решение ломается  $\delta$ -барьерами, так что получается линейный рост точек изломов  $\psi$ .

При  $E > E_{\min}$  рост фазы в промежутках между пиками превышает уменьшение фаз за счет ломки (выгибание пересиливает ломку) — получаются кусочно-синусоидальная кривая, модулированная колебаниями меньшей частоты (типа биений). На верхней границе  $E_{\max}$  нижней зоны проводимости ( $k_{\max} = 1$ ) модуляция исчезает, узлы синусоиды попадают в точки пиков и, благодаря отсутствию изломов (пропорциональных  $\psi$  и равных в данном случае нулю), имеем волновую функцию, совпадающую с невозмущенным решением ( $\sin k_{\max} x$ ). Выше  $E_{\max}$  начинается новая запрещенная зона (первая лагуна). Вообще, энергии  $E_i = i^2$  уровней прямоугольной ямы с шириной, равной периоду  $a = \pi$ , служат верхними границами зон проводимости. Выше этих уровней в каждой из запрещенных

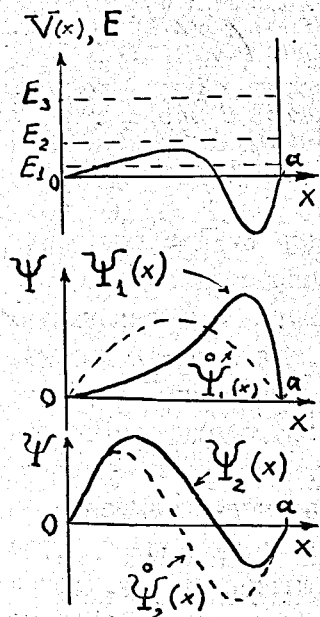


зон имеется по одной энергетической точке "фазового равновесия": при этих энергиях фаза функции после непрерывного нарастания между барьерами и резкого скачка в точке очередного барьера возвращается к своему значению сразу после предыдущего барьера (фаза - функция с периодом "а").

Аналогично можно рассмотреть и случай периодических  $\delta$ -ям. В частности, первая разрешенная зона опускается ниже  $E=0$ .

КАК СОЗДАТЬ ЗАПРЕЩЕННУЮ ЗОНУ - ЛАКУНУ ПО ЗАКАЗУ ("порвать" непрерывный спектр в заданном месте)

Алгоритм изменения нормировочной константы  $\gamma_1$  произвольного уровня  $E_1$  бесконечной прямоугольной потенциальной ямы (или приведенных ширин соответствующих R-матричных резонансов, - см.[11]) можно использовать для создания периодического поля с лакуной в энергетической окрестности этого уровня (что было подтверждено расчетами В.И.Коробова, см. следующую публикацию [18]). Для этого достаточно периодически повторить возмущение  $V(x)$  (см. рис.3)



а Рис.3(а)-Деформация  $V$  дна бесконечной прямоугольной ямы при изменении производной  $\gamma_1' = \Psi_1'(x=a)$  на краю ямы нормированной волновой функции основного состояния  $\Psi_1$ ; остальные связанные состояния деформируются, не меняя своих производных на краях интервала, как показано (с) для второго уровня (см. Пёшель и Трубовиц [11]). Выбранное возмущение потенциала не меняет положение уровней  $E_1$ . Периодическое повторение потенциала  $V(x)$ , как показано на рис.4, создает запрещенную зону в области энергии  $E_1$ .

дна выбранной прямоугольной ямы радиуса "а", необходимое для изменения  $\gamma_1$  (см. рис.3):

$$V(x) = \delta\gamma_1^2 \cos k_1 x \frac{1}{k_1} \sin k_1 x / p(x) + (\delta\gamma_1^2)^2 \frac{1}{k_1^4} \sin^4 k_1 x / p^2(x), \quad (4)$$

где 
$$p(x) = 1 + \delta\gamma_1^2 \frac{1}{k_1^2} \int_x^a \sin^2 k_1 t dt.$$

Соответствующее этому возмущению точное решение имеет простой аналитический вид:

$$\phi(x) = \frac{1}{k_1} \sin k_1 x p^{-1}(x). \quad (5)$$

Если без возмущения при сшивании ям в периодическую цепочку каждый уровень переходил в соответствующее значение энергии непрерывного спектра (функции на краях сшиваемых отрезков равны нулю и равны по модулю их производные - значит, просто их непрерывно сшить в цепочку, добавляя лишь множители  $\pm 1$ ), то периодически повторенные функции  $\Psi$  с рис.3 (Пёшель и Трубовиц [11]) на соседних отрезках уже так просто не сшиваются (см. рис.4). Чтобы приравнять производные, нужно умножить одну из функций на число, отличное по модулю от единицы (в частном случае, представленном на рис.4, этим числом служит 2). На следующем сочленении потребуется снова умножение на такое же по модулю число и т.д., то есть получится квази-экспоненциально возрастающее решение (знакопеременное или нет, в зависимости от четности выбранного уровня). Эти растущие решения отвечают запрещенной зоне периодического потенциала (соответствующие собственные значения - точки так называемого дополнительного (вспомогательного) спектра  $\{\mu_1\}$ ). Все остальные уровни, для которых производные собственных функций на краях интервала не менялись и потому сшиваются в периодические решения (как для второго уровня на рис.4с.), оказываются точками вспомогательного спектра, совпадающими с границей разрешенной зоны. (Вспомогательный спектр располагается по одной точке внутри или на границе каждой из лагун (между границами разрешенных зон, которые могут смыкаться: "схлопывание" лагун)). Можно ожидать [18], что лагуны, отвечающие неискаженным  $\gamma_1$ , будут существенно меньше.

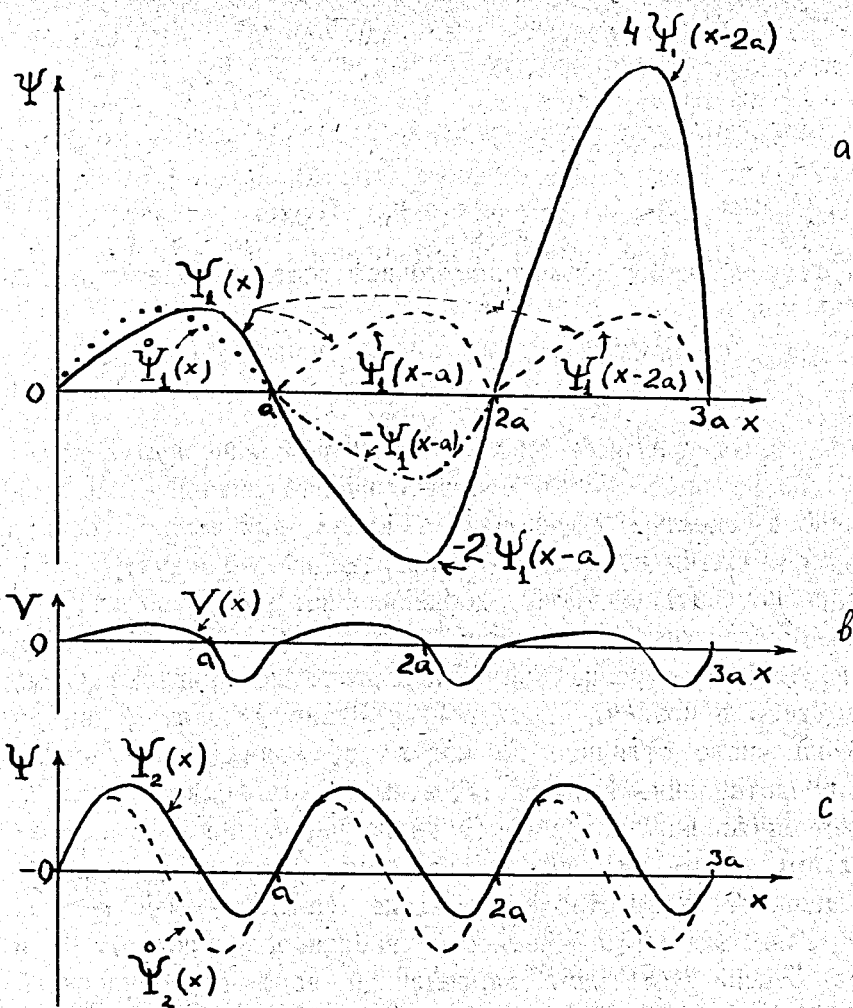


Рис. 4. (а) - Волновая функция (сплошная кривая), считая из решений  $\Psi_1(x)$  на интервале  $[0, a]$ , отвечающих потенциалу (b)  $V(x)$  с рис. 3а, продолженному периодически на всю ось  $x$ . Пунктиром (а) показана невозмущенная функция  $\Psi_1$  основного состояния прямоугольной ямы; штриховой линией (а) показана периодически повторенная  $\Psi_1(x)$ ; штрих-пунктиром -  $-\Psi_1(x-a)$ , которую потребовалось умножить на 2, чтобы гладко сшить производные  $\Psi_1(x)$  и  $-\Psi_1(x-a)$  в точке "а"; для продолжения на следующий период нужно было умножить  $2\Psi_1(x)$  ещё на 2. Такое экспоненциальное раскачивание характерно для запрещенной зоны. Функция второго состояния  $\Psi_2(x)$  (с), как и  $\Psi_{i>2}(x)$ , продолжается простым повторением, что свидетельствует о принадлежности  $E_{i>1}$  к разрешенной зоне.

Таким образом, благодаря простоте предлагаемого алгоритма (на основе точно решаемых моделей), возможности произвольно менять любые спектральные параметры (задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке), появляется возможность конструировать желаемую зонную структуру периодических систем. Здесь, правда, нужно накопить больше опыта (пока здесь открыта только принципиальная возможность "спектральной инженерии").

В. Б. Приезжев предложил пришить к потенциалу, изображенному на рис. 3а, его отражение относительно крайней правой точки, чтобы получился симметричный потенциал. Соответственно антисимметричным будет и решение (с дополнительным изменением знака правой части). При периодическом повторении такого потенциала решение уже не будет возрастать. Правда, расчеты Коробова [18] показали, что выше этого уровня происходит значительный разрыв непрерывного спектра, что связано с большей чувствительностью к возмущениям функций широкой ямы.

ИМПЛАНТАЦИЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ (в разрешенные и запрещенные зоны систем с периодическим полем)

Техника обратной задачи позволяет строить явный вид потенциальных возмущений для создания связанных состояний при любой энергии, например, погруженных в непрерывный спектр (см. [11]). Аналогично можно добавлять и к периодическому потенциалу такие возмущения, чтобы в любой зоне непрерывного спектра или любой лакуне возникало связанное состояние [4, 7].

Простейший вид такого добавочного потенциала к гребенке Дирака (2) с  $x_n = n\pi$  на полуоси  $x \geq 0$ , порождающего связанное состояние при  $k = k_v$  (рис. 5):

$$V(x) = 4\delta_v^2 k_v A_i^2 \cos(k_v x + \delta_i) \sin(k_v x + \delta_i) / p_i + 2 \delta_v^2 \frac{1}{K} A_i^4 \sin^4(k_v x + \delta_i) / p_i^2 \quad (6)$$

где  $A_i, \delta_i, p_i$  - амплитуды и фазовые сдвиги при  $k = k_v$  на  $i$ -м участке (где находится выбранное значение  $x$ ) гребенки Дирака, а

$$p_i(x) = 1 + \delta_v^2 \frac{1}{K} \sum_{s=1}^{i-1} A_s^2 \int_{\pi(s-1)}^{\pi s} \sin^2(k_v t + \delta_s) dt + A_i^2 \int_{\pi(i-1)}^x \sin^2(k_v t + \delta_i) dt.$$

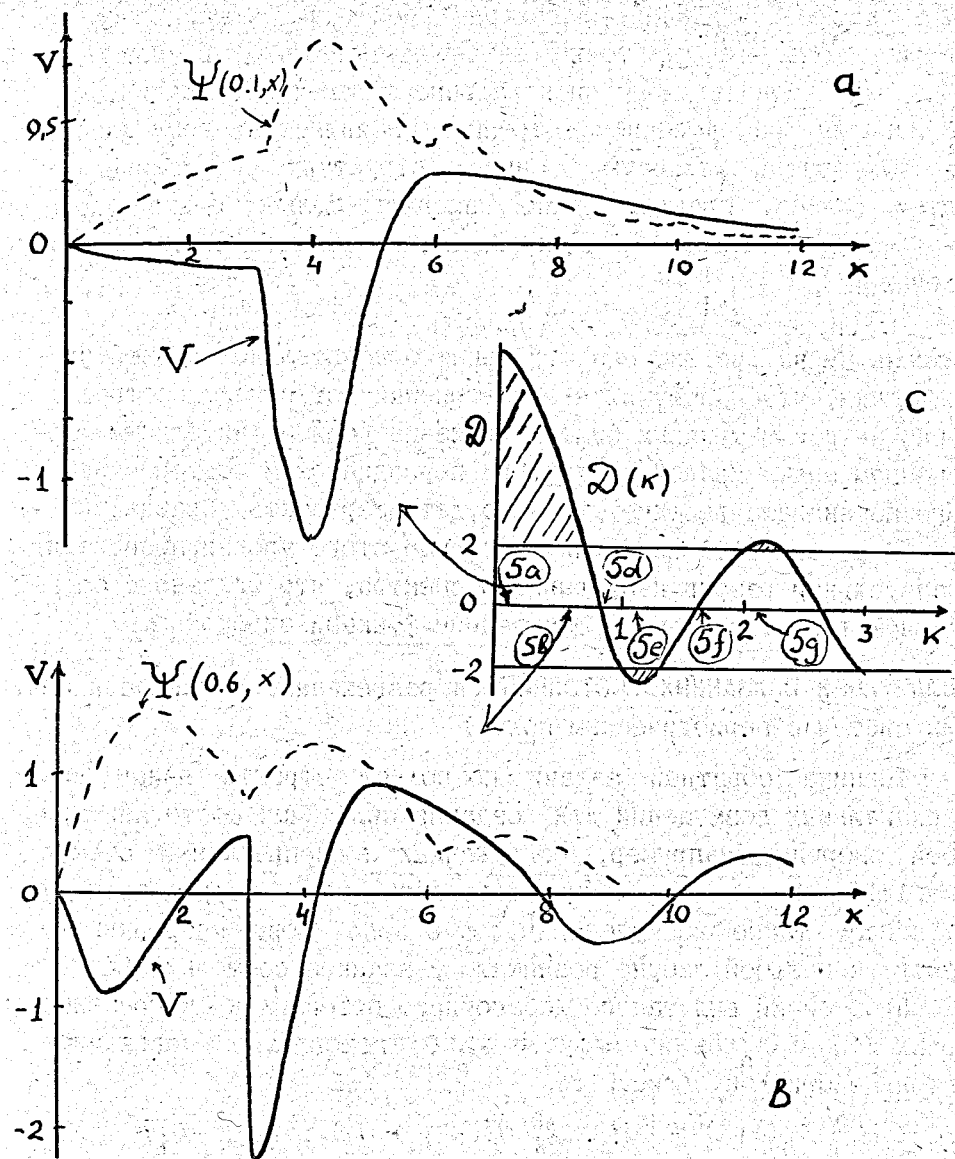
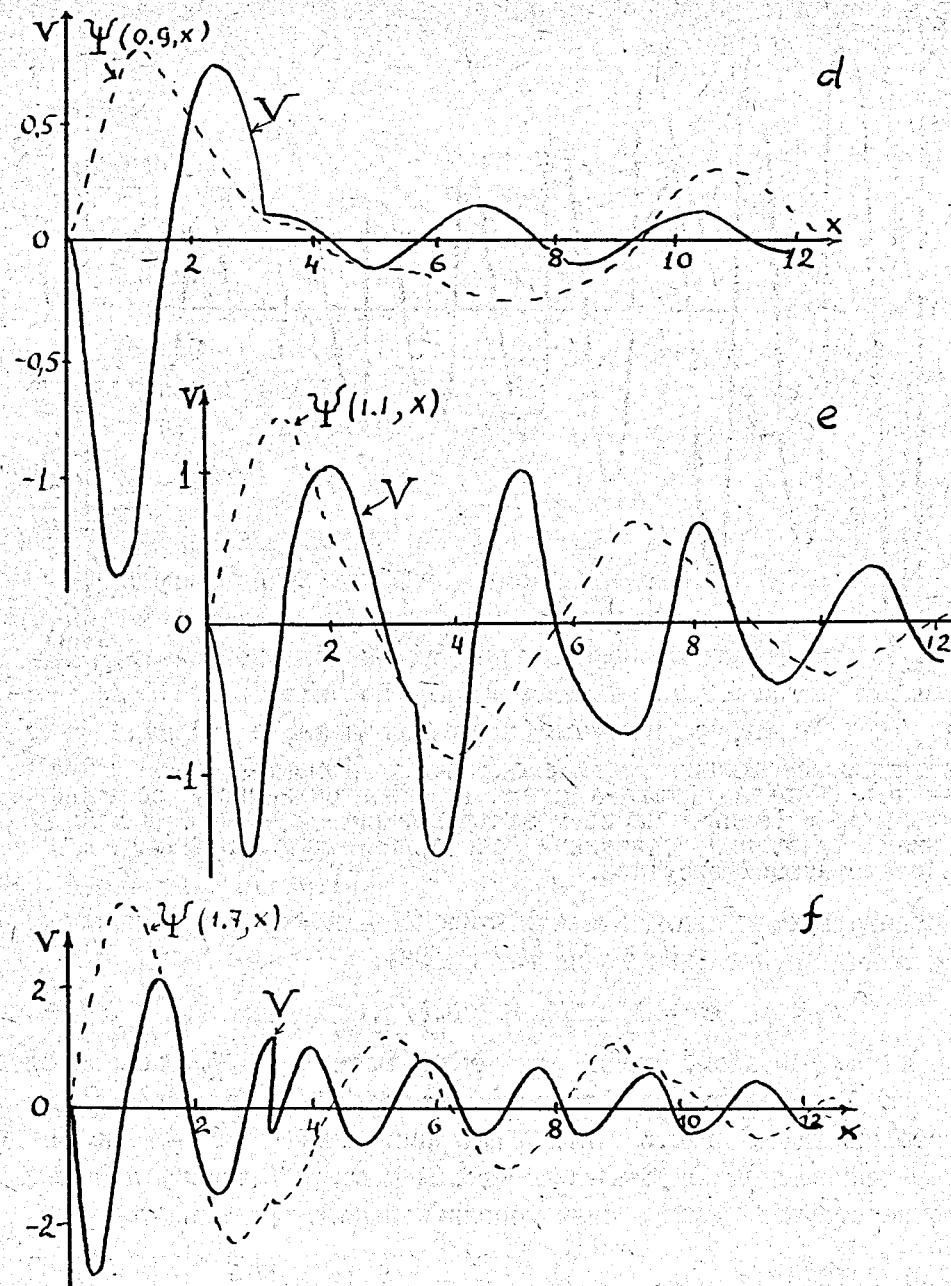
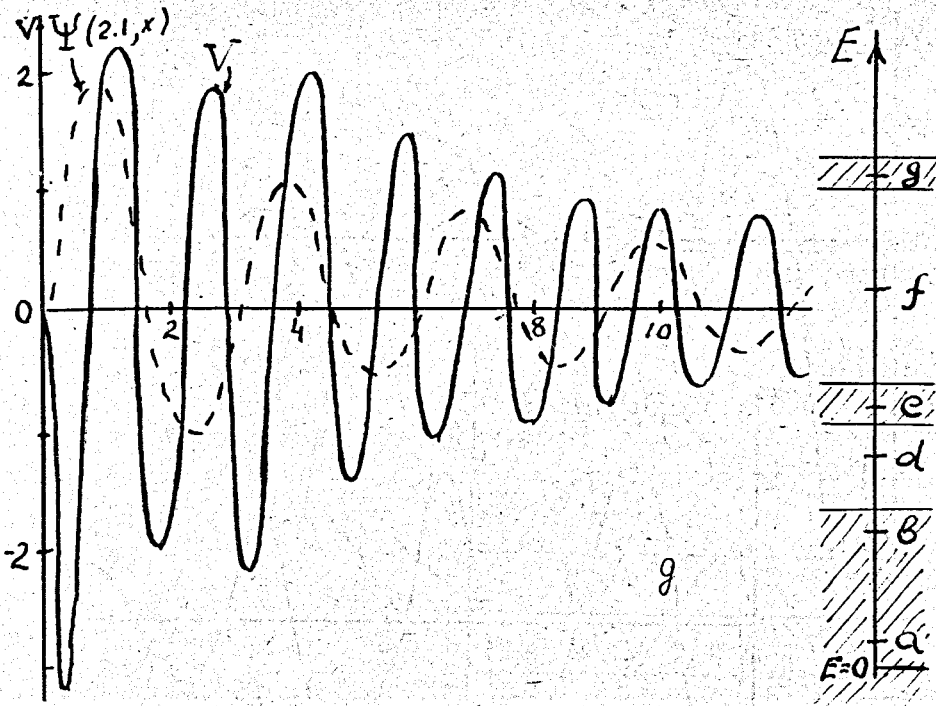


Рис. 5. Добавочные потенциалы  $V$  (сплошные линии) к гребенке Дирака (2) на полуоси с  $x_n = n\pi$ ,  $V_0 = 2$ , порождающие связанное состояние  $\Psi$  (штриховые линии) в нижней запретной зоне: (а) при  $k_v = 0.1$ ; (б) при  $k_v = 0.6$ . На рис.5с показана энергетическая зависимость дискриминанта Хилла  $D(k)$ , характеризующего структуру зон при выбранных параметрах  $x_n$  и  $V_0$ : области значений  $k$ , где  $|D| > 2$  являются запрещенными.



То же, что и на рис.5а,б, только с другими параметрами  $k_v$ : (d) 0.9 (первая разрешенная зона, см. рис.5с); (е) 1.1 (первая лакуна); (f) 1.7 (вторая разрешенная зона).



То же, что на рис.5(a,b,d,e,f), только с  $k_v=2.1$  (это связанное состояние, согласно рис.5с, расположено во второй лакуне). Справа показана схема подъема связанного состояния сквозь зоны (запретные зоны заштрихованы, - сравни с рис.5с): точкам положений связанных состояний сопоставлены номера соответствующих рисунков.

Соответствующая аналитическая формула для функции связанного состояния (пунктирные линии на рис.5):

$$\Psi(k_v, x) = A_1 \sin(k_v x + \delta_1) / p_1(x). \quad (7)$$

Таким образом, точно решаемая модель (6,7) позволяет просто проследить за эволюцией имплантируемого связанного состояния (см. рис.5) при "протаскивании" его из нижней запрещенной зоны сквозь зоны проводимости и лакуны, а также соответствующей деформацией дополнительного потенциала.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Было бы желательно распространить технику разрыва непрерывного спектра и имплантации связанных состояний на многоканальные, многомерные системы и дискретные решетки.

Сошлемся на некоторые работы, имеющие отношение к изложенному выше. А.Р. Итс и В.Б. Матвеев [17] дали явную формулу для конечнозонных потенциалов (после работы [23]), а Date и Tanaka [24] предложили дискретный разностный аналог этой теории. Марченко В.А. и Островский И.В. [13] показали, что множество периодических конечнозонных потенциалов плотно в пространстве периодических функций с данным периодом. См. также некоторые замечания и рисунки в [11] (рис. 9.11, с.333), [15] (рис.17.4).

Авторы выражают благодарность И.В.Амирханову, В.И.Иноземцеву, А.Л.Куземскому, В.Б.Приезжеву, С.И.Сердюковой В.И.Юкалову, М.И.Широкову за интерес к работе и полезные дискуссии.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ: ПРОВЕРКА РЕШЕНИЙ

Проверим прямой подстановкой в уравнение Шредингера правильность формул для решения  $\phi$  при произвольной энергии  $E_k=k^2$ , отвечающего потенциалу баргмановского типа на конечном интервале  $[0, a]$  для случая изменения приведенной ширины  $\gamma_n$   $n$ -го состояния бесконечной прямоугольной ямы (см. [1]).

Решения  $\phi(k, x)$  с их производными и потенциал  $V$  имеют вид ( $\phi_v$  - регулярное решение, отвечающее  $v$ -му уровню прямоугольной ямы,  $\phi(k, x)$  - регулярное решение при произвольной энергии):

$$\phi = \phi(k, x) - \delta \gamma_v^2 p^{-1}(x) \int_x^a \phi_v \phi(k, t) dt; \quad p(x) = 1 + \int_x^a \phi_v^2 dt, \quad (П1)$$

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi'(k, x) - \delta \gamma_v^2 p^{-1}(x) \left[ \phi_v' \int_x^a \phi_v \phi(k, t) dt - \phi_v^2 \phi(k, x) \right] - \\ &- (\delta \gamma_v^2)^2 p^{-2}(x) \int_x^a \phi_v \phi(k, t) dt \phi_v^2 \end{aligned} \quad (П2)$$

$$\phi'' = \phi''(k, x) + (\delta \gamma_v^2) \left[ \phi_v'' \int_x^a \phi_v \phi(k, t) dt - 2 \phi_v' \phi_v \phi(k, x) - \dots \right]$$

$$\left[ -\phi_v' \phi_v \phi(k, x) + \phi_v'' \phi_v \phi(k, x) \right] - \phi_v^2 \phi(k, x) \Big] p^{-1}(x) +$$



$$+ 2(\delta\gamma_\nu^2)^2 [\delta\gamma_\nu^2 \int_x^a \phi_\nu \phi(k,t) dt - \delta\gamma_\nu^4 \phi(k,x)] p^{-2}(x) +$$

$$+ 2(\delta\gamma_\nu^2)^3 \delta\gamma_\nu^5 \int_x^a \phi_\nu \phi(k,t) dt p^{-3}(x) \quad (П3)$$

$$V \phi = 4 \delta\gamma_\nu^2 \phi_\nu \phi(k,x) p^{-1}(x) +$$

$$+ [2 \delta\gamma_\nu^4 \phi(k,x) - 4 \int_x^a \phi_\nu \phi(k,t) dt] p^{-2}(x) -$$

$$- 2(\delta\gamma_\nu^2)^3 \delta\gamma_\nu^5 \int_x^a \phi_\nu \phi(k,t) dt p^{-3}(x). \quad (П4)$$

Рамкой в (П3) выделены взаимно сокращающиеся члены, добавленные для удобства выкладок. Второй из них образует с последующим вронскиан, равный  $(E_\nu - E_k) \int_x^a \phi_\nu \phi(k,t) dt$ , умноженный на  $\phi_\nu$ . Подставим выражения (П3, П4) в уравнение Шредингера с правой частью

$$E \phi(k,x) - E_k (\delta\gamma_\nu^2)^2 \phi_\nu p^{-1}(x) \int_x^a \phi_\nu \phi(k,t) dt. \quad (П5)$$

Взаимно уничтожающиеся члены подчеркнуты одинаковыми линиями. Аналогично проверяется решение баргмановского типа, когда нормировочная константа является производной собственной функции в нуле. Нужно только заменить  $\int_x^a$  на  $\int_0^x$  и знаки в трех первых членах в (П4) на противоположные.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Захарьев Б.Н., Сузько А.А. Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. Энергоатомиздат, М.1985. Переработанное и дополненное английское издание: Springer-Verlag, Heidelberg, 1990.  
Poshel J., Trubovitz E. Inverse Spectral Theory. Academic. New York 1987.
2. Zakhariev B.N., Serdyukova S.I. Preprint, E4-91-237, Dubna, 1991.
3. Захарьев Б.Н., Костов Н.А., Плеханов Е.Б. Точно решаемые одно- и многоканальные модели (уроки квантовой интуиции), ЭЧАЯ, 21, с.914-962, 1990; Захарьев Б.Н., Плеханов Е.Б. Иллюстрации из коллекции "Квантовая механика в картинках", Сообщ.ОИЯИ Р4-89-287, Дубна, 1989.
4. Захарьев Б.Н. Уравнение Шредингера на решетках и в периодическом поле (для пешеходов). Препринт ОИЯИ Р-4-90-46; Дубна 1990; Необычные решения уравнения Шредингера. Сообщ.ОИЯИ, Р4-91-98, Дубна, 1991. Уравнения Шредингера высшего (> 2-го) порядка. Сообщ. ОИЯИ Дубна Р4-91-127 1991. Элементы теории управления резонансами. Сообщ. ОИЯИ Р4-91-440, Дубна, 1991.
5. Флюгге З. Задачи по квантовой механике т.1 с.78-80, Мир, М. 1974; Демков Ю.Н., см. также: Островский В.Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике, ЛГУ, Л., 1975; Альбевериио С. и др. Решаемые модели в квантовой механике. Мир. М.1991.
6. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.Мир.1987.
7. Trlify L. The Darboux and Abraham-Moses Transformations of the one-dimensional Periodic Schroedinger Equation and Inverse Problems. Inverse Problems 5, N6, 1145. 1989.
8. Займан Дж. Принципы теории твердого тела Мир М. 1974.
9. Зейтц Ф Современная теория твердого тела с.298. Гиз техн-теор.лит. М-Л. 1949.
10. Шокли В. Теория электронных полупроводников с.165,174, ИЛ. М. 1953.
11. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. Наука. М.1978.

12. Уиттекер Э., Ватсон Д. Курс современного анализа, т.2, с.271, Физматгиз М., 1963.
13. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, гл.4. Наукова думка, Киев, 1977.
14. Magnus W., Winkler S. Hill's Equation. Interscience. NY. 1966.
15. Ярив А. Введение в теорию и приложения квантовой механики. с. 250, Мир, М. 1984.
16. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля; гл.8 Конечнозонные потенциалы. Наука.М. 1984.
17. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения КдФ. ТМФ 23, N1, 51, 1975; Функц. Анал. и прил. 9, 65, 1975.
18. Korobov V.I. Zakhariev B.N. New algorithms of spectral management. Preprint JINR E4-91-467, Dubna, 1991 (submitted to Phys.Rev.).
19. Krichever I.M. Sov.J.Func.Anal.Appl. 18, N3, 43, 1984.
20. Zakhariev B.N., Zastavenko L.G. Motion Along the Axis of a Discrete Channel Variable  $\alpha$ . Phys.Rev.A39, 5528-5530, 1989.
21. Pivovarchik V.N., Suzko A.A., Zakhariev B.N. Phys.Scr. 34, p.101, 1986.
22. Roberts T.M. Inverse scattering for Step-Periodic Potentials in One Dimensions. Inverse Probl. 6, N5, 797, 1990.
23. Дубровин Б.А., Новиков С.П. ЖЭТФ 67, 2131, 1974.
24. Date E., Tanaka S. Periodic multisoliton solutions Suppl. Progr.Theor.Phys. N59, 107; Analogue of inverse scattering theory for the discrete Hill's equation Progr.Theor.Phys. 55, N2, 457, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел  
18 октября 1991 года