

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



С 341а
Б - 23

13/x - 75

P4 - 9054

Е.Банг, Ф.А.Гареев, И.В.Пузынин, Р.М.Ямалеев

3932/2-75

ОДНОЧАСТИЧНЫЕ
КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ
СФЕРИЧЕСКИХ И ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР

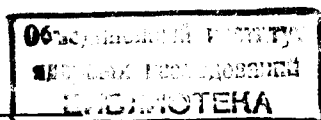
1975

3922/2-75

P4 - 9054

Е.Банг*, Ф.А.Гареев, И.В.Пузынин, Р.М.Ямалеев

ОДНОЧАСТИЧНЫЕ
КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ
СФЕРИЧЕСКИХ И ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР



* Институт Нильса Бора, Копенгаген, Дания.

ВВЕДЕНИЕ

Понятие резонансов (квазистационарных состояний) широко применяется в ядерной физике (см. /1,2,3/ и литературу в них). Известно, что существует множество определений резонансов, физическое содержание и математический формализм которых довольно сильно отличаются друг от друга. Однако в рамках уравнения Шредингера с самосогласованным потенциалом можно выделить область подбарьерных энергий, где различные определения резонансных состояний приблизительно эквивалентны. Сечение рассеяния в этом случае имеет острые резонансные пики при энергиях налетающих частиц, близких к одночастичным уровням энергий квазистационарных состояний, а ширины этих пиков непосредственно связаны с временем задержки частиц в области действия потенциала.

Энергии и ширины одночастичных резонансных состояний можно вычислить как комплексные собственные значения уравнения Шредингера при определенных комплексных граничных условиях (см., например, /4/). В настоящей работе развивается метод нахождения энергий и волновых функций квазистационарных состояний как собственных решений уравнения Шредингера с ядерными потенциалами в об-

ласти вещественных энергий. Для далекодействующих потенциалов эта задача была рассмотрена в /12/. Ширины квазистационарных состояний в предложенном подходе определяются интегральной формулой, близкой к известной формуле Фешбаха /5/, впервые полученной С.Г.Кадменским с сотрудниками в работах /6,7/. Как будет показано ниже, эта формула идентична интегральной формуле Брейта /1/, причем выбор формулы для определения ширины зависит от нормировки радиальной части волновой функции квазистационарного состояния.

I. Резонансы при рассеянии в центрально-симметричном поле. Одноканальная задача рассеяния.

Асимптотическое поведение радиальной волновой функции

$u_l(r)$ уравнения Шредингера

$$u_l''(r) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - V(r) \right] u_l(r) = 0, \quad (1)$$

где $V(r)$ - короткодействующий ядерный потенциал, при больших r имеет вид

$$u_l(r) = \alpha_l(k) [\cos \delta_l j_l(kr) - \sin \delta_l n_l(kr)]. \quad (2)$$

Для квадрата волновой функции на границе потенциала из соотношения (2) можно записать следующую формулу

$$u_l^2(r) = \frac{k^2 \alpha_l^2(k)}{\left[\frac{u_l'}{u_l} - \frac{n_l'}{n_l} \right]^2 n_l^2 + \left[j_l \frac{u_l'}{u_l} - j_l' \right]^2}. \quad (3)$$

Парциальное сечение рассеяния для данного орбитального момента количества движения l равно

$$\sigma_l = (2l+1) \frac{\Lambda^2}{\pi} \sin^2 \delta_l, \quad (4)$$

где Λ - длина волны. Величина σ_l / Λ^2 имеет максимальное значение при $\sin^2 \delta_l = 1$. Это условие выполняется, если

$$\frac{u_l'}{u_l} = \frac{n_l'}{n_l}, \quad * \quad (5)$$

что дает

$$\left[j_l \frac{u_l'}{u_l} - j_l' \right]^2 = \frac{k^2}{n_l^2}; \quad (6)$$

тогда из (3) имеем

$$u_l^2(r) = \alpha_l^2(k) n_l^2(kr). \quad (7)$$

При условии $|n_l| \gg |j_l|$ резонанс, определенный в указанном выше смысле, дает на границе потенциала большое значение величины $u_l^2(r) = \alpha_l^2(k) |\cos \delta_l j_l(kr) - \sin \delta_l n_l(kr)|^2$.

Из соотношения (2) также можно записать выражение для тангенса фазы рассеяния

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{j_l(kr) u_l' - j_l'(kr) u_l}{n_l u_l' - n_l' u_l}. \quad (8)$$

Согласно (5), при резонансе

$$\operatorname{tg} \delta_l = \infty. \quad (9)$$

Соотношение (9) является другим условием резонанса.

Изложенное выше определение резонанса является общепринятым в области вещественных энергий /1/. В рамках изложенного подхода существует два способа определения ширины резонансного уровня.

* Заметим, что граничные условия (5) применены в работе /8/ для определения квазистационарных решений радиального уравнения Шредингера.

1) Определение ширины Γ через интеграл от квадрата волновой функции в области действия потенциала. Данный подход рассмотрен, например, в работе /12/.

В этом случае волновая функция нормирована на единичную амплитуду вне области действия потенциала, т.е.

$$\alpha_l^2(k) = 1.$$

Далее, потребуем выполнения условия

$$|u_l/n_l|^2 = 1/2. \quad (10)$$

Тогда необходимо, чтобы

$$\left| \frac{u_l'}{u_l} - \frac{n_l'}{n_l} \right|^2 n_l^4 = |k|^2. \quad (11)$$

В предположении, что изменение левой части с энергией можно аппроксимировать линейной функцией, условие выполнения соотношения (10) запишется в виде

$$\Delta E \left| \frac{\partial}{\partial E} \left[n_l^2 \left(\frac{u_l'}{u_l} - \frac{n_l'}{n_l} \right) \right] \right| = 1,$$

где ΔE - абсолютная величина разности между энергией, при которой $|u_l/n_l|^2 = 1/2$, и резонансной энергией.

Согласно /1/, величина $\Gamma \equiv |2\Delta E|$ соответствует ширине резонанса и определяется следующей формулой:

$$\Gamma = \hbar v / \int_0^R |u_l|^2 dr. \quad (12)$$

В этом случае время задержки τ связано простым соотношением с величиной Γ

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}.$$

2). Определение ширины Γ через квадрат амплитуды $\alpha_l^2(k)$.

Тогда интеграл от квадрата волновой функции в области действия потенциала нормирован на единицу.

В настоящей работе мы будем рассматривать резонансные ширины в рамках второго определения.

Рассмотрим два способа вывода формулы, выражающей ширину через квадрат амплитуды $\alpha_l^2(k)$.

I. Метод вещественных энергий. Разложим волновую функцию

$$\psi_l(r) \quad \text{с асимптотическим поведением} \\ \psi_l(r) \rightarrow j_l(kr) - tg \delta_l n_l(kr) \quad (13)$$

в области действия потенциала по полному набору функций связанных состояний $\varphi_n^c(r)$ и непрерывного спектра $\varphi_k(r)$

$$\psi_l(r) = j_l(kr) + \sum_{n=1}^{N_c} a_n^c \varphi_n^c(r) + \int_0^\infty a(k) \varphi_k(r) dk,$$

где N_c - число связанных одночастичных состояний в потенциале $V(r)$. Предположим, что в непрерывном спектре имеется N_c^r подбарьерных квазистационарных состояний, определенных так, что волновые функции φ_n^r этих состояний удовлетворяют уравнению Шредингера (I) с граничными условиями (5). Тогда вблизи резонанса имеет место следующее разложение

$$\psi_l(r) = j_l(kr) + \sum_{n=1}^{N_c^r} a_n^r \varphi_n^r(r), \quad (14)$$

где $\varphi_n^r(r)$ - резонансные волновые функции, нормированные так, что

$$\int_0^R |\varphi_n^r(r)|^2 dr = 1. \quad (14a)$$

(0,R) соответствует области действия потенциала $V(r)$.

Подставив разложение (14) в уравнение Шредингера (I), умножив слева на $\varphi_n^r(r)$, проинтегрировав от нуля до R и воспользовавшись условием ортонормированности функции $\varphi_n^r(r)$, находим

$$a_n = b_n / (k^2 - k_n^2), \quad (15)$$

где k_n - волновой вектор, соответствующий резонансному состоянию, а

$$b_n = \int_0^{\infty} j_l(kr) V(r) \varphi_n(r) dr. \quad (16)$$

Тогда можно написать следующее выражение

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} V(r) j_l^2(kr) dr + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2/k}{k^2 - k_n^2}. \quad (17)$$

Парциальное сечение рассеяния дается формулой

$$\sigma_l(k) = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) |\eta_l|^2, \quad (18)$$

где амплитуда η_l связана с тангенсом фазы следующим соотношением:

$$\eta_l = \frac{1}{g_l - i}, \quad g_l = [\operatorname{tg} \delta_l]^{-1}. \quad (19)$$

Подставим $\operatorname{tg} \delta_l$ из (17) в (18), пользуясь соотношением (19), для сечения рассеяния в приближении одиночного уровня, находим

$$\sigma_l(k) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{[\frac{\hbar^2}{mk} b_n^2]^2/4}{(E - E_n)^2 + [\frac{\hbar^2}{mk} b_n^2]^2/4}. \quad (20)$$

При энергии $E = E_n \pm \Gamma/2$, где $\Gamma = \frac{\hbar^2}{mk} b_n^2$, (21)

сечение $\sigma_l(k)$ падает до половины максимального значения, достигаемого при точном резонансе $E = E_n$. Поэтому величина Γ имеет смысл ширины резонансного уровня. Из формулы (20) также следует, что в нашем приближении сечение приобретает вид сечения Брейта-Вигнера и соответствует пренебрежению потенциальной частью рассеяния.

2. Метод комплексных энергий. Предположим, что расстояния между квазистационарными уровнями велики по сравнению с шириной уровней и что энергия в резонансной точке равна $E_n - \frac{i}{2}\Gamma$, E_r и Γ - вещественны и $\Gamma > 0$. Тогда

$$|\exp[-i(E_r - \frac{i}{2}\Gamma)t/\hbar]|^2 = \exp(-\Gamma t/\hbar)$$

и, следовательно, вероятность распада в единицу времени равна $\omega = \Gamma/\hbar$.

Следуя работе [9], запишем радиальную часть волновой функции в асимптотическом виде

$$u_l(r) \rightarrow A_l(E) e^{-ikr} - A_l^*(E) e^{ikr}, \quad (22)$$

где $A_l(E)$ - комплексная функция от комплексной энергии E и, согласно (2), на вещественной оси имеет вид

$$A_l(E) = \alpha_l(k) \exp(-i\delta_l + \frac{l\pi}{2}). \quad (23)$$

При $E = E_r - \frac{i}{2}\Gamma$ имеет место равенство

$$A_l(E_r - \frac{i}{2}\Gamma) = 0. \quad (24)$$

Тогда, разлагая $A_l(E)$ в ряд в окрестности $E_r - \frac{i}{2}\Gamma$, ограничиваясь первым членом, получаем

$$A_l(E) = [E - (E_r - \frac{i}{2}\Gamma)] \alpha_l. \quad (25)$$

Подставив (25) в (22), имеем

$$u_l(r) = i\Gamma \alpha_l^* e^{ikr}, \quad \text{при } E = E_r - \frac{i}{2}\Gamma.$$

Согласно уравнению непрерывности, полный ток вероятности $\frac{\hbar k}{m} |i\Gamma \alpha_l^*|^2$ равен вероятности распада в единицу времени Γ/\hbar , т.е.

$$|A_l(E)|^2 = \frac{m}{\hbar^2 k} \Gamma. \quad (26)$$

В приближении малых ширин имеет смысл аппроксимировать формулу (26) в область вещественных энергий. Тогда справедливо следующее выражение для ширины Γ :

$$\Gamma = \frac{\hbar^2 k}{m} \alpha_l^2(k), \quad (27)$$

$$\alpha_l(k) = -\frac{1}{k} \int_0^{\infty} j_l(kr) V(r) u_l(r) dr.$$

формула типа (27) (или, что то же самое, (17)) впервые была получена Фешбахом /5/, а затем в работах /10/, /11/ обобщена для α -распада в приближении малой проницаемости потенциального барьера.

Приближения, допущенные при выводе формул (27) и (17), имеют одинаковую природу и соответствуют случаю, когда максимум сечения упругого рассеяния имеет вид (20) в пределах ширины квазистационарного состояния.

П. Резонансы при рассеянии в нецентральной поле. Многоканальная задача рассеяния

В настоящей работе изложенные выше определения квазистационарных состояний в рамках одноканального рассеяния для сферического потенциала мы распространили на случай многоканального рассеяния в нецентральной поле.

Для определенности рассмотрим уравнение Шредингера

$$(T + V(\vec{r}) + V_{s.o.}(\vec{r}) - E_{\Omega, \pi}) \psi_{\Omega, \pi}^- = 0 \quad (28)$$

с деформированным потенциалом Саксона-Вудса

$$V(r - R(\theta)) = V_0 \{1 + \exp[(r - R(\theta))/\alpha]\}^{-1} \quad (29)$$

$V_{s.o.}(r)$ - потенциал спин-орбитального взаимодействия.

Разложим $\psi_{\Omega, \pi}^- (\vec{r})$ по полному набору спин-угловых функций $y_{\ell j}^{\Omega}(\theta, \phi)$

$$\psi_{\Omega, \pi}^- (\vec{r}) = \frac{1}{r} \sum_{\ell j} R_{\ell j}^{\Omega}(r) y_{\ell j}^{\Omega}(\theta, \phi). \quad (30)$$

Тогда функции $R_{\ell j}^{\Omega}(r)$ будут удовлетворять бесконечной системе связанных дифференциальных уравнений вида:

$$(T + V(r - R) - E_{\Omega, \pi}) R_{\ell j}^{\Omega}(r) = \sum_{\ell' j'} \langle y_{\ell j}^{\Omega} | V(r - R) - V(r - R(\theta)) | y_{\ell' j'}^{\Omega} \rangle R_{\ell' j'}^{\Omega}(r). \quad (31)$$

Примем следующие обозначения:

$$T \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}, \quad (32)$$

$$k^2 \equiv \frac{2m}{\hbar^2} E_{\Omega, \pi}, \quad (\ell, j) \equiv i,$$

$$K_{ii}(\tau) = V(r - R) - \langle y_{\ell j}^{\Omega} | V(r - R) - V(r - R(\theta)) | y_{\ell j}^{\Omega} \rangle,$$

$$K_{ii'}(\tau) = -\langle y_{\ell j}^{\Omega} | V(r - R) - V(r - R(\theta)) | y_{\ell' j'}^{\Omega} \rangle, \quad (i \neq i')$$

$$R_{\ell j}^{\Omega}(\tau) \equiv u_i(\tau).$$

В указанных обозначениях система (31) приобретает вид:

$$u_i''(\tau) + k^2 u_i(\tau) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u_i(\tau) = \sum_{i'} K_{ii'}(\tau) u_{i'}(\tau). \quad (33)$$

Решение уравнения (33) можно представить в интегральном виде

$$u_i(\tau) = j_{\ell}(k\tau) - \frac{1}{k} \int_0^{\tau} [j_{\ell}(k\tau') n_{\ell}'(k\tau') - j_{\ell}'(k\tau') n_{\ell}(k\tau')] \sum_{i'} K_{ii'}(\tau') u_{i'}(\tau') d\tau'. \quad (34)$$

Интегральное представление (34) позволяет определить асимптотический вид функций $u_i(\tau)$:

$$u_i(\tau) = \alpha_i(k) [\cos \delta_i(k) j_{\ell}(k\tau) - \sin \delta_i(k) n_{\ell}(k\tau)], \quad (35)$$

где

$$\alpha_i \cos \delta_i = 1 - \frac{1}{k} \int_0^{\infty} n_{\ell}(k\tau') \sum_{i'} K_{ii'}(\tau') u_{i'}(\tau') d\tau', \quad (36)$$

$$\alpha_i \sin \delta_i = -\frac{1}{k} \int_0^{\infty} j_{\ell}(k\tau') \sum_{i'} K_{ii'}(\tau') u_{i'}(\tau') d\tau'.$$

Соотношения (35-36) показывают, что в случае многоканального рассеяния, так же как и в одноканальном случае, имеет смысл вводить собственные фазы и амплитуды рассеяния для каждого канала. Очевидно, подобное представление справедливо только для короткодействующих потенциалов. В предложенном подходе для многоканального рассеяния легко записать определение квазистационарных состояний, вводя условие квазистационарности для каждого канала. Тогда условие (5) приобретает вид

$$\frac{u_i'}{u_i} = \frac{n_e'}{n_e}, \quad (i=1, 2, \dots, \mathcal{N}). \quad (37)$$

Далее, определим полную ширину резонансного уровня следующим образом:

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i, \quad (38)$$

где Γ_i представляют собственные (парциальные) ширины для каждого канала и определяются формулой, аналогичной (27):

$$\Gamma_i = \frac{\hbar^2 k}{m} \alpha_i^2(k),$$

$$\alpha_i^2 = \frac{1}{k^2} \left| \int_0^\infty j_l(kr) \sum_{i'} \mathcal{K}_{ii'}(r) u_{i'}(r) dr \right|^2. \quad (39)$$

III. Задача определения квазистационарных состояний как задача на собственное значение

Условие квазистационарности, записанное в форме (5) или (37), позволяет задачу определения квазистационарных состояний рассматривать как задачу на собственное значение. Благодаря короткодействующему характеру потенциала (29) (см. рис. I), в конкретных расчетах имеется возможность задачу в полубесконечном интервале $[0, \infty)$ аппроксимировать на конечный интервал $[0, R_m]$. В этом случае граничные условия для уравнения (I) в интервале $[0, R_m]$ принимают вид

$$u_l(0) = 0,$$

$$n_l(kr) \frac{d}{dr} u_l(r) - u_l(r) \frac{d}{dr} n_l(kr) \Big|_{r=R_m} = 0. \quad (40)$$

Сведение задачи на конечный интервал с граничными условиями (40) приводит к конкретной постановке задачи на собственное зна-

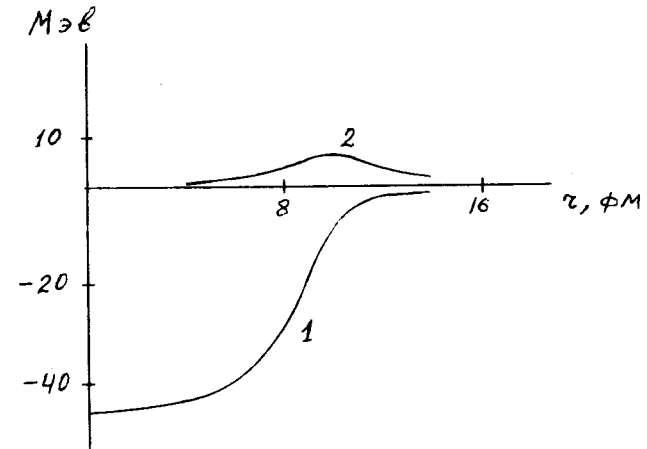


Рис. I. Зависимость матричных элементов $\mathcal{K}_{ii'}(r)$ от r для ядра ^{239}U . Параметры потенциала взяты из [17]. Кривые: 1 - значение $\mathcal{K}_{ii}(r)$ (потенциал Саксона-Вудса), где $i \equiv (\ell=0, j=0.5)$, 2 - значение $\mathcal{K}_{ii'}(r) = \mathcal{K}_{i'i}(r)$, где $i \equiv (\ell=0, j=0.5)$, $i' \equiv (\ell=2, j=1.5)$.

чение. В плане вычислительной схемы проблемы определения квази-стационарных и связанных состояний становятся эквивалентными. Это обстоятельство позволяет применить методы, развитые для определения связанных уровней энергий и их волновых функций к решению задачи на резонансные состояния. В работах /13/ на основе непрерывного аналога метода Ньютона были развиты методы и алгоритмы решения системы дифференциальных уравнений на собственные значения с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_i(0) &= 0, \\ u_i'(r) + F(k)u_i(r) \Big|_{r=R_m} &= 0, \end{aligned} \quad (40a)$$

соответствующими связанным состояниям. В настоящей работе та же вычислительная схема была использована для решения уравнения (I) или (33) с граничными условиями (40), соответствующими квазистационарным состояниям.

Условие нормировки волновой функции в этом случае можно записать так же, как и для связанных состояний

$$\sum_i \int_0^{R_m} u_i^2(r) dr = 1. \quad (41)$$

Волновую функцию резонансного состояния, как функцию непрерывного спектра, можно нормировать на дельта-функцию от волнового вектора \vec{k} или от энергии E . Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(k) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{на } \delta(k-k'), \\ \frac{2m}{\pi \hbar^2 k} & \text{на } \delta(E-E'), \end{cases}$$

где (42)

$$\alpha_i^2(k) = \frac{1}{k^2} \left| \int_0^\infty j_e(kr) \sum_{i'} \mathcal{K}_{i'i}(r) u_{i'}(r) dr \right|^2.$$

При такой нормировке волновой функции определение ширины (39) несправедливо. В этом случае ширина определяется через интеграл от квадрата волновой функции в области действия потенциала (см., например, формулу (I2)).

Таким образом, условие нормировки и формула для определения ширины резонанса взаимосвязаны, поскольку формула (39) справедлива при условии (41) и, наоборот, формула (I2) имеет место при условии (42).

Численные результаты

I. Сферические ядра. При исследовании одночастичных резонансов в сферических ядрах необходимо решать уравнение Шредингера (I) со сферическим потенциалом Саксона-Вудса

$$V(r) = V_0 \left\{ 1 + \exp[(r-R_0)/a] \right\}^{-1} + V_{s.o.}(r) \quad (43)$$

и с граничными условиями (40).

Как было показано выше, для численной реализации метода необходимо аппроксимировать задачу на конечный интервал $[0, R_m]$. Тогда возникает проблема сходимости результатов в зависимости от выбора интервала интегрирования $[0, R_m]$. На рис. 2 показана зависимость уровней энергии и волновых функций при изменении R_m в области, когда потенциал (43) начинает экспоненциально убывать. Ясно, что сходимость результатов обусловлена тем, что в указанной области решение уравнения (I) определяется нерегулярной функцией Риккати-Бесселя $n_e(kr)$. Сходимость результатов при достаточно больших R оправдывает аппроксимацию полубесконечной области конечным интервалом интегрирования для данного потенциала (43).

В работе /14/ квазистационарные состояния для сферических ядер не находились методом факторизации волновой функции непрерывно-

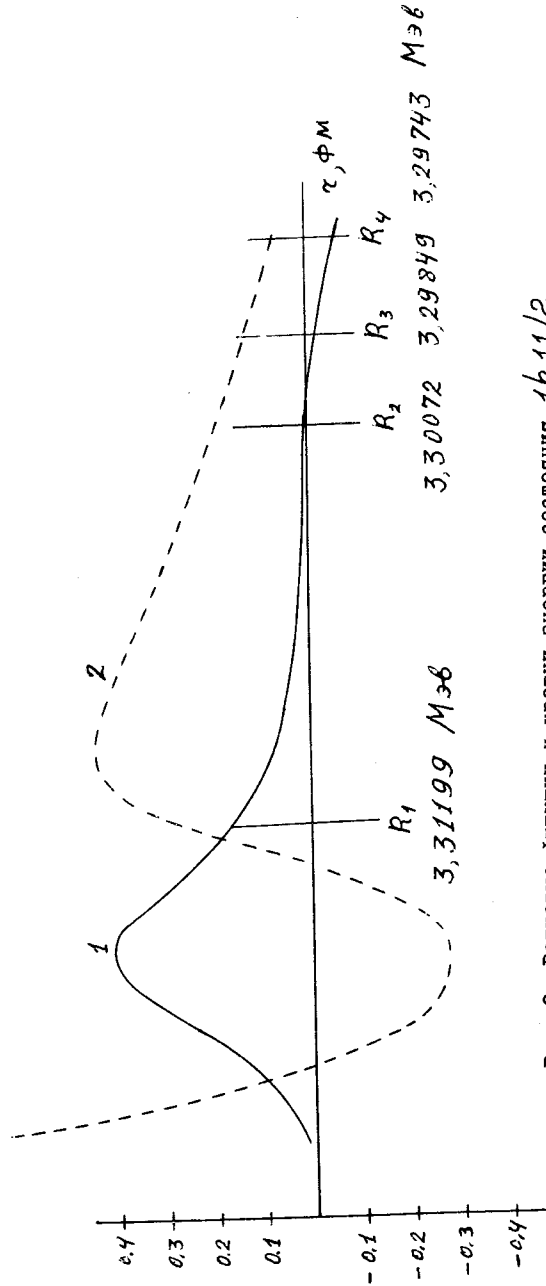


рис. 2. Волновые функции и уровни энергии состояния $1h_{11}/2$ ядра $A = 60, Z = 28$ в зависимости от выбора интервала интегрирования, где $R_1 = 8$ ф.м., $R_2 = 16$ ф.м., $R_3 = 18$ ф.м., $R_4 = 20$ ф.м. Кривые: 1 - волновая функция состояния $1h_{11}/2$ 2 - потенциальный барьер (произвольные единицы). Параметры потенциала взяты из работы /14/.

го спектра в области резонансной энергии

$$\varphi_{lj}^E(r) = A_{lj}(E) \frac{\chi_{lj}(r)}{r} \Phi_{ljm}(\theta, \varphi).$$

В этом случае задача определения квазистационарных состояний сводится к нахождению максимумов функции $A_{lj}(E)$ при решении уравнения Шредингера (I) для различных значений E в некоторой подбарьерной области.

На рис.3 приведены волновые функции резонансных состояний для ядра с $A=208, Z = 82$ из работы /14/ и рассчитанные настоящим методом. Видно, что волновые функции совпадают с точностью до нормировки. Это связано с тем, что в настоящей работе волновые функции нормированы по формуле (41), в то время как в работе /14/ нормировка производилась по формуле (42).

В таблице I приведены энергии и ширины резонансов для ядер с $A=208, Z = 82$ и $A = 60, Z = 28$. Хорошее согласие результатов по значениям энергий и волновым функциям указывает на правомерность выбора граничного условия в виде (40), которое выделяет из непрерывного спектра решения, соответствующие квазистационарным состояниям в подбарьерной области.

Однако результаты вычислений ширины распада Γ несколько различаются, хотя в целом имеет место хорошее согласие. Существенное различие для некоторых подбарьерных состояний обусловлено незначительной разницей в значениях энергий. Так, например, смещение энергий состояния $1j_{13/2}$ на $\sim 3\%$ ($E_{1j_{13/2}} = 3.44 \text{ МэВ} \rightarrow 3.55 \text{ МэВ}$), с помощью вариации параметра глубины потенциала V_0 , приводит к изменению ширины Γ на $\sim 20,5\%$ ($\Gamma = .99 \cdot 10^{-3} \text{ МэВ} \rightarrow 1.23 \cdot 10^{-3} \text{ МэВ}$). Этот результат показывает, насколько точно необходимо вычислить уровни энергий резонансных состояний, чтобы получить разумные значения ширины Γ . Использованный в настоящей работе метод решения

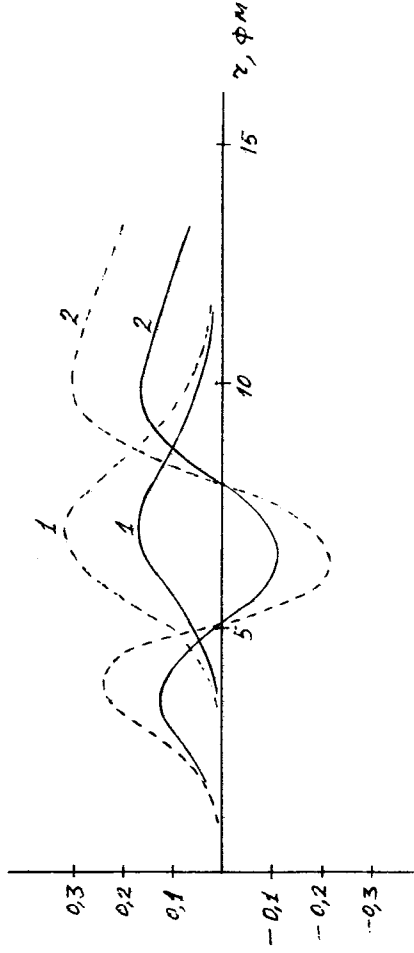


Рис. 3. Волновые функции ядра $A = 208, Z = 82$. Сплошная линия соответствует данным настоящей работы, пунктирная - работы /14/. Кривые: 1 - волновые функции состояния $IK17/2, 2 -$ состояния $3\phi/2$.

Таблица I.

Одночастичные уровни энергии и ширины нейтронных квазистационарных состояний

A	Z	Уровень (n, l, j)	E^I , мэВ	E^{II} , мэВ	Γ^I , мэВ	Γ^{II*} , мэВ	Γ^{III*} , мэВ
208	82	IK 15/2	11,82	11,9	0,35	0,45	1,2
208	82	2 i 13/2	7,12	7,1	1,17	2,35	0,99
208	82	2 h 9/2	4,54	4,6	0,62	1,14	1,14
208	82	1 j 13/2	3,44	3,55	$0,99 \cdot 10^{-3}$	$6,4 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$
208	82	IK 17/2	3,46	3,49	$0,14 \cdot 10^{-3}$	$0,19 \cdot 10^{-3}$	$0,14 \cdot 10^{-3}$
208	82	3 φ 7/2	2,04	1,92	1,02	2,41	0,59
208	82	2 h II/2	1,14	1,21	$2,02 \cdot 10^{-3}$	$3,7 \cdot 10^{-3}$	$1,95 \cdot 10^{-3}$
60	28	1 h II/2	3,30	3,32	$15,96 \cdot 10^{-3}$	$20,0 \cdot 10^{-3}$	$14,3 \cdot 10^{-3}$

Примечание: I - энергии и ширины, полученные в настоящей работе, II - энергии и ширины работы /15/, III - ширины работы /7/. Параметры среднего поля взяты из работы /15/.

уравнения (I) с граничными условиями (40) полностью удовлетворяют этим требованиям.

Величины Γ'''' в таблице I соответствуют данным из работы /6/, вычисленным по формуле (27). При этом в качестве волновых функций квазистационарных состояний использовались волновые функции стационарных состояний, вычисленные в рамках обобщенного квазиклассического метода /15/.

Далее, как показывают расчеты, уровни $1k 15/2, 3f 7/2, 2i 13/2$ находятся несколько выше потенциального барьера. В этом случае приближения, использованные при выводе формулы (27), не всегда выполняются и, как следовало ожидать, согласие с результатами работы /14/ несколько ухудшается. Из сравнения величин Γ', Γ'' и Γ'''' видно, что ширины Γ , вычисленные настоящим методом для указанных состояний, находятся между результатами работы /14/ и /16/.

Также интересно проследить зависимость ширины Γ от предела интегрирования R_m в формуле (41). Из таблицы 2 видно, что имеется слабая зависимость Γ от параметра R , однако, начиная с некоторого $R > R_{max}$ (в данном случае $R_{max} = 14 \phi m$), когда волновая функция имеет экспоненциальное поведение, $\Gamma(R)$ выходит на константу.

2. Деформированные ядра. Для нахождения квазистационарных состояний деформированного ядра необходимо решать систему дифференциальных уравнений (33) с граничными условиями (40), вообще говоря, бесконечного ранга. Поскольку в конкретных вычислениях мы ограничиваемся конечным числом уравнений, то необходимо каждый раз проверять сходимость по числу уравнений, или, что то же самое, разложения (30). В качестве меры сходимости можно рассматривать уменьшение величины N_{lj}^2 с увеличением l и j , где

Таблица 2.
Зависимость ширины Γ (мэВ) от предела интегрирования R_m . Состояния (n, l, j) и параметры среднего поля соответствуют табл. I

R_m (ф. м.)	II	I2	I3	I4	I5	I6
2 i 13/2	1.34	1.24	1.20	1.19	1.19	1.17
2 h 9/2	0.71	0.67	0.64	0.63	0.62	0.62
1 j 13/2	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$0.99 \cdot 10^{-3}$
1 k 17/2	$0.14 \cdot 10^{-3}$	$0.14 \cdot 10^{-3}$	$0.14 \cdot 10^{-3}$	$0.14 \cdot 10^{-3}$	$0.14 \cdot 10^{-3}$	$0.14 \cdot 10^{-3}$
3 f 7/2	1.31	1.15	1.08	1.04	1.02	1.02

Таблица 3
Величины N_{lj}^2 и парциальные ширины распада Γ_{lj} нейтронного квазистационарного состояния ядра ^{239}U .

Энергия (мэВ) l, j	6,983	
	N_{lj}^2	Γ_{lj} (мэВ)
0 1/2	0.2171	1.1442
2 3/2	0.5932	2.2491
2 5/2	0.0046	0.0224
4 7/2	0.0691	0.3934
4 9/2	0.0132	0.0721
6 II/2	0.0271	0.0079
6 I3/2	0.0023	0.0021
8 I5/2	0.0736	0.0032
8 I7/2	$0.096 \cdot 10^{-3}$	$0.4 \cdot 10^{-5}$

$$\tilde{N}_{lj}^2 = \int_0^{R_m} u_{lj}^2(r) dr. \quad (44)$$

При этом волновая функция нормирована согласно (4I), где $R_m = 2R_0$ ($R_0 = r_0 A^{1/3}$ - радиус ядра).

В таблице 3 приведены величины \tilde{N}_{lj}^2 для нейтронного квази-стационарного состояния ядра U^{239} с $E = 6.983$ (мэВ). Имеется хорошая сходимость по парциальным волнам (lj) (отношения \tilde{N}_{lj}^2 к максимальному $\tilde{N}_{lj=23/2}^2$ равно $1.6 \cdot 10^{-4}$), что оправдывает применимость разложения (30) для данной задачи. Сходимость разложения (30) для других состояний такая же или лучше, если для главной компоненты разложения имеет место неравенство $\tilde{N}_{lj}^2 \geq 0.6$.

В работах [16, 17] волновые функции глубоко подбарьерных квази-стационарных состояний деформированных ядер вычислялись с помощью разложения радиальной части волновой функции $R_{lj}(r)$ по базисным функциям $\varphi_{nlj}(r)$ сферически симметричного потенциала $V(r)$ с асимптотическим поведением

$$\varphi_{nlj}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} A_{nlj} \exp(-\alpha_{nlj} r), \quad (45)$$

$$R_{lj}(r) = \sum_n a_{nlj} \varphi_{nlj}(r). \quad (46)$$

Ясно, что разложение (46) справедливо только для глубоко подбарьерных состояний, когда асимптотика волновой функции квази-стационарного состояния имеет вид (45). Так же, как и было сделано в работе [13] для связанных состояний, имеет смысл сравнивать величины $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nlj}^2$, взятые из работы [17] и \tilde{N}_{lj}^2 , вычисленные по формуле (44). В таблице 4 приведены величины \tilde{N}_{lj}^2 и $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nlj}^2$ для нейтронных квазистационарных состояний $9/2^+$ [844], $13/2^+$ [817] и $13/2^+$ [806] ядра U^{239} . Из таблицы видно хорошее согласие между указанными величинами, в то время как (также и для связанных состояний), уровни энергии отличаются, примерно, на 2 (мэВ).

Таблица 4.
Сравнение величин \tilde{N}_{lj}^2 и $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nlj}^2$ нейтронных одночастичных квази-стационарных состояний ядра ^{239}U .

Энергия (мэВ)	$9/2^+$ [844]		$13/2^+$ [817]		$13/2^+$ [806]	
	E^I	E^{II}	E^I	E^{II}	E^I	E^{II}
lj		(мэВ)		(мэВ)		(мэВ)
4 9/2	12,172	10,477	7,320	6,547	14,308	12,337
	0,005	0,026		0,999	0,019	0,026
6 11/2	-0,084	0,366	0,997	0,003	0,997	0,997
	0,033	0,105		-0,003	0,95	0,3
6 13/2	0,993	0,923	0,997	0,003	$8,3 \cdot 10^{-7}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$
	0,068	0,035		-0,034	$3,9 \cdot 10^{-5}$	0,030
8 15/2				0,021	$7,2 \cdot 10^{-7}$	$7,1 \cdot 10^{-5}$
				0,018	-0,029	$4,1 \cdot 10^{-4}$
8 17/2						
10 19/2						

Примечание: I - энергии, полученные в работе [17], II - энергии и ширины, полученные в настоящей работе. Параметры среднего поля и деформации β_{20} и β_{40} взяты из работы [17].

Естественно, хорошее согласие волновых функций (или, что то же самое, в данном случае, величины $N_{e_j}^2$ и $\sum \alpha_{ne_j}^2$) обусловлено асимптотическим поведением волновой функции в подбарьерной области, когда граничные условия (40a) удовлетворительно аппроксимируют условие (40). На рис. 4 демонстрируются волновые функции квазистационарного состояния, полученные на основе граничных условий (40) и (40a), когда парциальные каналы являются подбарьерными. В этом случае волновые функции совпадают с хорошей точностью. Однако, как это следует из рис.5, если хотя бы один из парциальных каналов не имеет потенциального барьера (или энергия выше его), то граничные условия (40a) дают совершенно иной результат, чем условие квазистационарности (40). С другой стороны, при отсутствии барьера (например, для $\ell = 0$ компоненты) волновая функция, полученная при условии (40), теряет свой обычный вид квазистационарности (максимальность амплитуды в области действия потенциала). Однако в деформированных ядрах, в отличие от сферических, для парциальных каналов с $\ell = 0$ при малых энергиях существуют эффективные недиагональные барьеры (см. рис.1), так что в этом случае имеет место условие квазистационарности (40). На рис.6 приведены волновые функции с $\ell = 0$ для подбарьерного ($E = 0,05$ мэВ) и надбарьерного ($E = 6,9$ мэВ) случаев. Таким образом, квазистационарное поведение волновой функции в настоящем подходе в сильной степени зависит от присутствия потенциального барьера.

В работе /7/ на основе интегральной формулы (39) был проведен расчет ширины однонуклонных квазистационарных состояний деформированного ядра U^{239} . При этом волновые функции одночастичного квазистационарного состояния брались из работы /17/. В таблице 5 приводится сравнение парциальных ширин из работы /7/ с ширинами в настоящей работе. Имеется качественное согласие резуль-

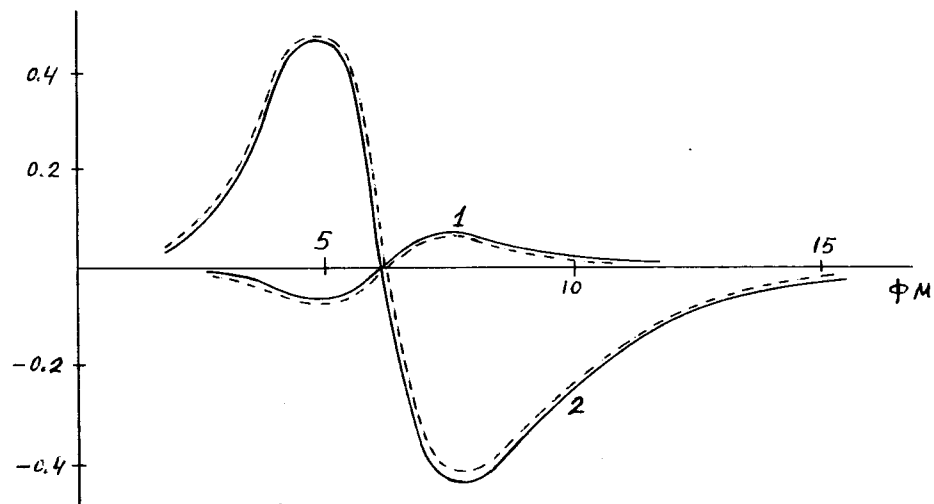


Рис. 4. Волновые функции ядра ^{239}U . Сплошная линия соответствует граничным условиям (40), пунктирная - (40a). Кривые: 1 - волновые функции при $\ell = 5, j = 4, 5$; 2 - при $\ell = 5, j = 5, 5$.

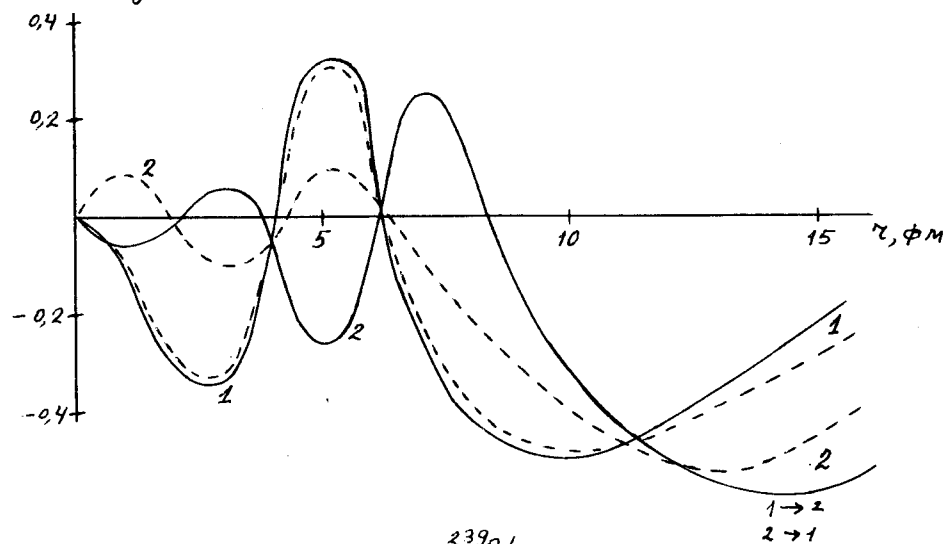


Рис. 5. Волновые функции ядра ^{239}U . Сплошная линия соответствует граничным условиям (40), пунктирная - (40a). Кривые: 1 - волновая функция при $\ell = 0, j = 0, 5$; 2 - при $\ell = 2, j = 1, 5$.

Таблица 5.

Парциальные ширины нейтронных одночастичных состояний ядер ^{239}U .

$9/2^- [725]n$			$9/2^+ [844]n$		
ℓj	$\Gamma_{\ell j}^I (\text{мэВ})$	$\Gamma_{\ell j}^{II} (\text{мэВ})$	ℓj	$\Gamma_{\ell j}^I (\text{мэВ})$	$\Gamma_{\ell j}^{II} (\text{мэВ})$
5 9/2	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$5,02 \cdot 10^{-6}$	4 9/2	$6,7 \cdot 10^{-7}$	$6,38 \cdot 10^{-8}$
5 11/2	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$7,85 \cdot 10^{-8}$	6 11/2	$1,3 \cdot 10^{-9}$	$3,78 \cdot 10^{-8}$
7 13/2	$2,7 \cdot 10^{-8}$	$1,32 \cdot 10^{-8}$	6 13/2	$8,6 \cdot 10^{-7}$	$1,52 \cdot 10^{-6}$
7 15/2	$4,8 \cdot 10^{-9}$	$3,06 \cdot 10^{-10}$	8 15/2	$3,9 \cdot 10^{-11}$	$8,23 \cdot 10^{-11}$
			8 17/2	$3,2 \cdot 10^{-9}$	$1,98 \cdot 10^{-9}$

Примечание: I - ширины работы /7/; II - ширины, полученные в настоящей работе.

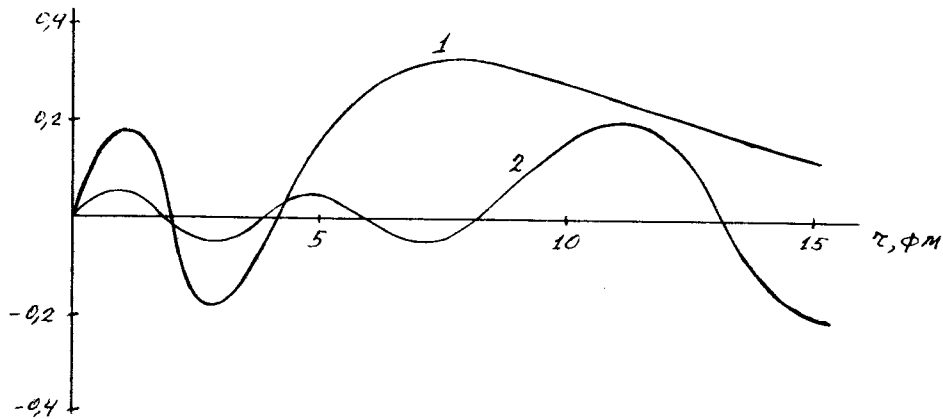


Рис. 6. Волновые функции состояния $\ell = 0, j = 0,5$ ядра
Кривые: I - волновая функция при энергии $E = 0,05$ мэВ,
II - при $E = 6,9$ мэВ.

татов, особенно для главных компонент разложения (30) (они подчеркнуты).

На основании проведенных расчетов и их сравнения с аналогичными вычислениями можно сделать вывод о том, что предложенный метод нахождения энергий и ширины распада подбарьерных квазистационарных состояний сферических ядер дает устойчивые результаты и, как отмечалось, удобен для реализации на ЭВМ. Это обстоятельство позволяет обобщить развитый метод для исследования квазистационарных состояний в деформированных ядрах, где общая ситуация как в методическом, так и вычислительном аспектах представляется более сложной. Однако количественного согласия результатов вычислений ширины с помощью данного подхода с аналогичными результатами работы /7/ получить не удалось. Ясно, что основная причина такого расхождения объясняется различием уровней энергий квазистационарных состояний, поскольку, как уже говорилось, в среднем такое различие ~ 2 мэВ. Тем не менее, можно сказать, что качественная корреляция наших расчетов с аналогичными вычислениями работы /7/ демонстрирует устойчивость интегральной формулы (39) по отношению к используемым функциям.

Итак, в данной работе развит новый метод вычисления энергий и ширины одночастичных квазистационарных состояний в непрерывном спектре для сферических и деформированных ядер. Для сферических ядер такая задача была решена в /14/ другим методом. Предложенный метод воспроизводит результаты этой работы. Для деформированных ядер существовал только приближенный метод нахождения квазистационарных состояний, точность которого явно недостаточна.

Представляется привлекательным применить данный метод для исследования протонной радиоактивности, α -распада и нейтронных силовых функций.

Авторы благодарны В.Г.СОЛОВЬЕВУ, С.Г.КАДМЕНСКОМУ, Л.И.ПОНОМАРЕВУ, В.И.ФУРМАНУ, С.П.ИВАНОВОЙ за полезные дискуссии, а также Т.П.ПУЗЫНИНОЙ и Л.Н.СОМОВУ за консультации, связанные с постановкой программ на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Брейт. Теория резонансных ядерных реакций. ИЛ, Москва, 1960.
 2. А.Лейн, Р.Томас. Теория ядерных реакций при низких энергиях. ИЛ, Москва, 1960.
 3. О.Бор, Б.Моттельсон. Структура атомного ядра. Изд-во "Мир", Москва, 1971.
 4. E.Vogt.Rev. Mod. Phys., 34, 723 (1962)
 5. H.Feschbach.Ann.Phys., 5, 357 (1958)
 6. С.Г.Кадменский, В.Е.Калечиц, А.А.Мартынов. ЯФ, 14, 1174 (1971).
 7. С.Г.Кадменский, В.Г.Хлебостроев. ЯФ, 18, 980 (1973).
 8. J.H.Peek. Physica, 64, 93 (1973)
 9. Т.Ю.Бу, Т.Омура. Квантовая теория рассеяния. Изд-во "Наука", Москва, 1969.
 10. С.Г.Кадменский, В.Е.Калечиц. ЯФ, 12, 70 (1970).
 11. С.Г.Кадменский, В.И.Фурман. Препринт ОИЯИ, Р4-8729, Дубна, 1975.
 12. Л.И.Пономарев, И.В.Пузынин, Т.П.Пузынина. Препринт ОИЯИ, Р4-8884, Дубна, 1975.
 13. L.I.Ponomarev, I.V. Puzynin, T.P.Puzynina.Comput.Phys. 13, 1 (1973)
- Ф.А.Гареев, И.В.Пузынин, Т.П.Пузынина, Р.М.Ямалеев. Препринт ОИЯИ, II-8081, Дубна, 1974.

14. С.А.Фаянс. Препринт ИАЭ-1593 (1968).
15. В.Е.Калечиц, Л.П.Рапопорт, И.С.Баткин.Изв. АН СССР, серия физ., 32, 878 (1968).
16. Ф.А.Гареев, С.П.Иванова, В.Г.Соловьев, С.И.Федотов. ЭЧАЯ, т.4, вып.2, 357 (1973).
17. F.A. Gareev, S.P.Ivanova, L.A.Ivanov, V.G.Soloviev Nucl.Phys. A171, 134 (1971).

рукопись поступила в издательский отдел
9 июля 1975 года.