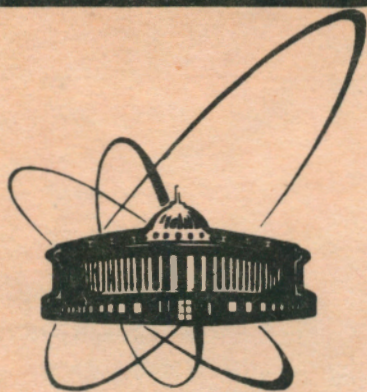


91-127



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P4-91-127

Б. Н. Захарьев

"УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА"
ВЫСШЕГО (>2 -го) ПОРЯДКА

1991

"Я еще не вполне понимал, что такое дифференциальные уравнения, но что-то уже угадывал и испытывал восторг перед их всесилием".

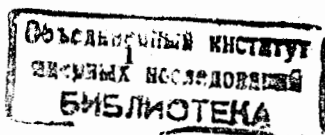
А. Д. Сахаров "Воспоминания".

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы рассмотрим уравнения высших порядков, которые не только интересны сами по себе, но и позволяют взглянуть на обычное уравнение Шредингера второго порядка как бы со стороны и тем самым лучше понять и его. Подобно тому, как его решения для прямоугольной потенциальной ямы и прямоугольного барьера при первом знакомстве с квантовой механикой вооружают нас на всю дальнейшую жизнь качественным пониманием общих закономерностей связанных состояний и рассеяния, так физическое исследование уравнений высших порядков естественно начинать с моделей, в которых в коэффициенты при производных разных порядков вводятся возмущения простейшей формы.

Но прежде, чем заняться этим, скажем несколько слов о том, где в волновой физике возникают уравнения n -их порядков. Напомним, что колебания тонкой упругой струны описываются обыкновенным уравнением Шредингера второго порядка. Уравнение колебания стержня уже четвертого порядка: не в том ли здесь дело, что условия на выпуклой и вогнутой кромках стержня в области прогиба различны (растяжение и сжатие), и возможно сочетание волн с разными волновыми числами, например, $\exp(\pm ik_1 x)$, $\exp(\pm ik_2 x)$. Колебания полого цилиндра допускают уже четыре типа волн с $\pm k_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), чему соответствует уравнение 8-го порядка.

Для выполнения законов сохранения нужны самосопряженные операторы. Это ограничивает нас дифференциальными операторами четного порядка, общий вид которых представляет собой сумму членов вида:



$$L_{2n} \Psi(x) \equiv \frac{d^n}{dx^n} \left[p(x) \frac{d^n}{dx^n} \Psi(x) \right]. \quad (1)$$

Действительно, при интегрировании по частям, чтобы убедиться, что $(\Phi, L_{2n} \Psi) = (\Psi, L_{2n} \Phi)$, мы сначала первые n (внешних) производных перебрасываем на Φ , а следующие n производных (в скобках в (1)) перебрасываем на $(p(x) \Phi^{(n)}(x))$ и получаем выражение, симметричное относительно перестановки Φ и Ψ .

Другая возможность получения уравнений высших порядков возникает при разложении оператора, соответствующего энергии в релятивистском случае (релятивистского гамильтониана) в ряд по \hat{p}^2 для учета релятивистских поправок

$$\sqrt{\hat{p}^2 + m^2 c^4} = \hat{p}^2 + m^2 c^4 + \hat{p}^4 + \dots \quad (2)$$

Уравнения "Шредингера" высших порядков возникают при описании колебаний плазмы.

В физике конденсированных сред используются разностные уравнения высших порядков (колебания кристаллов, спиновые решетки). Выпишем для примера разностное уравнение четвертого порядка (коэффициенты могут зависеть от n):

$$c \Psi_{n+2} + d \Psi_{n+1} + e \Psi_n + d \Psi_{n-1} + c \Psi_{n-2} = E \Psi_n. \quad (3)$$

Этим рекуррентным соотношениям отвечает пяти-диагональная симметричная матрица. Сравним с разностным уравнением Шредингера второго порядка (с три-диагональным гамильтонианом, T - оператор кинетической энергии, $m = 1$):

$$(T + V_n) \Psi_n \equiv - \frac{\Psi_{n+1} - 2\Psi_n + \Psi_{n-1}}{2\Delta^2} + V_n \Psi_n = E \Psi_n, \quad (4)$$

где Δ - шаг разностного дифференцирования. Разностному уравнению 6-го порядка отвечает матрица с семью диагоналями и т. д.

Одномерное "уравнение Шредингера" высшего порядка имеет не одну волну бегущую в одном направлении (и одну в обратном: $\exp[\pm ikx]$ в случае свободного движения или $\exp(\pm ikn\Delta)$ для дискретной переменной $x_n = n\Delta$), как обычное уравнение Шредингера второго порядка а несколько волн.

Например, подставляя в простейшее уравнение четвертого порядка с постоянными c, d, e :

$$-c \Psi^{(4)}(x) - d \Psi^{(2)}(x) = (E - e) \Psi(x) \quad (5)$$

решение в виде $\Psi = \exp[\pm ikx]$, находим четыре значения для волновых чисел

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{y}, \quad \text{где } y = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4a(E - e)}}{2a}. \quad (6)$$

Или подставляя в уравнение (3) $\Psi_n = \exp(\pm ikn\Delta)$, получаем характеристическое уравнение для k , в предположении постоянства коэффициентов c, d, e :

$$4c \cos^2(\Delta k) + 2d \cos(\Delta k) - 2c + e = E; \quad (7)$$

$$\cos(\Delta k) = \frac{-2d \pm \sqrt{4d^2 - 16c(e - 2c - E)}}{8c}, \quad (8)$$

откуда находим четыре значения квазиимпульса $\pm k_1, \pm k_2$.

Знаки \pm в (8) и в выражении для y в (6) вносят различие по модулю значений k_1 и k_2 , а знаки самих k_1, k_2 определяют направление распространения волны (вправо или влево, если построить из этих волн пакеты с учетом временных факторов $\exp(-iEt)$). Отметим еще, что при росте E , модуль одного из волновых чисел растет, а другого - убывает.

Между волнами с разными k происходят переходы, если коэффициенты уравнения не постоянны. Например, если какой-то из коэффициентов имеет форму прямоугольного барьера, то посылая на него одну волну (специальным выбором граничных условий), мы получим несколько волн отраженных и несколько - прошедших. Исследуя проникаемость таких барьеров в различных коэффициентах, можно надеяться преобрести интуицию, которая поможет понимать и общий случай переменных коэффициентов. Полезно провести параллели с многоканальной задачей, где также в области постоянной матрицы зацепления каналов имеются несколько независимых волн. Здесь, как и там, естественно ожидать эффектов типа усиления проникаемости [2] и нарушения симметрии прохождения волн через барьеры в противоположных направлениях.

Возможно на этом пути удастся лучше понять свойства нелокальных потенциалов (пока достаточно хорошо изучены лишь простейшие из них - сепарабельные [16]). Ведь в разностном приближении нелокальному потенциалу соответствует матрица взаимодействия, что в свою очередь, отвечает конечно-разностному уравнению высшего порядка.

Можно установить некоторую связь разностных уравнений высшего порядка с обыкновенным дифференциальным уравнением Шредингера с нелокальным потенциалом. В разностном приближении член с взаимодействием $\int V(x, x') \Psi(x') dx'$ заменяется на сумму $\sum_n V_{nn'} \Psi_n$, которую можно рассматривать как разностный оператор. Так что понимание особенностей решений разностных уравнений высших порядков может служить мостиком к пониманию и некоторых свойств нелокального взаимодействия.

Как уже отмечалось в [9], при использовании разложений волновых функций $\Psi(x, \xi)$ по полному набору состояний $\Phi_\alpha(\xi)$:

$$\Psi(x, \xi) = \sum_\alpha F_\alpha(x) \Phi_\alpha(\xi) \quad (9)$$

получаем систему связанных уравнений для "канальных" функций $F_\alpha(x)$, где α можно рассматривать, как дискретную переменную, движение по которой определяется разностным оператором с коэффициентами $V_{\alpha\alpha'}(x)$ - матрицей взаимодействия, нелокальной по α (распространение волн по решетке каналов).

Квантовая физика становится все более многоканальной (при решении многомерных и многочастичных задач [2,10]), все чаще используются эффективные нелокальные силы. Решаемые задачи все более усложняются. Приходится передавать их решение ЭВМ, как в черный ящик, откуда извлекаются ответы без ясного представления о происходящем в квантовых системах. Необходим параллельный процесс накопления квантовой интуиции, касающейся, в частности, движений волн, определяемых дифференциальными и разностными операторами высших порядков. В данной работе мы продолжим рассмотрение "квантовых картинок", делающих прозрачнее закономерности прохождения волн через барьеры в коэффициентах уравнений "Шредингера" высшего порядка.

Поскольку результаты о прямых и особенно обратных задачах для дифференциальных уравнений высших порядков недостаточно известны среди физиков, мы приведем здесь некоторые из них.

Подробно обратную задачу для уравнений n -го порядка рассмотрел Э. Л. Лейбензон [11]. Он вводил $n - 1$ однородных краевых условий ($k - 1$ на одном конце интервала интегрирования и $n - k$ - на другом; $k = 1, 2, \dots, n - 1$) и соответствующие сопряженные задачи на собственные значения. В отличие от уравнений второго порядка, где искомым потенциалом V получался из произвольного известного V_0 , здесь приходится специально позаботиться о выборе известной опорной системы. Дается нетривиальное обобщение понятия спектральной меры (исходные для обратной задачи "данные рассеяния" и спектральные данные). Повидимому, в общем случае $n > 2$ не существует вольтерровских преобразований (треугольных операторов обобщенного сдвига $V_0 \rightarrow V$) и Лейбензон предлагает новую процедуру восстановления искомого оператора по спектральным данным.

В работе [8] сформулирована обратная задача для уравнения:

$$\Psi^{(4)} + (A \Psi^{(1)})^{(1)} + B \Psi = \lambda \Psi \quad (10)$$

с однородными краевыми условиями на концах интервала $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(1) &= \Psi(1) = 0, \\ \Psi^{(2)}(0) + a \Psi^{(1)}(0) - b \Psi(0) &= 0, \\ \Psi^{(3)}(0) + [b + A(0)] \Psi^{(1)}(0) + c \Psi(0) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Вводятся две нормировочные константы для нормированных на единицу собственных функций Ψ , отвечающих собственным значениям λ_n :

$$\gamma_n = \Psi(0, \lambda_n) \text{ и } \xi_n = \Psi^{(1)}(0, \lambda_n) \quad (12)$$

вместо одной приведенной ширины для уравнения Шредингера второго порядка. Решение обратной задачи состоит в том, что по набору $(\lambda_n, \gamma_n, \xi_n)$ нужно восстановить функции A и B и

постоянные a, b, c .

Оказывается, можно записать уравнение Гельфанда-Левитана:

$$K(x, y) + Q(x, y) + \int_0^x K(x, z) Q(z, y) dz = 0, \quad (13)$$

где ядро Q определяется через "свободные" решения Ψ_0 , отвечающие нулевым A, B, a, b, c и соответствующим собственным числам λ_n^* :

$$Q(x, y) = \sum_{n=1}^{\alpha} \{ \Psi_0(x, \lambda_n^*) \Psi_0(y, \lambda_n^*) - \Psi_0(x, \lambda_n) \Psi_0(y, \lambda_n) \}. \quad (14)$$

В Q явно не входят нормировочные константы γ_n, ξ_n , как это имеет место в обычном формализме Гельфанда-Левитана, повидимому из-за разницы в выборе граничных условий "свободной" и возмущенной задач, а коэффициент при второй производной выражается как потенциал обычного уравнения Шредингера:

$$A(x) = -4 \frac{d}{dx} K(x, x) \quad (15)$$

для B получается более сложная связь с K , и только для определения констант " b, c " требуются γ_n и ξ_n .

Очевидно, что в случае совпадения спектральных данных возмущенной и "свободной" задач для уровней выше некоторого конечного $n = N$, в выражении для Q остается конечное число $2N$ членов и с таким вырожденным ядром интегральное уравнение сводится к точно решаемой системе алгебраических уравнений - как для потенциалов баргмановского типа (см. [2]).

В работе [6] рассматривается обратная задача для симметричной $(2p + 1)$ -диагональной матрицы, отвечающей разностному уравнению ("Шредингера") $2p$ -го порядка. Для восстановления матрицы требуется $(p + 1)$ -спектров, отвечающих разным однородным краевым условиям, либо один спектр и p последних компонент собственных векторов (играющих роль нормировочных констант) что напоминает многоканальное обобщение теоремы "о двух спектрах" [7]. Приближенное решение соответствующей обратной задачи см. в [5]. Условия существования операторов преобразования треугольного вида (обобщенного сдвига: $\frac{d^2}{dx^2} + \lambda \rightarrow \frac{d^2}{dx^2} - q(x) - \lambda$) см. [12, 15].

МОДЕЛИ

Элементарные представления для обычного одномерного уравнения Шредингера о прохождении волн через прямоугольные потенциальные барьеры и ямы, а также о связанных состояниях в последних присутствуют при решении практически всех квантовых задач (любой потенциал можно приблизить кусочно-постоянной функцией), так и исследование особенностей движения управляемого операторами более высоких порядков естественно начинать с подобных моделей с простейшими формами зависимости коэффициентов при производных разного порядка, а не только потенциалов - коэффициентов при волновой функции, как в обычном уравнении Шредингера.

Когда написаны дифференциальные или разностные уравнения и заданы соответствующие граничные условия, можно составить программу для ЭВМ и переложить на нее заботы о численных результатах. Но желательно иметь качественную картину, ожидаемых результатов. Поэтому лучше дополнить наши представления наглядными моделями. В работе [3] мы рассматривали модель "сवेशивающегося сверху" (из верхней запретной зоны) барьера для разностного уравнения Шредингера второго порядка, - здесь мы обсудим специфику подобного явления для уравнения 4-го порядка.

Рассмотрим сначала структуру зон в случае постоянных коэффициентов в уравнениях. Разрешенным зонам отвечают действительные волновые числа k . Для дифференциального уравнения (5) одна из границ (общая для всех k) разрешенной зоны задается нулем (точкой изменения знака) подкоренного выражения в "у", в формуле (6):

$$d^2/4c \geq (E - e) \quad (16)$$

Другая граница для k_1 при знаке "-" в числителе "у" в (8) определяются нулем этого числителя (пусть $d < 0, c < 0$):

$$E > e \quad (17)$$

Для разностного уравнения 4-го порядка (5) при $c = d = e = 1$ получаем общую нижнюю границу для двух "зон проводимости" $E = -1.25$; и разные верхние границы: $E = 1$ для

k_1 и $E = 5$ для k_2 . Эти зоны показаны на рис. 1.

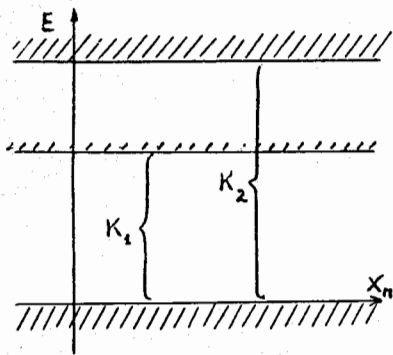


Рис 1. Разрешенные зоны для случая уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и двух волновых чисел k_1 и k_2

Верхняя граница более узкой зоны проводимости для k_1 отвечает разным знакам членов в числителе правой части (8), а для k_2 — одинаковым. Важно также, что на верхних границах своих разрешенных зон одно из волновых чисел достигает значения π/Δ , а другое обращается в нуль (то есть одно из решений имеет там максимальную частоту, а другое — минимальную). На нижней границе k_1 и k_2 сравниваются, а под ней становятся разными, но комплексными. Две ветви колебаний с k_1 и k_2 можно рассматривать как продолжение одной другой в разрешенной зоне. Некоторая аналогия здесь имеется с акустической и оптической ветвями колебаний решетки, составленной из частиц двух сортов, соединенных пружинами (на что мне указал В. Приезжев, см. книгу Д. Займана [18] и [19]).

Если внести возмущение на конечном интервале изменения аргумента в постоянный коэффициент при Ψ (на главной диагонали матрицы коэффициентов системы (3)) в виде "потенциальной" ямы, то под ее воздействием возможны переходы друг в друга волн с разными k . На Рис. 2 показано искажение границ зон под действием возмущения — возникновение выступов-барьеров, свешивающихся в разрешенные зоны из верхних запрещенных (сравни со случаем уравнений 2-го порядка [3]).

В зоне проводимости, отвечающей волновому числу k_2 , верхняя граница выше и свешивающийся барьер не достигает выбранной энергии E и потому преодолевается без туннелирования. Если волна $\exp(ik_1x)$ падает слева, то резкий край барьера

способствует трансформации волн и усилению проницаемости. Если же волна $\exp(-ik_1x_n)$ падает справа, то правый пологий склон барьера слабо возмущает решение и волна вынуждена туннелировать через барьер (сравни двухканальное туннелирование [2]).

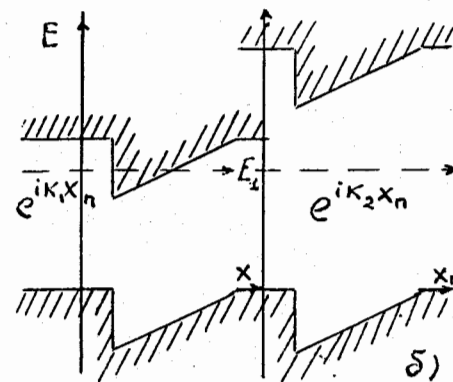
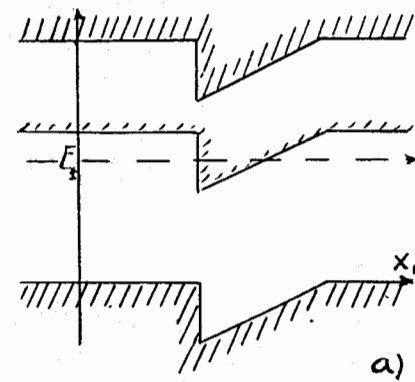


Рис. 2. Деформация зон (условное изображение) проводимости при введении асимметричной "потенциальной" ямы в коэффициент при Ψ_n в уравнении Шредингера-4. При энергии E_1 движению волны в состоянии с k_1 препятствует барьер, сквозь который нужно туннелировать, (свисающий из верхней запретной зоны), а в состоянии с k_2 туннелирование не требуется. На рис. б) зоны для волн с k_1 и k_2 изображены отдельно. Для волн с k_1 барьер легче проницаем слева, а с k_2 — справа.

Рассмотрим теперь возмущение (типа прямоугольной ямы или барьера) в коэффициенте d при $\Psi_{n\pm 1}$, то есть на боковой диагонали, соседней с центральной в матрице коэффициентов, отвечающей алгебраическим уравнениям (3). Замечательно, что эффект от замены любого коэффициента на конечном отрезке другой константой сводится к изменению границ зон. На рис. 3. изображено изменение зоны проводимости в случае, когда $s = e = 1$, а коэффициент d выбран кусочно-постоянным

($d = 0; 0.5; 1; 1.5; 2; 4$)

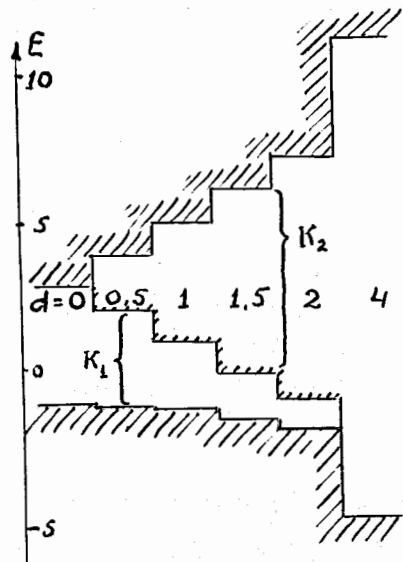


Рис. 3. Деформация зон при ступенчатом изменении коэффициента d в разностном операторе Шредингера четвертого порядка (3).

При $d = 4$ остается только одна зона. При изменении знака d картина симметрично продолжается влево. При $d = 0$ обе зоны для k_1 и k_2 совпадают. Если на конечном участке $s = d = e = 1$, а вне его $d = 0$; $s = e = 1$, то получается картина, изображенная на рис. 4.

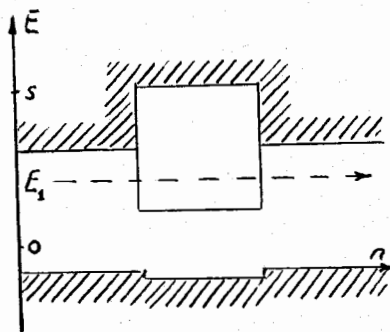


Рис. 4. Структура зон, усиливающая проницаемость барьера волной с k_1 , благодаря тому, что в области барьера трансформация в волну с k_2 позволяет избежать туннелирования.

Влияние величины коэффициента "с" при $\psi_{n\pm 2}$ в разностном операторе Шредингера четвертого порядка (3) на зоны показано на рис. 5. ($d = e = 1$). При $s = 1/4$ остается только одна зона. Значение $s = 0$ является сингулярной точкой (общая граница зон опускается при $s = +0$ в $-\infty$, а при $s = -0$ поднимается в $+\infty$). При отрицательных "с" порядок границ зон переворачивается: общая граница зон оказывается не снизу, а сверху.

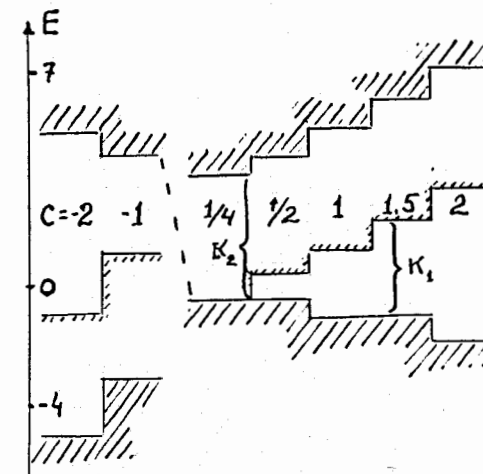


Рис. 5. Деформация зон при ступенчатом изменении "с" - коэффициента при $\psi_{n\pm 2}$ в (3). При положительных "с" нижняя граница общая для зон. При отрицательных "с" более узкая зона проводимости расположена сверху (верхняя граница общая для двух зон).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Когда эта работа была уже закончена и о ее результатах было доложено на конференции по обратным задачам (Монпелье, декабрь 1990), школе физиков (Киев, 1990), на семинарах в ЛТФ ОИЯИ и ФИАН (1990), я обратился к В.И. Юкалову, следуя правилу: обсудить то, что выяснил, с возможно большим числом физиков, которые могут иметь хоть какое-нибудь отношение к данному предмету. И действительно, я был вознагражден совершенно неожиданным сообщением о его результате, подтверждающем в одном частном, но практически интересном случае предсказанный здесь эффект усиления проницаемости барьеров за счет перехода от волн одного типа к волнам другого типа (с разными волновыми числами k_1 и k_2 , что возникает при повышении порядка уравнения движения). Не лишнее ли это указание на полезность таких больших лабораторий как ЛТФ: у нас столько разнообразных специалистов - всегда можно получить ценную консультацию практически по любому вопросу).

В.И. Юкаловым [14] рассматривались уравнения 4-го порядка для описания распространения максвелловских и спиновых волн в металле. В пустоте распространяются электромагнитные волны (уравнения второго порядка), но падая на парамагнитную пленку, они быстро затухают внутри металла (запретная зона), возбуждая в то же время спиновые волны

(которые, наоборот, возможны только в среде, где оба типа волн описываются уравнением 4-го порядка), затухающие значительно слабее и способные на другой стороне пленки преобразоваться снова в электромагнитную волну

Автор благодарен И. В. Амирханову, терпеливому собеседнику по поводу каждой ступеньки моего понимания квантовой теории, Р. Егикяну, В. А. Загребнову, Л. Г. Заставенко, М. М. Маламуду, Е. Б. Плеханову, В. Б. Приезжеву за полезную информацию.

Я позволю себе здесь еще небольшое "лирическое отступление". Недавно один специалист по квантовой теории поля высказал в беседе со мной мнение, что в теории ядра уже решены все принципиальные проблемы и поэтому во всем мире ядерщики уходят в другие области исследований. На самом деле в задаче многих тел, к которой сводится в значительной степени ядерная физика еще океан нерешенных проблем по сравнению с каплей уже решенных (включая сюда и результаты нобелевского ранга). Пожалуй, можно было бы согласиться с тем, что ситуация в ядерной физике низких энергий критическая. Но, мне представляется, что нормальное развитие науки проходит через этапы накопления отдельных фактов, методов и т. п., а когда достигается "критическая масса" информации, то происходит естественный качественный скачок — обобщение накопленного материала. Я не согласен с оценками А. М. Балдина о соотношении значимости работ по сбору первичной информации и обобщающих работ (пропорция ценности здесь вовсе не пропорциональна отношению объема охватываемых фактов, достигающего величины в много порядков). Повидимому принцип экономии мышления приводит нас часто к ошибочной переоценке таких обобщений (фетишизму гениальности), снижая активность основной массы исследователей.

Широкое поле деятельности здесь и для математической физики. Одно из высоких ее назначений заключается в "переводе" многочисленных результатов математики на язык физики (насыщении их физическим содержанием), придании им максимально доступной формы. При этом могут открываться интересные факты, о которых не подозревали ни математики, ни

физики. А похвальные слова такой деятельности пусть привлекут к ней новых энтузиастов, которые найдут здесь и глубокое моральное удовлетворение, и благодарных ценителей.

ПРИЛОЖЕНИЕ: функции Бесселя $J_\alpha(z)$ с целым индексом α как волновые функции связанных состояний на решетке α в поле линейного потенциала $V(\alpha) = \alpha/z$.

В работе [3] 1991г. был отмечен неожиданный факт, что, если в качестве координаты рассматривать не $z \equiv kg$, а дискретный индекс α (номер узла решетки), то J_α описывают волну, заключенную между склоном линейного потенциала $V(\alpha) = \alpha/z$ и невидимой границей верхней запрещенной зоны (наклонные штриховые линии на рис. 6), но рисунки этих связанных состояний приведены не были. Здесь они даны:

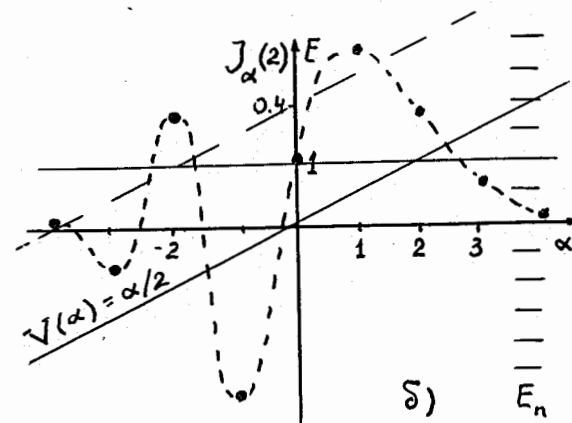
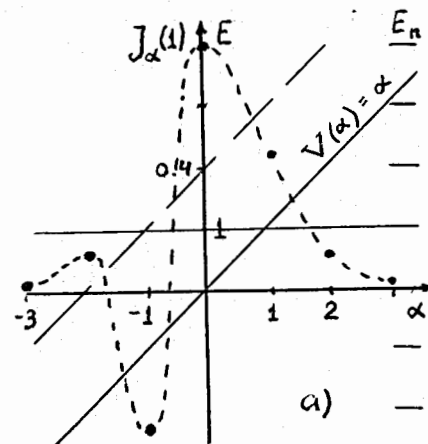
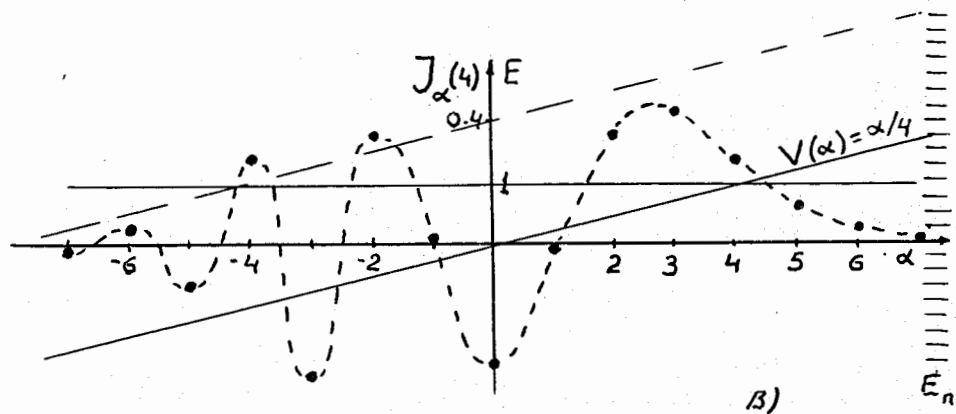


Рис. 6. Волновые функции связанных состояний на склоне линейных потенциальных гор (а, б, в): $V(\alpha) = \alpha; \alpha/2; \alpha/4$ с дискретной переменной α — это функции Бесселя J_α от целого индекса. Значения функций условно соединены пунктирной кривой. Здесь параметр z играет уже не роль координаты, а регулирует крутизну потенциального склона. Чем полнее наклон, тем гуще эквидистантный спектр связанных состояний E_n .

Функции всех этих состояний для данного $V(\alpha)$ имеют одинаковую форму, только со сдвинутым на целое число аргументом. При нецелом α , но с целым шагом решетки, функции Бесселя — нефизические состояния, растущие по модулю влево.



ЛИТЕРАТУРА

1. Захарьев Б.Н., Костов Н.А., Плеханов Е.Б. Точно решаемые одно- и многоканальные модели (уроки квантовой интуиции), ЭЧАЯ, 21, с. 914-962, 1990.
2. Захарьев Б.Н., Сузько А.А. Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. Энергоатомиздат, М. 1985. Переработанное и дополненное английское издание: Springer-Verlag, Heidelberg, 1990.
3. Захарьев Б.Н. Уравнение Шредингера на решетках и в периодическом поле (для пешеходов). Препринт ОИЯИ Р-4-90-46, Дубна 1990; Необычные решения уравнения Шредингера. Сообщ. ОИЯИ, Р4-91-98, Дубна, 1991.
4. Diver D. A., Laing E. W. On Conservation Laws in Fourth-Order Potential Barriers, J. Phys. A23, 1699-1701, 1990.
5. Gladwell G. M. L., Willms N. B. A Discrete Gelfand-Levitan Method for Band-Matrix Inverse Eigenvalue Problems. Inv. Probl. 5, 165-179, 1989.
6. Boley D. G. Golub G. H. A Survey of Matrix Inverse Eigenvalue Problems. Inv. Probl. 3, 595-622, 1987.
7. Захарьев Б.Н. Связь приведенных ширин с R-матричными резонансами (многоканальное обобщение "Теоремы о двух спектрах"). Кратк. Сообщ. ОИЯИ 6, 41-47, 1990.
8. McLaughlin J. R. Analytical Methods for Recovering Coefficients in Differential Equations from Spectral Data. SIAM Rev. 28, N1, 53-72, 1986.

9. Zakhariiev B. N., Zastavenko L. G. Motion Along the Axis of a Discrete Channel Variable α . Phys. Rev. A39, 5528-5530, 1989.
10. Жигунов В. П., Захарьев Б. Н. Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния. Атомиздат. М. 1974.
11. Лейбензон Э. Л. Обратная задача спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков Труды Моск. мат. общ. 15, с. 70-144. 1966. Спектральные разложения отображений систем краевых задач. ТММО 25, с. 15-58. 1971.
12. Маламуд М. М. К вопросу об операторах преобразования для обыкновенных дифференциальных уравнений. ТММО 53, с. 68. 1990
13. Barcilon V. Sufficient Conditions for the Solution of the Inverse Problem for a Vibrating Beam. Inverse Probl. 3, N2, p. 181, 1987.
14. Юкалов В. И. Проникновение электромагнитного поля через металл Изв. ВУЗ, радиофиз. 18, N7, с. 1039-1044, 1975; см. также ФТТ 15, N2, с. 417, 1973; ФММ 36, N4, с. 686, 1973.
15. Сахнович Л. А. Обратная задача для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с аналитическими коэффициентами. Мат. Сб. 46, N1, с. 61, 1958; 55, N3, с. 347, 1961; 56, N2, с. 137, 1962; УМН 16, N5, с. 199, 1961.
16. Зубарев А. Л. Вариационный принцип Швингера в квантовой механике. М. Энергоатомиздат. 1981.
17. Арбузов Б. А., Боос Э. Э., Саврин В. И., Шичанин С. А. Релятивистский кулоновский квазипотенциал и новые узкие резонансы в системе заряженных частиц. ТМФ 83, 175, 1990.
18. Займан Дж. Принципы теории твердого тела. с. 50, М. Мир. 1966
19. Л. Бриллюэн, М. Пароди. Распространение волн в периодических структурах. с. 90, М. ИЛ. 1959.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 марта 1991 года.

Захарьев Б.Н.

P4-91-127

"Уравнения Шредингера" высшего (> 2 -го) порядка

Обзор работ, полезных для понимания "уравнений Шредингера высших порядков". Мостик к освоению нелокальных потенциалов. Разные типы барьеров (в коэффициентах при производных разных порядков). Взаимная трансформация волн с разными волновыми числами и разными способностями туннелировать при одной энергии. Нарушение симметрии проницаемости барьеров. Похвальное слово математической физике. Приложение: функции Бесселя J_α как связанные состояния на решетке α в однородном поле (на склоне линейной потенциальной горы).

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1991

Перевод автора

Zakhariev B.N.

P4-91-127

"Schroedinger equations" of Higher (> 2) Order

Review of papers useful for understanding the "Schroedinger equations of higher order". A bridge to mastering the nonlocal potentials. Different types of barriers: in coefficients at the derivatives of different order. Transformations of waves with one wave number into the waves with another wave number for fixed energy. Intensified tunnelling and violation of its symmertry. Crisis of nuclear physics? Appendix: Bessel functions J_α as bound states on the lattice α at the slope of the linear potential.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1991