сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-91-163

В.И.Журавлев

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ $\pi\pi$-РАССЕЯНИЯ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

1991

Введение

В последнее время развито много новых методов, позволяющих описать характеристики рассеяния адронов при низких энергиях. Отметим среди них метод нелинейных киральных лагранжианов и многочисленные КХД-подобные кварковые модели [I]. Несмотря на универсальность этих методов, малое число параметров, фактически, они позволяют вычислить только статические характеристики и длины рассеяния, тогда как энергетический ход фаз рассеяния удовлетворительно описать не удается. Поэтому здесь продолжают эффективно использоваться дисперсионные методы, основанные на таких общих принципах, как аналитичность, унитарность и перекрестная симметрия [2]. Ниже мы опишем подход к решению дисперсионных уравнений $\pi\pi$-рассеяния при низких энергиях, ранее применявшийся к решению уравнений статической модели.

I. Статическая модель p-волн πN-рассеяния

Напомним уравнения статической модели для p-волны πN-рассеяния [3] :

$$h_i(\omega) = \frac{\lambda_i}{\omega} + \frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{Im} h_i(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{\sum_j A_{ij} \operatorname{Im} h_j(\omega')}{\omega' + \omega}\right) d\omega', \qquad (I)$$

где

$$h_i(\omega) = \frac{e^{i\delta_i(\omega)} \sin \delta_i(\omega)}{q^3\, u^2(q^2)} .$$

Здесь $\delta_i(\omega)$ - действительная фаза рассеяния в состоянии с определенными значениями полного изотопического спина T и полного момента количества движения J , т.е. $i=(2T, 2J)$,

μ - масса и $\omega=\sqrt{q^2+\mu^2}$ - полная энергия мезона в системе центра масс, $u(q^2)$ - фурье-образ функции источника, A - матрица перекрестной симметрии, а числа λ_i пропорциональны квадрату константы мезон-нуклонного взаимодействия и $\sum_j A_{ij}\lambda_j = -\lambda_i$.

Методы решения уравнений (I) подробно изложены в обзоре [4]. Основным моментом при решении уравнений (I) является учет вида римановой поверхности амплитуд, что достигается переходом к униформизующей переменной W:

$$W = \frac{1}{\pi} \arcsin \omega. \tag{2}$$

Конкретный вид римановой поверхности следует из общего решения уравнений S -волнового πN -рассеяния, которые имеют вид, аналогичный уравнениям(I) с матрицей перекрестной симметрии 2x2 [2]. Тогда основные свойства функций, удовлетворяющих (I), в переменной W формулируются следующим образом:

I) $S(W)$ - столбец мероморфных в плоскости W функций;

2) $S^*(W)=S(W^*)$;

3) $S(1-W)S(W) = 1$ - условие унитарности; (3)

4) $S(-W) = A S(W)$ - условие перекрестной симметрии.

Два важных свойства привели к такой формулировке. Во-первых, функция $u(q^2)$ - симметричная функция ω, во-вторых, матрица A удовлетворяет условию $\sum_j A_{ij}=1$,
и поэтому условия перекрестной симметрии для функций

$$S_i(\omega) = 1+2iq^{2\ell+1}u^2(q^2)h_i(\omega)$$

имеют такой же вид, как и для функции $h_i(\omega)$.

Такая формулировка задачи позволяет сразу установить вид произвола решения. Действительно, если $S(W)$ – решение задачи (3), то и функции $S[W+\beta(W)]\cdot\mathcal{D}(W)$, где функции $\beta(W)$ и $\mathcal{D}(W)$ удовлетворяют условиям

$$\mathcal{D}^*(W) = \mathcal{D}(W^*),\quad \mathcal{D}(W)\cdot\mathcal{D}(1-W)=1,\quad \mathcal{D}(W)=\mathcal{D}(-W)$$

$$\beta^*(W) = \beta(W^*),\quad \beta(W) = -\beta(-W),\quad \beta(W)=\beta(W+1),$$

также будут удовлетворять условиям (3).

Особенности статической задачи позволили свести решение системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений (I) к автономной системе нелинейных разностных уравнений (3). Симметрия функции $u(q^2)$ делает эффективным переход к проективному пространству $X(W) = \frac{S_i(W)}{S_j(W)}$, что позволяет понизить порядок системы уравнений.

П. Формулировка задачи для $\pi\pi$ -рассеяния

Если ограничиться S -волнами в амплитудах с изоспином 0 и 2 и р-волной в амплитуде с изоспином I, придем к известной системе уравнений [2] :

$$f_i(z) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \left(\frac{\operatorname{Im} f_i(z')}{z'-z} + \frac{A_{ij}\operatorname{Im} f_j(z')}{z'+z} \right) dz', \tag{4}$$

$$\operatorname{Im} f_i(z) = K(z)\,|f_i(z)|^2, \tag{5}$$

$$K(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}},\quad A = \begin{pmatrix} 1/3 & -3 & 5/3 \\ -1/9 & 1/2 & 5/18 \\ 1/3 & 3/2 & 1/6 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Заметим, что $\sum_j A_{ij} \neq 1$.

Вид функции $K(z)$ существенно усложняет анализ уравнений (4) по сравнению с уравнениями (I) статической модели. Здесь нет особого смысла во введении функций $S_i(z)$

$$f_i(z) = \frac{S_i(z)-1}{2i\,K(z)}, \qquad (7)$$

поскольку они не будут удовлетворять простому (не зависящему от z) условию перекрестной симметрии. Уравнения (4) и условие унитарности (5) определяют функции $f_i(z)$, удовлетворяющие следующим основным условиям:

I) $f_i(z)$ - мероморфные функции в комплексной плоскости z с разрезами $(-\infty,-1]$, $[+1,+\infty)$;

2) $f_i^*(z) = f_i(z^*)$,

3) $Im\, f_i(E+i0) = K(E)\,|f_i(E+i0)|^2$,

4) $f_i(-z) = A_{ij} f_j(z)$.

Решение уравнений нейтральной модели [2] показывает, что риманова поверхность амплитуды рассеяния униформизуется все той же переменной W (2). Поэтому предположим, что и в случае заряженных пионов риманова поверхность будет иметь такой же вид.

Тогда придем к следующей формулировке задачи. Найти функции $h_i(w) = f_i[z(w)]$, удовлетворяющие условиям:

I) $h_i(W)$ - мероморфные функции в плоскости W ;

2) $h_i^*(w) = h_i(w^*)$,

3) $\dfrac{1}{h_i(1-w)} = \dfrac{1}{h_i(w)} + 2K(w)$ - условие унитарности; (8)

4) $h_i(-w) = A_{ij} h_j(w)$.

Здесь

$$K(w) = iK[z(w)] = tg\frac{\pi}{2}\left(w-\frac{1}{2}\right).$$

Отметим несколько полезных свойств функции $K(W)$:

$$K(w)K(-w)=1, \quad K(w)K(w+1)=-1, \quad K(w+2)=K(w).$$

Разобьем $K(w)$ на симметричную и антисимметричную части:

$$K_s(w) = K(w) + \frac{1}{K(w)} = -\frac{2}{\cos\pi w},$$

$$K_a(w) = K(w) - \frac{1}{K(w)} = 2\,tg\,\pi w.$$

Тогда можно записать частные решения условия унитарности. Вводя функцию $H(w) = \frac{1}{h(w)}$, получим следующие частные решения условия унитарности:

$$H_s(w) = -K(w) - \left(w-\frac{1}{2}\right)K_a(w),$$

$$H_a(w) = -K(w) - \left(w-\frac{1}{2}\right)K_s(w),$$

$$H(w) = -K(w), \quad H(w) = -2wK(w).$$

Задача (8) существенно сложнее аналогичной задачи в случае статической модели. Основная трудность связана с тем, что из-за конкретного вида функции $K(w)$ она сводится к неавтономной системе нелинейных функциональных уравнений.

Ш. Решаемая модель

Пренебрежем волной с изоспином 2. Перейдем к функциям $S_i(z)$ (7). Тогда из условий (8) получим:

$$(1-\sin\pi w)\left[S_0(-w)-1\right] = \frac{9}{2}(1+\sin\pi w)\left[S_1(w)-1\right] \tag{9}$$

$$S_0(w)\,S_0(1-w)=1\,, \quad S_1(w)\,S_1(1-w)=1.$$

Из (9) получим нелинейное разностное уравнение, например, для функции $S_0(w)$:

$$\frac{2}{9}\tilde{K}(w)\left[S_0(w-1)-S_0(w+1)S_0(w-1)+S_0(w+1)-1\right]+S_0(w+1)S_0(w-1)-$$
$$-2S_0(w+1)+1=0. \tag{10}$$

Здесь
$$\tilde{K}(w) = \frac{1-\sin\pi w}{1+\sin\pi w}.$$

Произведем замену $S_0(w)=\tilde{S}_0(w)+1$. Подстановка в уравнение (10) дает

$$\frac{1}{\tilde{S}_0(w+1)} - \frac{1}{\tilde{S}_0(w-1)} = \frac{2}{9}\tilde{K}(w)-1. \tag{11}$$

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$\frac{1}{\tilde{S}_0(w)} = \frac{1}{2}w\left[\frac{2}{9\tilde{K}(w)}-1\right]+g(w), \tag{12}$$

где $g(w)=g(w+2)\,,\quad g^*(w)=g(w^*)$.

Вернемся к функции $S_0(w)$ и потребуем для нее выполнения условия унитарности $S_0(w)S_0(1-w)=1$. Это приводит к следующему уравнению для функции

$$g(w)+g(1-w) = -\frac{1}{2}-\frac{1}{9\tilde{K}(w)}\,,$$

общее решение которого имеет вид

$$g(w) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{9\tilde{K}(w)}\right)+\beta(w)\,, \tag{13}$$

$$\beta(w)=-\beta(1-w)\,;\quad \beta(w)=\beta(w+2)\,,\quad \beta^*(w)=\beta(w^*).$$

Из (12),(13) имеем окончательно

$$S_0(w) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\left(w-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\tilde{K}(w)}-\frac{1}{2}\left(w-\frac{1}{2}\right)+\beta(w)}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\left(w-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\tilde{K}(w)}-\frac{1}{2}\left(w-\frac{1}{2}\right)+\beta(w)}. \tag{14}$$

Функция $S_1(w)$ выражается через $S_0(w)$:

$$S_1(w) = \frac{2}{9}\tilde{K}(w)\,\frac{1-S_0(w+1)}{S_0(w+1)}+1 =$$
$$= \frac{-\frac{1}{9}\tilde{K}(w)+\frac{1}{9}\left(w-\frac{1}{2}\right)\tilde{K}(w)-\frac{1}{2}\left(w-\frac{1}{2}\right)+\beta(w+1)}{\frac{1}{9}\tilde{K}(w)+\frac{1}{9}\left(w-\frac{1}{2}\right)\tilde{K}(w)-\frac{1}{2}\left(w-\frac{1}{2}\right)+\beta(w+1)}. \tag{15}$$

Отметим, что в решениях отсутствует $\mathcal{D}$ -произвол, известный в решениях статической задачи, что связано с видом функции $K(z)$.

Таким образом, задача о решении уравнений $\pi\pi$ -рассеяния, с математической точки зрения, существенно сложнее статической задачи. Рассмотренный пример все же показывает, что учет римановой поверхности амплитуды позволяет выяснить некоторые существенные особенности решений задачи, например, наличие в решениях функции $\beta(w)$.

В заключение автор выражает благодарность В.А.Мещерякову за многочисленные обсуждения и полезные замечания.

Литература

1. А.А.Бельков, В.Н.Первушин, Д.Эберт. ЭЧАЯ, 22, 5 (1991).
2. Д.В.Ширков, В.В.Серебряков, В.А.Мещеряков. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. Наука, Москва (1967).
3. Chew G., Low F. Phys.Rev. 101, 1570 (1956).
4. В.И.Журавлев, В.А.Мещеряков. ЭЧАЯ, 5, 172 (1974).

Рукопись поступила в издательский отдел
12 апреля 1991 года.

Журавлев В.И. Р4-91-163

Об одном методе решения дисперсионных уравнений $\pi\pi$-рассеяния при низких энергиях

Предложен подход к решению дисперсионных уравнений $\pi\pi$-рассеяния при низких энергиях, ранее применявшийся к решению уравнений статической модели. Особенности подхода проиллюстрированы на примере решаемой модели.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1991

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Zhuravlev V.I. P4-91-163

On a Method of Solution of Dispersion Equations for Low-Energy Pion-Pion Scattering

An approach is proposed for solving dispersion equations for low-energy pion-pion scattering used earlier in solving equations of the static model. The approach is illustrated for an exactly solvable model.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1991