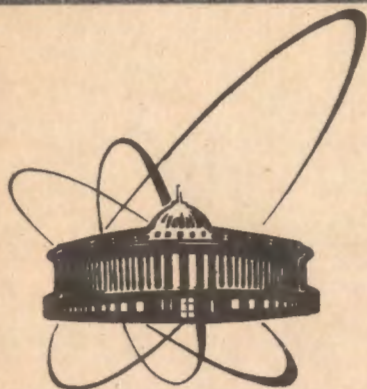


91-440



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P4-91-440

Б. Н. Захарьев

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ "УПРАВЛЕНИЯ" РЕЗОНАНСАМИ
КВАНТОВОГО РАССЕЯНИЯ

(Простые модели, поясняющие общий случай)

1991

Нерелятивистская квантовая теория
тоже переживает сейчас демократическую
перестройку.

Из правдоподобных мнений.

ВВЕДЕНИЕ

Несколько наших предыдущих работ [1-4] было посвящено алгоритмам "спектральной инженерии", связанным с методами обратной задачи: как, например, сдвинуть произвольный уровень энергии на произвольное место или изменить его приведенную ширину, не меняя остальных спектральных параметров. В следующей публикации спектральное конструирование будет распространено на случай периодических потенциалов (формирование спектральных зон). Здесь же мы рассмотрим возможности формирования характеристик рассеяния. К занятиям этой проблемой подтолкнул вопрос, возникший в беседе с Н. Юдиным : как "заставить" фазу рассеяния (фазовый сдвиг $\delta(k)$) возрасти с энергией на несколько π на некотором участке энергетической шкалы. Контакты с другими коллегами показали, что этот вопрос неясен и им, что явилось лишним стимулом для автора найти подходящие модели для проверки и укрепления нашей интуиции в области резонансных квантовых явлений. Оказывается, о старом фундаментальном понятии фазового сдвига еще далеко не все сказано.

В принципе определение потенциала для любых допустимых характеристик дискретного и непрерывного спектра возможно с помощью теории обратной задачи. Однако её аппарат в общем своем виде не всегда достаточно прозрачен для качественного понимания механизмов связи свойств квантовых систем с видом взаимодействия. Здесь очень полезными могут быть "квантовые

картинки", особенно если найти подходящие точно решаемые модели.

В процессе данной работы использовалась замечательная программа "Математика" на персональном компьютере. Хотелось бы обратить внимание физиков на ее возможности облегчить нашу жизнь. Правда, программа эта дорого стоит (помеха несовершенного еще авторского права для небогатых стран) и помещается лишь на достаточно мощном компьютере. Благодаря простоте воспроизведения с ее помощью в графическом виде исследуемых функций, были просмотрены сотни "квантовых картинок" резонансных явлений, наиболее интересные из которых отобраны для этой публикации.

* * *

Иначе вопрос Н.Юдина можно задать так: какая структура мишени позволяет "затянуть" в нее несколько узлов синусоиды, являющейся решением соответствующего уравнения Шредингера вне области взаимодействия при изменении волнового числа k на узком участке $\Delta k < 1$.

И без всякой мишени "гармошка" свободного решения ($\Psi_0 = \sin kx$) сжимается с ростом энергии и его узлы входят в конечную окрестность начала координат (например, $0 < r < \pi$, по одному при изменении k на 1). Появление и рост фазового сдвига $\delta(k)$ с k происходит при более интенсивном затягивании узлов в эту область, если поместить там мишень с нужными свойствами.

Первая рассмотренная модель мишени в виде конечного участка полуоси r ($r < \pi$), отгороженного от внешней области полупрозрачной δ -образной стенкой (рис.1), которая хорошо имитирует резонансные характеристики рассеяния, склоняла к отрицательному ответу на вопрос Н.Юдина. Действительно, между уровнями квазистационарных состояний, переходящих в пределе непрозрачной перегородки в связанные состояния бесконечной прямоугольной ямы, фазовый сдвиг $\delta(k)$ опускается на величину $\leq \pi$ из-за вытеснения волн из зоны мишени, вызываемого самогашением при энергии, когда внутри мишени происходит расфазировка волн при многократном отражении от потенциальных стенок. Происходит сдвиг "гармошки" решения вне мишени ($\Psi =$

$\sin(kx + \delta(k))$ вправо, то есть уменьшение фазы рассеяния. Вблизи каждого уровня фазовый сдвиг $\delta(k)$ резко поднимается с ростом энергии (зоны резонансов - см. Рис. 2). При этом подъемы $\delta(k)$ происходят не больше чем на π и полностью компенсируются спадами. Аналогичная картина получается и для конечно-разностного уравнения Шредингера, только с учетом возможности связанных состояний выше непрерывного спектра (Рис. 4), которые дают вклад в теорему Левинсона (фазовый сдвиг на верхней границе разрешенной зоны равен $-\pi$, где π - число таких "верхних" связанных состояний). Насколько это известно автору, картинки решеточных фазовых сдвигов, подобные Рис. 4, ранее не публиковались.

Введение в мишень внутренних δ -перегородок (Рис. 6), позволяет сгустить резонансы и добиться желаемого подъема фазы рассеяния больше чем на π на участке $\Delta k < 1$ (см. Рис. 7).

Выбранные сверхпростые модели (требующие все же некоторого внимания, чтобы усвоить разнообразные качественные аспекты резонансного поведения) могут послужить нам ступеньками к пониманию более сложных систем.

Так, подобного эффекта большого роста фазового сдвига можно добиться и с помощью многоканальной мишени, описываемой системой связанных уравнений Шредингера (см. формулы (15-20) и Рис 8,9). В пределе выключенной связи между каналами спектр полной системы получается наложением друг на друга спектров отдельных каналов, что, очевидно, допускает вырождение (кратное числу каналов M) уровней и резонансов и без сингулярностей во взаимодействии. Это свойство наложения отдельных "ветвей" спектра, хотя и зависимых теперь, сохраняется при включении связи каналов. Многоканальность как бы увеличивает емкость мишени (ее способность "заглатывать" узлы внешней синусоиды волновой функции) без увеличения размеров. Двухканальная мишень отталкивает рассеивающиеся волны при энергиях между резонансами, как одноканальная мишень того же размера, а втягивает узлы функции так же интенсивно, как вдвое большая одноканальная мишень с внутренней δ -перегородкой. Похожее явление также должно наблюдаться,

если структура мишени отвечает "уравнению Шредингера" высшего ($\nu > 2$) порядка [5] (за счет наложения друг на друга "складок" спектра). Зависимость потенциала от энергии - еще один способ наслаивания резонансов. И, конечно, нелокальные потенциалы еще в большей степени обладают такими степенями свободы.

Попутно будут затронуты новые аспекты теоремы Левинсона: влияние закрытых каналов на рост $\delta(k)$ с k и пояснение вклада связанных состояний над непрерывным спектром в решеточных задачах.

ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ δ -СТЕНКИ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЯМЕ

Подобные модели можно найти в книге Флюгге [6] т.1, задача 20, Рис. 3, 4 на стр.52 (см. также [7,8]), но здесь мы открываем их новые стороны. Это в особенности касается систем многоканальных, где возникает новый пласт интересных задач. Уравнение Шредингера для нашей модели имеет вид ($\hbar = 2m = 1$):

$$-\Psi'' + v \delta(x-\pi) \Psi = E \Psi, \quad (1)$$

δ -барьер имеет проницаемость, зависящую от множителя v при нем ($v \delta$ есть предел прямоугольного барьера шириной Δx и высотой $v(\Delta x)^2$ при $\Delta x \rightarrow 0$). В отгороженной барьером области возникают квазисвязанные состояния, с временами жизни, возрастающими с ростом v . При $v \rightarrow \infty$ барьер становится непрозрачным, а уровни и волновые функции квазистабильных состояний превращаются в соответствующие величины для связанных состояний в бесконечно глубокой яме ширины π (Рис.1а). На внешней границе мишени ($r = \pi$) сшиваем синусоиды волновых функций (Ψ должна быть непрерывной) и их производные ($d\Psi/dr$ имеет разрыв в точке δ -барьера):

$$A \sin k \pi = \sin[k \pi + \delta(k)], \quad (2)$$

$$A k \cos k \pi + v A \sin k \pi = k \cos[k \pi + \delta(k)]. \quad (3)$$

Из (2, 3) находим фазу рассеяния $\delta(k)$ и амплитуду $A(k)$ функции внутри мишени:

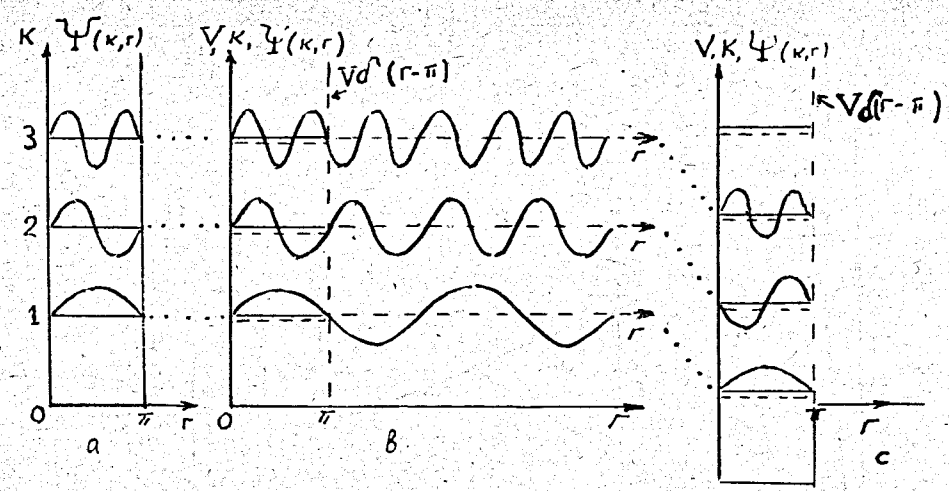


Рис.1. Связанные состояния бесконечной прямоугольной ямы (а) превращаются в квазистабильные резонансные состояния при замене одной из стенок ямы полупрозрачным δ -барьером (б). Уровни резонансов смещаются несколько вниз относительно уровней связанных состояний. Функции связанных состояний переходят без искажения в волновые функции непрерывного спектра, так как δ -барьер не возмущает решений, имеющих узел в точке расположения барьера. (с) - та же модель, что и (б), только с опущенным дном потенциала мишени

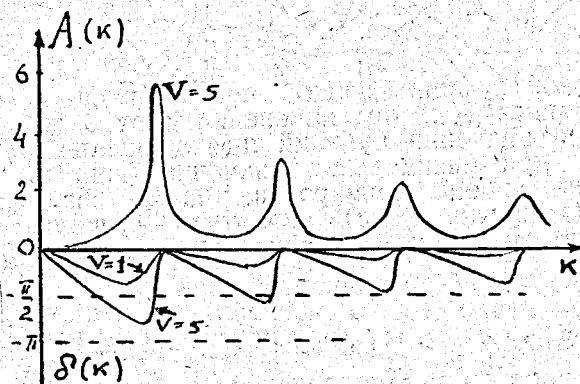


Рис.2. Резонансное поведение амплитуды $A(k)$ волновой функции в области, отгороженной δ -барьером, и фазового сдвига $\delta(k)$. По оси ординат отложены две шкалы: вверх для $A(k)$ и вниз - для δ . Функция $A(k)$ отвечает барьеру с $v=5$, а δ - с $v=5$ и $v=1$. Для неточечных барьеров подъемы $\delta(k)$ не достигают нуля; только $\delta \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

$$\delta(k) = \text{arccotg}[\text{ctg} k \pi + v/k] - k \pi, \quad (4)$$

$$A(k) = \sin[k \pi + \delta(k)] / \sin k \pi. \quad (5)$$

Эти функции представлены на Рис.2.

При вычислении arccotg нужно позаботиться о непрерывности

$\delta(k)$: убрать возможные скачки с помощью добавок, кратных π .
 Задержке волны в мишени отвечает участок подъёма $\delta(k)$ - см. Рис.3 (время задержки пропорционально $d\delta(k)/dk$).

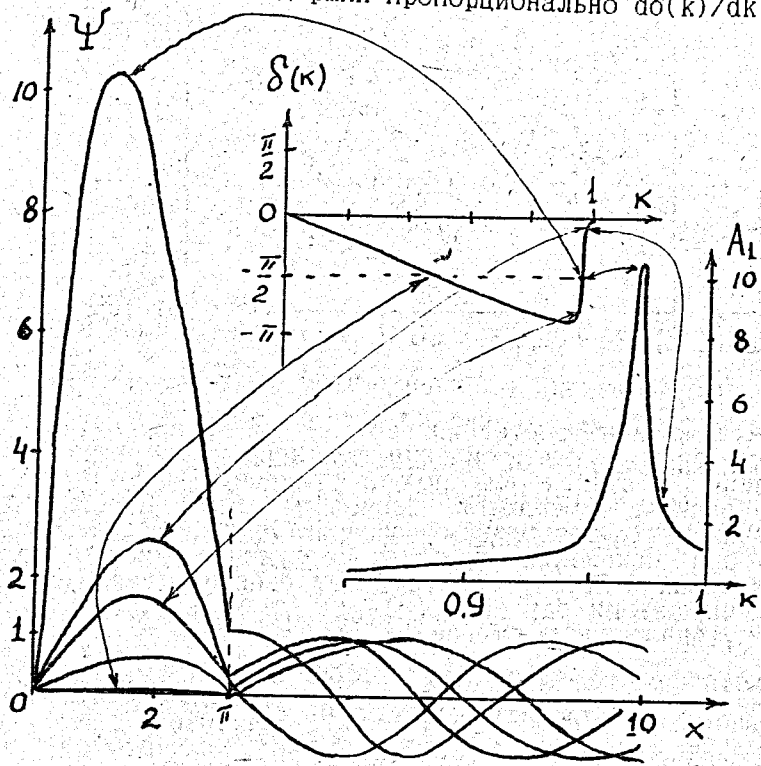


Рис.3. Поведение волновой функции $\Psi(k, x)$, ее амплитуды A внутри мишени и фазового сдвига $\delta(k)$ при изменении k от 0 до 1. Стрелками сопоставляются значения функций при одинаковых значениях k (в резонансе, при минимальном значении фазы и т.д.). Амплитуда волны вне мишени нормирована на 1. Ниже резонанса в точке k_{min} (минимума фазы) амплитуды функций внутри и вне мишени сравниваются, как и в точке $k = 1$, выше резонанса

Резонансы на решетке. Рассмотрим разностное уравнение Фреддинера [1] (шаг разностного дифференцирования $\Delta = 1$):

$$\Psi(n+1) + 2\Psi(n) - \Psi(n-1) + v(n)\Psi(n) = (E \approx 2 - 2\cos k)\Psi(n) \quad (6)$$

потенциалом в виде барьера $v_0 \delta_{nm}$, сосредоточенного в $n = m$.
 отличие от случая непрерывной координаты, здесь число вазисвязанных состояний и резонансов ограничено числом координатных точек внутри мишени.

На Рис.4 (а, b) показана энергетическая зависимость фазы рассеяния в зоне проводимости (см. условные картинки справа, где запрещенные зоны выделены штриховкой), когда $m = 2$ и 3. При $m = 1$ барьер отгораживает лишь одну точку и с такой мишенью возможен лишь один резонанс. При $m = 3$ имеются два резонанса. В точке барьера "локальная разрешенная зона" вдвигается в верхнюю запретную зону на глубину (скорее - высоту) v и в образовавшейся "перевернутой яме с глубиной v " может при достаточно большом v (при $m = 2$ для $v > 0.5$)

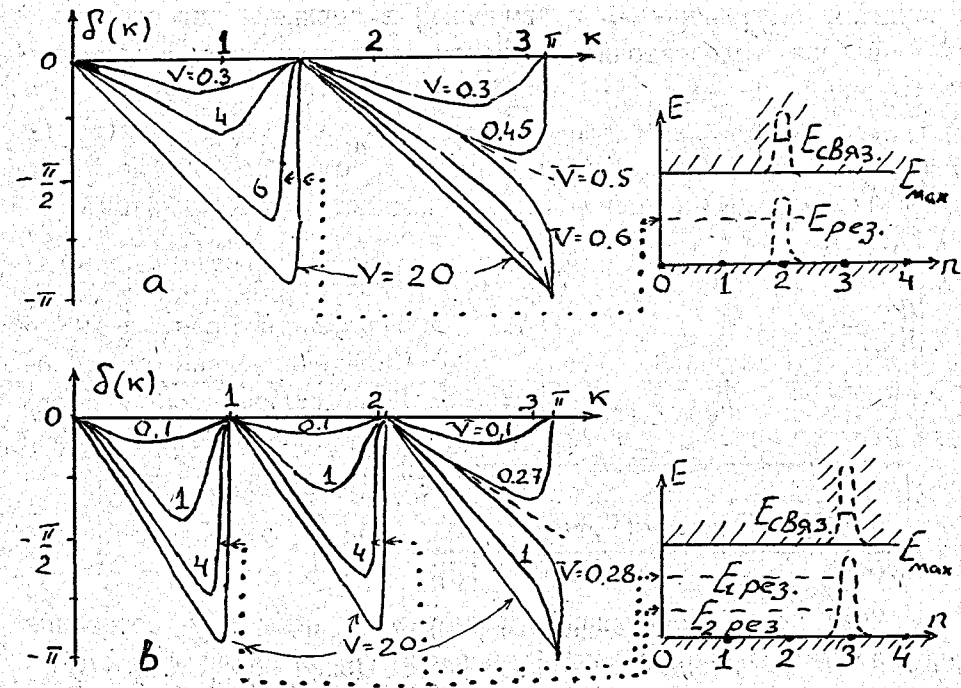


Рис.4. Фаза рассеяния $\delta(k)$ для разностного уравнения (6) и решеточных мишеней с (а) одной и (б) двумя точками за барьером и для разных значений v . Условные картинка справа показывают барьеры в разрешенной зоне и локальный подъем разрешенной зоны над барьерами в верхнюю запретную зону. Скачок в δ при $k=\pi$ отвечает величине v , при которой появляется связанное состояние выше непрерывного спектра. При значении v , при котором над барьером появляется связанное состояние выше зоны проводимости, фазовый сдвиг терпит на краю зоны $k = \pi$ скачок от $\delta(\pi)=0$ до $\delta(\pi)=-\pi$. Пунктирные линии со стрелками соединяют резонансные точки на левых и правых рисунках

образоваться связанное состояние. В этом случае фаза на верхней границе $E_{\max} = 4$ ($k_{\max} = \pi$) зоны проводимости оказывается равной $-\pi$. Теорема Левинсона для решеток имеет вид: $\delta(k=0) - \delta(k=\pi) = n\pi$ (где n - сумма связанных состояний выше и ниже непрерывного спектра). Вклад верхнего связанного состояния в фазовый сдвиг отрицательный из-за того, что волновая функция "недоколебалась" в области барьера (на столько π , сколько связанных состояний выше k_{\max}). При малой высоте барьера v резонансы не возникают: кривые $\delta(k)$ не достигают величины $-\pi/2$ и "вмятина" в верхней запретной зоне оказывается недостаточно глубокой для появления связанного состояния.

Если углубить потенциал внутри мишени, как показано на Рис.1(с), фаза $\delta(k)$ начинает расти уже от $k=0$, - см.Рис.5. То же можно получить и для моделей с дискретной координатой.

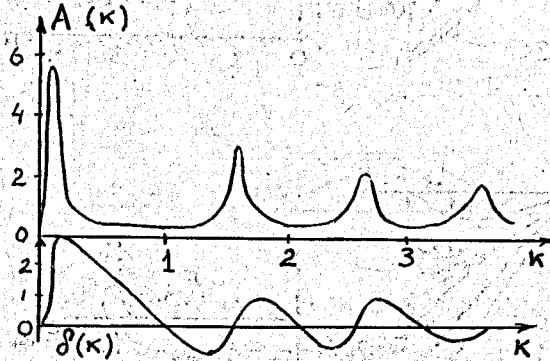


Рис.5. То же, что на Рис.2, но для мишени с квазисвязанным состоянием вблизи $k=0$, когда потенциальное дно мишени опущено ниже $E = 0$

Итак, в рассмотренных примерах мы получили колебания энергетической зависимости фазы рассеяния с амплитудой $\leq \pi$. А нельзя ли "раскачать" $\delta(k)$ с большей амплитудой, что было бы положительным ответом на вопрос Н.Юдина. Оказывается, можно, если "сжать" соседние резонансы (квазистабильные состояния) в тесные группы. Этого можно проще всего добиться с помощью δ -потенциальных перегородок внутри модельной мишени (см., например, Рис.6.). Мишень со спаренными резонансами способна с удвоенной интенсивностью "втягивать" в себя синусоиду внешней волновой функции (в области резонансов) и "выталкивать" ее (вдали от резонансов).

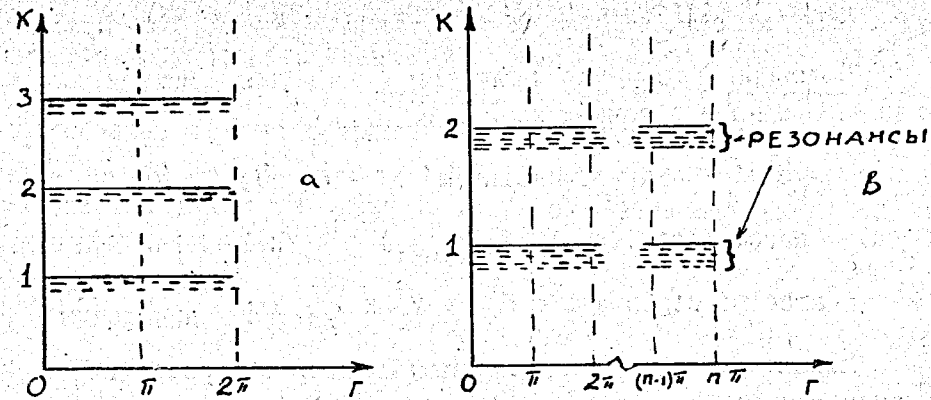


Рис.6. Мишень, образованная (а) двумя δ -барьерами в точках π и 2π ; (б) - n барьерами. В пределе непроницаемых барьеров мишень превращается в систему двух (n) бесконечно глубоких прямоугольных ям с дважды (n -кратно) вырожденными уровнями (сплошные линии при $k = 1; 2; 3...$). Слабая прозрачность барьеров приводит к расщеплению уровней в пары (n) близких резонансов, расположенных несколько ниже стабильных уровней (пунктир)

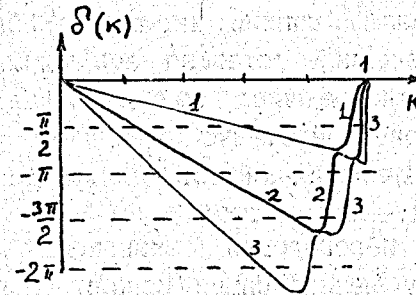


Рис.7. Зависимость фазового сдвига от k для одного δ -барьера в точке $x = \pi$, двух δ -барьеров при $x = \pi; 2\pi$ и трех δ -барьеров при $x = \pi; 2\pi; 3\pi$. В точках касания разных кривых последний барьер попадает на узел волновой функции и не возмущает её.

Формулы, аналогичные (2-5), для случая мишени с внутренними δ -перегородками получаются сшиванием Ψ в точках каждого барьера (A_2, δ_2 - амплитуда и фаза синусоиды внутри второго отсека мишени):

$$A_1 \sin k \pi = A_2 \sin(k \pi + \delta_2), \quad (6)$$

$$A_1 k \cos k \pi + v_1 A_1 \sin k_2 \pi = A_2 k \cos(k \pi + \delta_2), \quad (7)$$

$$\delta_2(k) = \operatorname{arccot}[\operatorname{ctg} k \pi + v/k] - k\pi, \quad (8)$$

$$\delta(k) = \operatorname{arccot}[\operatorname{ctg}(k 2\pi + \delta_2) + v/k] - 2k\pi, \quad (9)$$

$$A_1 = A_2 \sin[k\pi + \delta_2(k)] / \sin k\pi, \quad (10)$$

$$A_2 = \sin[2k\pi + \delta(k)]/\sin 2k\pi. \quad (11)$$

Подобные формулы получаются и для мишени с n δ -перегородками в точках $\pi, 2\pi, \dots$

$$A_{m-1} = A_m \sin[(m-1)\pi + \delta_m]/\sin[(m-1)\pi + \delta_{m-1}]; \delta_1 = 0, \quad (12)$$

$$\delta_n(k) = \text{arcctg}\{\text{ctg}[(n-1)k\pi + \delta_{n-1}] + V/k\} - k\pi(n-1), \quad (13)$$

$$\delta(k) = \text{arcctg}\{\text{ctg}[n k \pi + \delta_n] + V/k\} - k n \pi. \quad (14)$$

Мишень с n слабо-прозрачными δ -барьерами, расположенными эквидистантно (в точках $\pi; 2\pi; 3\pi \dots n\pi$), имеет группы по n резонансов на узких интервалах $\Delta k < 1$ (Рис.6b). Тесное расположение резонансов приводит к втягиванию n узлов волновой функции в мишень при прохождении (с ростом) k резонансной зоны (сравни с многоканальным случаем Рис.8).

Фазы от одной и двух ям совпадают в точке минимума фазы от первой ямы (Рис.7), где выравниваются амплитуды синусов внутри обоих отсеков мишени (излом функции на внутренней перегородке меняет знак ее производной, оставляя ее модуль неизменным) и вне мишени. Это волновое число k_{\min} отвечает связанному состоянию в яме с бесконечной стенкой в точке $x = 2\pi$ и δ -перегородкой посередине. Аналогичная ситуация и для фазовых сдвигов для двух и трех ям, - см. Рис.7.

В большой мишени (Рис.6b) перегородки вызывают самогашение волн в областях между резонансными зонами (при длинах волн, далеких от размеров отдельных отсеков). Там с ростом k фаза убывает, а в области квазистационарных уровней $\delta(k)$ поднимается на величину порядка $n\pi$, не успевая опускаться между уровнями. При прохождении узкой резонансной зоны ($\Delta k < 1$) мишень "заглатывает" n узлов (в группе квазисвязанных состояний число узлов нарастает по одному при подъеме от одного уровня к другому).

Если в уравнении Шредингера помимо потенциала имеется центробежный барьер $l(l+1)/r^2$ или кулоновский $z_1 z_2 / r$, фазовый сдвиг $\delta(k)$ отсчитывается относительно функции Бесселя (волновой функции свободного движения с отличным от нуля

угловым моментом l или кулоновской функции, - см. [9]). Если имеется n квазисвязанных состояний за барьером за счет дополнительного короткодействующего притягивающего потенциала, то они обеспечивают рост фазового сдвига $\delta(k)$ с энергией на величину порядка $n\pi$. Только за верхним резонансом начинается в соответствии с теоремой Левинсона спад $\delta(k)$ к нулю при $k \rightarrow \infty$.

МНОГОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Свойством ускоренного "втягивания" узлов волновой функции Ψ внутрь области взаимодействия (в предположении, что Ψ вещественна - случай комплексных Ψ сводится к комбинации вещественных решений) при малом изменении импульса может обладать мишень с многоканальными степенями свободы внутренней структуры. В M -канальной системе возможно M -кратное вырождение уровней, как в мишени с M δ -перегородками. Это просто продемонстрировать на системе связанных с δ -образной или постоянной матрицей взаимодействия $V_{\alpha\beta}$ на конечном отрезке: $0 < r < r_0$, когда закрыты все каналы, кроме канала упругого рассеяния (пусть $V_{\alpha\alpha}$ для закрытых каналов обращается в бесконечность при $r > r_0$). В простейшем случае двух каналов система уравнений Шредингера с δ -связью каналов в точке x_0 и δ -барьером в первом канале в точке π имеет вид:

$$\begin{aligned} \Psi_1'' + V_{12} \delta(x-x_0) \Psi_2 + V_1 \delta(x-\pi) \Psi_1 &= E \Psi_1 \\ \Psi_2'' + V_{21} \delta(x-x_0) \Psi_1 &= E \Psi_2; \quad \Psi_2(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение системы (15) запишем с помощью функции-ступеньки Ω :

$$\Psi_1(x) = A_1 \sin kx - (V_{12}/k) \cos kx \sin kx_0 \Omega(x-x_0) \Psi_2(x_0) - (V_{12}/k) \sin kx \cos kx_0 \Omega(x_0-x) \Psi_2(x_0)$$

и аналогично для $\Psi_2(x)$.

$$\Psi_1(x_0) = (A_1 \sin kx_0 - L)/P, \text{ и аналогично для } \Psi_2(x_0);$$

$$\text{где } L = \frac{V_{12}}{k} \sin^2 kx_0 \cos kx_0; \quad P = 1 - (V_{12}^2/4k^2) \sin 2kx_0,$$

$$\delta(k) = \text{arcctg}[\Psi'(\pi)/\Psi(\pi)] \frac{1}{k} + V_1 - k\pi. \quad (16)$$

Эта фаза представлена на Рис.8.

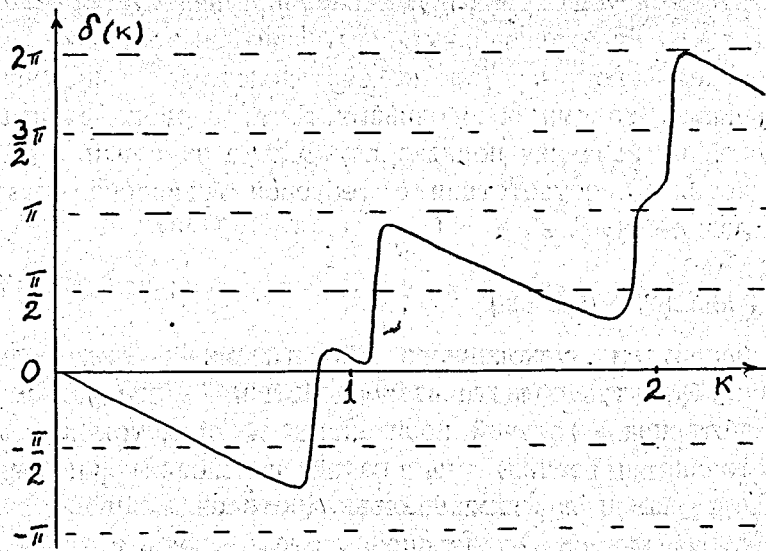


Рис.8. Фазовый сдвиг для двухканальной мишени с δ -связью каналов (15). Сравни со случаем одноканальной мишени с двумя отсеками (рис.7). Здесь мишень компактнее, и слабее выражено спадание $\delta(k)$ между резонансными зонами

Теорема Левинсона в случае одного канала, закрытого при всех энергиях. В рассмотренном выше (Рис.8) и др. примерах со вторым каналом, запертым бесконечной непроницаемой стенкой, фаза рассеяния поднимается с ростом k неограниченно, благодаря "накоплению узлов" в закрытом канале. Если же открыть этот канал выше n -го состояния, фаза рассеяния, поднявшись на высоту за счет соответствующих n скачков, при увеличении энергии за порогом начнет спускаться к нулю, как это полагается по обычной теореме Левинсона [1], гл.4 и [10].

Благодаря простой δ -связи, из второго уравнения в (15) легко выразить Ψ_2 через Ψ_1 и подставить в уравнение для Ψ_1 . В результате получим одноканальное уравнение с δ -потенциалом, зависящим от энергии:

$$-\Psi_1'' + V(k)\delta(x-x_0)\Psi_1 = E\Psi_1. \quad (17)$$

В общем же случае потенциалы, зависящие от энергии, позволяют создавать резонансные зоны с произвольным числом и плотностью резонансов.

Рассмотрим конечно-разностную двухканальную модель с δ -связью каналов (шаг разностного дифференцирования $\Delta = 1$):

$$\begin{aligned} & -\Psi_1(n+1) + 2\Psi_1(n) - \Psi_1(n-1) + v_{12}\delta_{n1}\Psi_2(n) + \delta_{n2}v\Psi_1(n) = \\ & = (E-2-2\cos k)\Psi_1(n), \\ & -\Psi_2(n+1) + 2\Psi_2(n) - \Psi_2(n-1) + v_{21}\delta_{n1}\Psi_1(n) = E\Psi_2(n). \quad (18) \end{aligned}$$

Второй канал будем полагать закрытым при всех энергиях: $\Psi_2(2)=0$, а в первом в точке $n=2$ имеется δ -барьер высотой v . Фаза рассеяния на такой системе ($w = v_{12}v_{21}$):

$$\delta(k) = \text{arctg}\{\text{ctg}(k)[1 - 1/(2\cos^2 k - w/2)] + v/\text{sink}\} - 2k$$

показана на Рис.9.

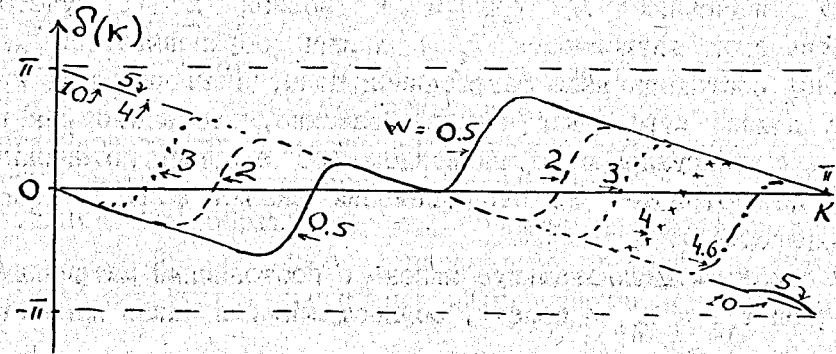


Рис.9. Фазовый сдвиг $\delta(k)$ двухканальной мишени разностной системы (18) с барьерами в точке 2: непроницаемым во втором и полупрозрачным (v) в первом канале. При увеличении силы связи каналов (значения w помечены цифрами) два резонансных скачка раздвигаются, пока квазистабильные состояния не переходят в связанные состояния ниже (при $w > 3$) и выше (при $w > 4.6$) разрешенной зоны

При слабой связи каналов в зоне проводимости имеется два резонанса (по одной точке за барьером в каждом канале). С ростом v_{12} (или w) сначала первый резонанс опускается под нижнюю границу разрешенной зоны и становится обычным связанным состоянием. При этом $\delta(0)$ претерпевает скачок из 0 в π в соответствии с теоремой Левинсона. Затем второй

резонанс пересекает верхнюю границу зоны проводимости и превращается в связанное состояние над непрерывным спектром. Нужно еще учитывать другое связанное состояние над непрерывным спектром, обусловленное барьером V в первом канале.

Аналогично (17) можно свести систему (18) к одноканальному уравнению Шредингера с зависящим от энергии потенциалом:

$$V_1(k) = V_{12}V_{21} / (E - 2) = -V_{12}V_{21} / (2\cos k). \quad (19)$$

Обратите внимание на сингулярность этого потенциала (со сменой знака) в центре разрешенной зоны $E = 2$. Для автора не полностью ясным остается вопрос о физическом смысле этой сингулярности и о соответствии поведения гладкой функции $\delta(k)$ на Рис.9 теореме Левинсона. При достаточно больших значениях V , V_{12} и k вблизи π (с учетом энергетической зависимости V_1) должны образовываться два связанных состояния выше разрешенной зоны, а значит, фаза при $k \rightarrow \pi$ должна стремиться к -2π . Возможно, это можно как-то связать с сингулярностью зависящего от энергии потенциала $V_1(k)$ (не потребует ли это введения скачка фазы в точке сингулярности?).

Рассмотрим двухканальную мишень с постоянными матричными элементами $V_{12} = V_{21} = \text{const}$, осуществляющими связь каналов:

$$\begin{aligned} -\Psi_1'' + V_{12}\Psi_2 + V_{11}\delta(x-\pi)\Psi_1 &= \Psi_1, \\ -\Psi_2'' + V_{21}\Psi_1 &= \Psi_2; \quad \Psi_2(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Как и в системах (15, 18), открыт только первый канал, перегороденный δ -барьером в точке $x = \pi$, а волны второго заперты на интервале $[0, \pi]$ и сообщаются с внешней областью лишь через связь V_{21} с первым каналом (только теперь эта связь равномерно распределена по всей мишени, а не сосредоточена в одной точке x_0). Благодаря постоянству матрицы взаимодействия внутри мишени, для комбинаций $\Psi_1 \pm \Psi_2$ получается расцепленная система:

$$\begin{aligned} -(\Psi_1 + \Psi_2)'' + V_{12}(\Psi_1 + \Psi_2) &= E(\Psi_1 + \Psi_2), \\ -(\Psi_1 - \Psi_2)'' - V_{12}(\Psi_1 - \Psi_2) &= E(\Psi_1 - \Psi_2). \end{aligned} \quad (21)$$

С решениями $\Psi_1 + \Psi_2 = A_+ \sin k_+ x$;

$$\Psi_1 - \Psi_2 = A_- \sin k_- x; \quad k_{\pm} = (E \mp V_{12})^{1/2},$$

$$\delta(k) = \text{arccot} [(k_+/2k) \text{ctg } k_+ \pi + (k_-/2k) \text{ctg } k_- \pi + 2V_0/k] - k\pi.$$

Поведение этой фазы подобно Рис.8. Мы не будем приводить полученные с помощью "математики" данные о движении узлов внутри мишени как для систем (21), (15), так и для двухканальных ядерных систем, пока не найдено простое объяснение наблюдаемой картине. Мы надеемся, что эти простейшие модели послужат кирпичиками, из которых сложится понимание общего случая.

При двух и более открытых каналах вместо фазовых сдвигов нужно рассматривать собственные фазовые сдвиги. В собственно-фазовых состояниях узлы каналов функций "заглатываются" одновременно во всех каналах. Здесь также еще предстоит разобраться в механизмах формирования энергетической зависимости параметров рассеяния. Это же относится и к уравнениям с высшими производными.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. СДВИГИ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА УРОВНЕЙ

Поставим полупрозрачную потенциальную δ -стенку $V(x) = V_0 \delta(x - \pi/2)$ в центре ($x = \pi/2$) бесконечной прямоугольной ямы. Все четные уровни оказываются нечувствительными к такому возмущению потенциала, так как узлы собственных функций расположены в центре ямы. Все же нечетные уровни сдвинутся вверх. Нечетные собственные функции приобретут излом на месте δ -барьера. С ростом V_0 δ -стенка становится более непроницаемой и нечетные уровни будут все теснее сближаться со своими неподвижными соседями сверху (расстояние между сближающимися уровнями меньше для нижних уровней). В пределе непроницаемой стенки, естественно, будет

полное двукратное вырождение всех уровней. Все сказанное верно, конечно, и для любой бесконечной ямы, симметричной относительно своего центра (см. рис. П1).

Если же δ - барьер расположить на расстоянии $1/3$ ширины ямы от одной из ее стенок, то нечувствительными к нему будут все уровни, кратные трем, где расположены узлы их собственных функций. С ростом V_0 все уровни $3n-1$ и $3n-2$ будут подниматься к неподвижным уровням $3n$. При этом в узкой части ямы собственные функции поднимающихся уровней будут испытывать самогашение (у функций $3n-2$ убывание амплитуды монотонное с ростом V_0 до полного исчезновения в области $2/3\pi < x < \pi$, а у функции $3n-1$ перед слиянием с верхним соседом сформируется стоячая волна той же амплитуды, что и в широкой части ямы). В пределе непроницаемой стенки уровни $3n-1$ сольются с уровнями $3n$ (для которых $E_{3n} = 9n^2$, собственные функции $3n$ и $3n-1$ будут отличаться только знаком в узкой части ямы), а уровни $3n-2$ станут уровнями ямы шириной $2/3\pi$ ($E = 3/2 \pi$). Вообще, при δ -барьере в точке $x = (m-1)\pi/m$ на месте остаются уровни, кратные m , а уровни, лежащие между ними, поднимаются по направлению к ним.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ОЦЕНКИ ШИРИН РЕЗОНАНСОВ В ПОДХОДЕ С ЧИСТО ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

Идея предлагаемого метода возникла в дискуссиях с А.М. Горбатовым, В.П. Комаровым, П.Ю. Никишовым и В.Л. Скопичем (см. кандидатские диссертации трех последних, работы в ЯФ и сборниках Тверского университета и ссылки в них). Рассмотрим простейшую модельную систему с квазистабильными состояниями: движение волн на полуоси $0 < r < \infty$ с δ -барьером в точке $x = \pi$ (можно представлять себе, что в начале координат имеется непроницаемая стенка). Если бы δ -барьер был непроницаем ($V_0 = \infty$), между барьером и стенкой были бы стационарные состояния, как в бесконечной прямоугольной яме. При конечных значениях V_0 эти уровни превращаются в квазистационарные состояния (они спускаются по энергии по сравнению со стационарными состояниями Рис.1 в зависимости от силы V_0). Наша цель - определить (показать, как определить)

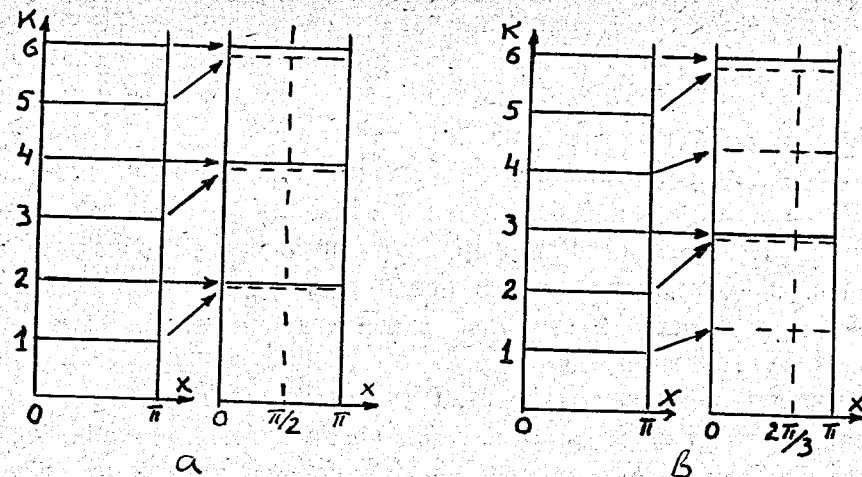


Рис. П1. Подъем уровней прямоугольной ямы ширины π с уменьшением проницаемости δ -перегородки: (а) - в центре ямы и (б) - в точке $2\pi/3$. По оси ординат отложен волновой вектор $k = E^{1/2}$

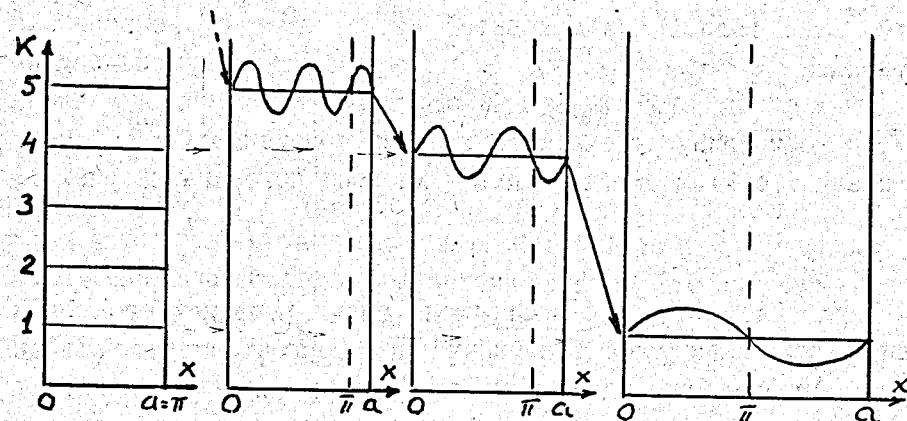


Рис. П2. Опускание уровня, отвечающего стоячей волне в расширяющейся правой части ямы (за δ -перегородкой в точке π), где решение $\Psi(x > \pi) = A_2 \sin[kx + \delta_2(k)]$; $\Psi(a) = 0$ с δ_2 , совпадающим с фазовым сдвигом рассеяния на δ -перегородке при соответствующей энергии. (Из условия $\Psi(a) = 0 \rightarrow ka + \delta = n\pi \rightarrow \delta = n\pi - ka$). Показаны лишь случаи совпадения уровней расширенной ямы с уровнями исходной ямы. В промежуточных положениях (вдали от резонансов, расположенных чуть ниже уровней исходной ямы) волновая функция опускающегося уровня подавляется в левой стороне ямы. Форма $\delta_2(k)$ совпадает с $\delta(k)$, показанной на рис. 2

ширины этих состояний, решая не задачу рассеяния, а задачу на собственные значения для системы с чисто дискретным спектром: когда справа от δ -барьера имеется вторая бесконечная непроницаемая стенка (см. рис.П2).

Проследим, что происходит с уровнями системы при движении правой стенки вправо от точки положения δ -барьера. При слиянии правой стенки с барьером уровни системы совпадают с уровнями прямоугольной ямы. В предыдущем разделе мы двигали δ -барьер, а теперь будем при фиксированном его положении непрерывно двигать правую стенку ямы. Собственная функция в правой части ямы пропорциональна функции свободного движения при данной энергии: наличие бесконечной стенки не искажает ее, если стенка располагается в узле функции. При расширении правой части ямы опускаются уровни, отвечающие стоячим волнам в ней. Таким образом при движении стенки вправо от δ -барьера происходит как бы "прощупывание" (сканирование) внутренней части ямы волной из внешней части ямы с непрерывным изменением E от ∞ до 0. Фаза рассеяния, например, определяется простой формулой по значению волнового числа $k(a)$, n -го уровня, отвечающего данному положению $x = "a"$ правой стенки: $\delta(k) \equiv \delta(k,a) = n\pi - ka$ (она показана на рис.2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автор надеется, что ко времени сдачи рукописи его новой книги "Уроки квантовой интуиции" в Энергоатомиздат осенью 1992г. невыясненные здесь вопросы будут решены и можно будет поделиться с читателем новым уроком, усвоенным в ходе работы над книгой.

Автор благодарен И.В.Амирханову, А.М.Горбатову, В.П.Комарову, В.К.Лукьянову, П.Ю.Никишову, В.Л.Скопичу, Н.П.Юдину за полезные дискуссии. Особо признателен автор Е.Братковской за консультации по программе "Математика".

Как указал автору В.С.Мележик, взаимное влияние соседних потенциальных ям рассматривалось в [11,12], что имеет некоторое отношение к рассматриваемым здесь проблемам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захарьев Б.Н., Сузько А.А. Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. Энергоатомиздат, М.1985. Переработанное и дополненное английское издание: Springer, Heidelberg, 1990.
2. Zakhariiev B.N., Serdjukova S.I. Preprint JINR E4-91-237, Dubna, 1991.
3. Захарьев Б.Н., Костов Н.А., Плеханов Е.Б. Точно решаемые одно- и многоканальные модели (уроки квантовой интуиции), ЭЧАЯ, 21, с.914-962, 1990.
4. Захарьев Б.Н. Уравнение Шредингера на решетках и в периодическом поле (для пешеходов). Препринт ОИЯИ Р-4-90-46, Дубна 1990; Необычные решения уравнения Шредингера. Сообщ.ОИЯИ, Р4-91-98, Дубна, 1991.
5. Захарьев Б.Н. Уравнения "Шредингера" высшего (> 2 -го) порядка. Сообщ. ОИЯИ Дубна Р4-91-127, 1991.
6. Флюгге З. Задачи по квантовой механике т.1 с.78-80, Мир, М., 1974.
7. Демков Ю.Н. и Островский В.Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике, ЛГУ, Л., 1975.
8. Альбеверлио С., Гестези Ф. и др. Решаемые модели в квантовой механике. Издат. Мир, М., 1991.
9. Ткаченко О.А., в сб. "Автоматизированные системы научных исследований обучения в вузах" Новосиб.НГУ, с. 48, 1985.
10. Береги П., Захарьев Б.Н. Теорема Левинсона (обзор). ЭЧАЯ 4, 512, 1973.
11. Карнаков Б.М., Мур В.Д., Попов В.С. ЯФ, 41, 1258, 1985.
12. Кудрявцев А.Е., Маркушин В.Е., Шапиро И.С. ЖЭТФ, 74, 431, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 октября 1991 года.