

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



С 342 г 1
И - 265

29/IX - 75

P4 - 9007

В.К.Игнатович

3709/2 - 75

ВЛИЯНИЕ ЗЕРКАЛЬНОСТИ ОТРАЖЕНИЯ
НА ВРЕМЯ УДЕРЖАНИЯ
УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ
В ЗАМКНУТЫХ СОСУДАХ

1975

P4 - 9007

В.К.Игнатович

**ВЛИЯНИЕ ЗЕРКАЛЬНОСТИ ОТРАЖЕНИЯ
НА ВРЕМЯ УДЕРЖАНИЯ
УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ
В ЗАМКНУТЫХ СОСУДАХ**

**Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА**

Игнатович В.К.

P4 - 9007

Влияние зеркальности отражения на время удержания ультрахолодных нейтронов в замкнутых сосудах

Показано, что время удержания ультрахолодных нейтронов в сосудах выражается одинаковым образом через среднюю величину коэффициента поглощения во всех случаях, когда доля незеркального отражения значительно превосходит поглощение при однократном соударении со стенкой.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1975

Ignatovich V.K.

P4 - 9007

The Influence of the Specular Reflection on the Storage Time of Ultracold Neutrons in Closed Vessels

It is shown that the storage time of ultracold neutrons is expressed identically in terms of the mean value of the absorption coefficient in all the cases when the part of nonspecular reflection exceeds considerably the absorption at a single collision with the wall.

The investigation has been performed at the Neutron Physics Laboratory, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1975

В экспериментах по удержанию ультрахолодных нейтронов /УХН/ в ловушках /1/ объектом изучения является коэффициент поглощения при одном соударении со стенкой $\mu(\Omega)$, где $\Omega = (\theta, \phi)$ - углы в системе координат с полярной осью вдоль нормали к стенке. Коэффициент поглощения связывается с временем удержания t_0 при помощи соотношения:

$$N(t) = N(0) e^{-\frac{\bar{\mu}}{\bar{\rho}} vt} = N(0) e^{-t/t_0} \quad /1/$$

где $N(0)$ - число нейтронов в ловушке в момент $t = 0$, $N(t)$ - число УХН, оставшихся в ловушке по истечении времени t , $\bar{\rho}$ - средняя длина пробега между столкновениями со стенками:

$$\bar{\rho} = \frac{4V}{S} \quad /2/$$

V - объем ловушки, S - площадь поверхности стенок, $\bar{\mu}$ - коэффициент поглощения, усредненный по углам падения:

$$\bar{\mu} = \frac{1}{4\pi} \int \mu(\Omega) \cdot \cos\theta \cdot d\Omega \quad /3/$$

нейтроны предполагаются имеющими одну и ту же скорость v , распределены в ловушке однородно и изотропно и отражаются от стенок диффузно. Из соотношения /1/ вытекает, что

$$t_0 = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\mu} v} \quad /4/$$

Соотношение /1/ получается элементарно путем подсчета числа нейтронов, выбывающих из сосуда за время dt :

$$dN(t) = dt \cdot v \int dS \cos\theta \cdot \mu(\Omega) \cdot n(\Omega, \vec{r}, t) d\Omega, \quad /5/$$

где $n(\Omega, \vec{r}, t)$ - плотность УХН в момент t в единице объема и единице телесных углов. Предполагая распределение изотропным во все времена, получаем из /5/:

$$\frac{dN(t)}{dt} = v \cdot S \cdot \int \cos\theta \cdot \mu(\Omega) d\Omega \cdot \frac{N(t)}{4\pi V}, \quad /6/$$

откуда и следуют выражения /1/ и /4/. Требование диффузности отражения хотя и не фигурировало явно при выводе /6/, тем не менее неявно содержалось в предположении однородности и изотропности $n(\Omega, \vec{r}, t)$ при всех временах:

$$n(\Omega, \vec{r}, t) = \frac{N(t)}{4\pi V}. \quad /7/$$

Если бы отражение от стенок было чисто зеркальным, то первоначальная изотропия со временем бы нарушалась и вместо /1/ следовало бы

$$N(t) = \int N(\Omega, t) d\Omega = \int N(0) e^{-\frac{\mu(\Omega)}{\ell(\Omega)} vt} d\Omega, \quad /8/$$

где $\ell(\Omega)$ - длина пробега нейтрона с направлением полета Ω . В случае /8/ распад УХН в ловушках не является экспоненциальным, и извлечение поглощения в стенках из наблюдаемого при эксперименте времени удержания требует много анализа, нежели это делается обычно. В настоящей главе будет рассмотрен случай, промежуточный между чисто диффузным и чисто зеркальным отражением от стенки. Примем, что закон отражения имеет вид:

$$W(\Omega_0, \Omega) = (1 - G \cdot A(\Omega)) \delta(\Omega - \Omega_0) + c \cdot G A(\Omega_0) \cdot A(\Omega) \cdot \cos\theta \quad /9/$$

$$c \int A(\Omega) \cdot \cos\theta d\Omega = 1.$$

где $W(\Omega_0, \Omega)$ - вероятность нейтрону, падающему из направления Ω_0 , отразиться в направлении Ω , G - параметр зеркальности меньше единицы, $A(\Omega)$ - функция, убываю-

щая от единицы к нулю по мере увеличения угла θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$, c - постоянная, определяемая указанным нормировочным соотношением. Выражение /9/ удовлетворяет требованиям теоремы о детальном равновесии и отражает тот реально наблюдаемый факт, что с увеличением угла падения доля зеркального отражения возрастает. Ниже для большей конкретности будет принято, что

$$A(\Omega) = \cos\theta, \quad c = \frac{3}{2\pi}. \quad /10/$$

Закон отражения /9/ может привести к тому, что нейтроны, летящие по скользящим траекториям, будут долго удерживаться на этих траекториях, и потому время удержания окажется зависящим от формы удерживающего сосуда: в коротких сосудах оно будет даваться выражением /4/, а в длинных - другим выражением. Для исследования этого вопроса удобно рассмотреть два предельных случая: а/ сосуд представляет собой сферу единичного радиуса; б/ сосуд представляет из себя бесконечный цилиндр единичного радиуса.

§1. Формулировка метода

Представим себе, что сосуд заполнен воображаемыми прямолинейными лучевыми трубками, соединяющими различные участки поверхности. Поперечное сечение трубки, опирающейся на элемент поверхности dS и вытянутой в направлении Ω , равно $dS \cdot \cos\theta$. Поскольку длина трубки равна $\ell_s(\Omega)$ - длине пробега в направлении Ω , то объем трубки равен $\ell_s(\Omega) \cdot dS \cdot \cos\theta$. Будем характеризовать распределение нейтронов функцией $n_s(\Omega, t)$, которая представляет собой плотность нейтронов в луче $\ell_s(\Omega)$, исходящих из точки s на поверхности ловушки. Полное число нейтронов в ловушке равно

$$N(t) = \int dS \int \cos\theta d\Omega \cdot \ell_s(\Omega) \cdot n_s(\Omega, t). \quad /11/$$

При наличии поглощения в стенках ловушки число нейтронов в луче $l_s(\Omega)$, летящих от точки s , меняется со временем. За время dt число нейтронов изменится на величину:

$$\begin{aligned} d[l_s(\Omega) dS \cdot \cos\theta n_s(\Omega, t)] &= -n_s(\Omega, t) d\tilde{S} \cos\tilde{\theta} \cdot \nu dt + \\ &+ (1 - G \cdot A(\Omega))(1 - \mu(\Omega)) n_s(\Omega, t) dS \cdot \cos\theta \cdot \nu dt + \quad /12/ \\ &+ c \cdot G \cdot A(\Omega) \cdot \cos\theta \int A(\Omega_0)(1 - \mu(\Omega_0)) n_s(\Omega_0, t) \cdot dS \cdot \cos\theta_0 d\Omega_0 dt \cdot \nu. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части отвечает тем нейтронам, которые достигают противоположного конца трубки, и, ударившись об элемент поверхности $d\tilde{S}$ под углом $\tilde{\theta}$, полностью выбывают из нее; второе слагаемое учитывает те нейтроны, которые поступают в точку s по зеркальной трубке и отражаются зеркальным образом в рассматриваемую трубку; третье слагаемое отвечает тем нейтронам, которые поступают в рассматриваемую трубку из других трубок после незеркального отражения. Множитель $(1 - \mu(\Omega))$ представляет собой вероятность отразиться, не поглотившись. Плотность нейтронов в лучевых трубках, движущихся в направлении к точке s , равна, из соображений симметрии, плотности нейтронов, движущихся от s , и плотности нейтронов в зеркальной трубке. Обозначим

$$\tau = G \cdot \nu \cdot t, \quad \nu(\Omega) = \mu(\Omega)/G \quad /13/$$

и учтем, что $d\tilde{S} \cos\tilde{\theta} = dS \cdot \cos\theta$, тогда уравнение /12/ приведет к виду:

$$\begin{aligned} l_s(\Omega) \frac{dn_s(\Omega, \tau)}{d\tau} &= - [A(\Omega)(1 - \mu(\Omega)) + \nu(\Omega)] n_s(\Omega, \tau) + \\ &+ c A(\Omega) \int A(\Omega_0)(1 - \mu(\Omega_0)) \cos\theta_0 n_s(\Omega_0, \tau) d\Omega_0. \quad /14/ \end{aligned}$$

Уравнение /14/ удобно решать с помощью преобразования Лапласа:

$$\tilde{n}_s(\Omega, p) = \int_0^{\infty} n_s(\Omega, \tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad n_s(\Omega, \tau) = \int_{\epsilon - i\infty}^{\epsilon + i\infty} \tilde{n}_s(\Omega, p) e^{p\tau} \frac{dp}{2\pi i}. \quad /15/$$

Произведя это преобразование над обеими частями уравнения /14/, получим:

$$l_s(\Omega) [p \tilde{n}_s(\Omega, p) - n_s(\Omega, 0)] = -a(\Omega) \cdot \tilde{n}_s(\Omega, p) + A(\Omega) \cdot b_s(p), \quad /16/$$

где

$$\begin{aligned} a(\Omega) &= A(\Omega)(1 - \mu(\Omega)) + \nu(\Omega), \\ b_s(p) &= c \int A(\Omega)(1 - \mu(\Omega)) \cos\theta \tilde{n}_s(\Omega, p) d\Omega. \quad /17/ \end{aligned}$$

Из /16/ следует

$$\tilde{n}_s(\Omega, p) = \frac{n_s(\Omega, 0) + \frac{A(\Omega)}{l_s(\Omega)} b_s(p)}{p + z_s(\Omega)}, \quad /18/$$

где

$$z_s(\Omega) = \frac{a(\Omega)}{l_s(\Omega)}, \quad /19/$$

а для $b_s(p)$ нетрудно, используя определение /17/, получить уравнение:

$$b_s(p) = f_{1s}(p) + f_{2s}(p) \cdot b_s(p), \quad /20/$$

где

$$f_{1s}(p) = c \int A(\Omega)(1 - \mu(\Omega)) \cos\theta n_s(\Omega, 0) \frac{d\Omega}{p + z_s(\Omega)}, \quad /21/$$

$$f_{2s}(p) = c \int A(\Omega)(1 - \mu(\Omega)) \cos\theta \frac{A(\Omega)}{l_s(\Omega)} \frac{d\Omega}{p + z_s(\Omega)}. \quad /22/$$

Решая уравнение /20/, получаем:

$$b_s(p) = \frac{f_{1s}(p)}{1 - f_{2s}(p)} \quad /23/$$

Применяя обратное преобразование Лапласа и используя выражение /11/ для полного числа частиц, находим

$$N(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon - i\infty}^{\epsilon + i\infty} \tilde{N}(p) e^{p\tau} dp, \quad /24/$$

где

$$N(p) = \int dS \cdot N_s(p), \quad /25/$$

а $N_s(p)$, согласно /18/, равно:

$$N_s(p) = g_{1s}(p) + g_{2s}(p) b_s(p), \quad /26/$$

причем

$$g_{1s}(p) = \int \frac{n_s(\Omega, 0) \cdot \ell_s(\Omega) \cos\theta d\Omega}{p + z_s(\Omega)}, \quad /27/$$

$$g_{2s}(p) = \int \frac{A(\Omega)}{\ell_s(\Omega)} \frac{\ell_s(\Omega) \cdot \cos\theta d\Omega}{p + z_s(\Omega)}. \quad /28/$$

Подставив /23/ в /26/, получим:

$$N_s(p) = \frac{g_{1s}(p)(1 - f_{2s}(p)) + g_{2s}(p) f_{1s}(p)}{1 - f_{2s}(p)}. \quad /29/$$

Отметим, что все функции, входящие в правую часть /29/, представимы в виде:

$$f(p) = \int_{z_{1s}}^{z_{2s}} \frac{\tilde{f}(z)}{p + z} dz, \quad /30/$$

где

$$\tilde{f}(z) = \int \tilde{f}(\Omega) \cdot \delta(z - z_s(\Omega)) d\Omega, \quad /31/$$

$$z_{1s} = \min z_s(\Omega), \quad z_{2s} = \max z_s(\Omega).$$

Знаменатель правой части выражения /29/ может быть представлен иначе:

$$1 - f_{2s}(p) = c \cdot p \cdot g_{2s}(p) + f_{3s}(p), \quad /32/$$

где $\tilde{f}_{3s}(\Omega)$, соответствующая $f_{3s}(p)$, равна:

$$f_{3s}(\Omega) = c \frac{\nu(\Omega)}{\ell_s(\Omega)} A(\Omega) \cdot \cos\theta. \quad /33/$$

Выражение /32/ в некоторых случаях может обращаться в ноль, и тогда /29/ имеет полюс. Выясним, в каких случаях это возможно и интересно. Интегралы /30/ являются интегралами типа Коши и потому, вообще говоря, имеют точки ветвления, совпадающие с $-z_{1s}$ и $-z_{2s}$. Те же самые точки ветвления имеет и функция /29/. Обратное преобразование Лапласа с функцией /29/ представляет собой интеграл по контуру L в комплексной плоскости, который можно замкнуть левой бесконечной полуокружностью. Если правее точки ветвления $-z_{1s}$ нет никаких особенностей, то асимптотическое поведение интеграла при больших τ будет:

$$N_s(\tau) \sim e^{-z_{1s}\tau}. \quad /34/$$

Если z_{1s} велико, то асимптотическое поведение $N_s(\tau)$ не может быть вида /34/, т.к. убывание нейтронов в ловушке должно определяться коэффициентом поглощения, а z_{1s} от μ не зависит. Это значит, что при достаточно большом z_{1s} правее точки ветвления $-z_{1s}$ должен быть полюс, который отвечает нулю /32/. Поскольку этот полюс должен находиться близко к нулю, то его положение определяется приближенным значением:

$$p_{1s} = - \frac{f_{3s}(0)}{c \cdot g_{2s}(0)} \cdot 0. \quad /35/$$

При этом асимптотическое выражение для $N_s(\tau)$ при больших z_{1s} будет:

$$N_s(\tau) = \frac{1}{c} f_{1s}(0) e^{-p_{1s}\tau}. \quad /36/$$

При отсутствии поглощения $\mu = 0$, $p_{1s} = 0$ и из /19/ и /21/ следует:

$$N(\tau) = \int N_s(\tau) dS = N(0). \quad /37/$$

Проверим свойственные преобразованию Лапласа соотношения

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \tilde{N}(p) = N(0), \quad \lim_{p \rightarrow 0} pN(p) = N(\infty). \quad /38/$$

Первое проверяется достаточно легко. Из выражения /30/ вытекает, что

$$\frac{f(p)}{g(p)} \Big|_{p \rightarrow \infty} = \frac{1}{p} \int \frac{\tilde{f}(\Omega)}{\tilde{g}(\Omega)} d\Omega. \quad /39/$$

Поэтому

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \tilde{N}(p) = \int dS \int \tilde{g}_{1s}(\Omega) d\Omega. \quad /40/$$

Сравнение с /11/ показывает, что первое соотношение /38/ действительно выполняется. При $\mu = 0$ должно быть $N(\infty) = N(0)$. Соответствующие функции $g(p)$ и $f(p)$ при $p \rightarrow 0$, согласно /30/ и /31/, могут быть аппроксимированы выражениями:

$$\frac{f(0)}{g(0)} = \int \frac{\tilde{f}(\Omega)}{\tilde{g}(\Omega)} \frac{d\Omega}{z_s(\Omega)}. \quad /41/$$

причем

$$[1 - f_{2s}(p)] \Big|_{p \rightarrow 0} = c \cdot p \cdot g_{2s}(0). \quad /42/$$

Отсюда следует:

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{N}(p) = \int dS \frac{1}{c} f_{1s}(0) = N(0) = N(\infty). \quad /43/$$

Если же $\mu \neq 0$, то $1 - f_{2s}(0) = f_{3s}(0) > 0$ и $N(\infty) = 0$, как и следовало ожидать.

Рассмотрим теперь конкретные геометрии и будем полагать

$$A(\Omega) = \cos\theta, \quad c = 3/2\pi, \quad n(\Omega, 0) = n_0, \quad \mu(\Omega) = \mu \cdot \cos\theta. \quad /44/$$

§2. Удержание УХН в сфере единичного радиуса

В сфере $\ell(\Omega) = 2 \cdot \cos\theta$ и не зависит от s . Величина $z(\Omega)$ дается выражением

$$z(\Omega) = \frac{1}{2}(1 - \mu \cdot \cos\theta + \nu), \quad \nu = \mu/G. \quad /45/$$

Наиболее интересный случай соответствует $G \ll 1$, при этом $\nu \gg \mu$, и величиной $\mu \cdot \cos\theta$ в выражении /45/ можно пренебречь. В результате

$$z(\Omega) = \frac{1}{2}(1 + \nu) = a,$$

$$g_1(p) = \frac{4\pi n_0}{3} \frac{1}{p+a}, \quad g_2(p) = \frac{2\pi}{3} \frac{1}{p+a}, \quad f_1(p) = \frac{n_0}{p+a},$$

$$f_2(p) = \frac{1}{2} \frac{1}{p+a}, \quad f_3(p) = \frac{\nu}{2}. \quad /46/$$

и

$$\bar{N}(p) = \frac{(4\pi)}{3} \frac{n_0}{p + \frac{\nu}{2}}, \quad N(\tau) = N(0) e^{-\frac{\nu}{2}\tau} = N(0) e^{-\frac{\mu}{2}\nu\tau}. \quad /47/$$

Если прямо воспользоваться выражением /1/, то получится зависимость, тождественная с /47/, поскольку

$$\bar{\mu} = \frac{2}{3}\mu, \quad \bar{\nu} = \frac{1}{3}, \quad \bar{\mu}\bar{\nu} = \frac{1}{2}. \quad /48/$$

§3. Удержание УХН в бесконечном цилиндре единичного радиуса

В случае бесконечного цилиндра

$$f(\Omega) = \frac{2\cos\theta}{1 - \sin^2\theta \cdot \cos^2\phi}. \quad /49/$$

Говорить о полном числе частиц в ловушке бессмысленно, но можно говорить о числе частиц, отнесенных к единице поверхности. Величина $z(\Omega)$ равна

$$z(\Omega) = a(1 - \sin^2\theta \cdot \cos^2\phi), \quad /50/$$

где так же как и в /45/, пренебрежено $\mu \cos\theta$ по сравнению с ν , а параметр a равен по-прежнему $\frac{1}{2}(1 + \nu)$. Удобно переопределить переменные

$$z = az', \quad p = ap', \quad \tau = \tau'/a, \quad n_0 = \frac{1}{2\pi}. \quad /51/$$

после чего, опустив штрихи, получим:

$$\bar{N}(p) = \frac{g_1(p)(a - f_2(p)) + g_2(p) \cdot f_1(p)}{a - f_2(p)}. \quad /52/$$

Функции, входящие в /52/, все представимы в виде:

$$\chi(p) = \int_0^1 \frac{dz}{p + z} \bar{\chi}(z), \quad /53/$$

$$\bar{\chi}(z) = \int \bar{\chi}(\Omega) \delta(z - 1 + \sin^2\theta \cos^2\phi) d\Omega, \quad /54/$$

причем

$$\bar{f}_1(z) = cn_0 \xi(z), \quad \bar{f}_2(z) = \frac{cz}{2} \xi(z), \quad \bar{g}_1(z) = \frac{2n_0}{z} \xi(z), \quad \bar{g}_2(z) = \xi(z), \quad /55/$$

$$\xi(z) = \int \cos^2\theta \delta(z - 1 + \sin^2\theta \cos^2\phi) d\Omega = \frac{\pi}{2} \frac{z}{\sqrt{1-z}}. \quad /56/$$

Используя /55/ и /56/, можно получить следующие соотношения между функциями f и g :

$$f_1(p) = cn_0 g_2(p), \quad /57/$$

$$g_1(p)(a - f_2(p)) + f_1(p) \cdot g_2(p) = g_1(p) \left(\frac{\nu}{2} + \frac{cp}{2} g_2(p) \right) + cn_0 g_2^2(p). \quad /58/$$

$$p \cdot g_1(p) = 2n_0 \left(\int_0^1 \frac{\phi(z)}{z} dz - \int_0^1 \frac{\phi(z)}{p+z} dz \right) = 2n_0 (\pi - g_2(p)), \quad /59/$$

$$g_1(p) \cdot \frac{\nu}{2} + \frac{c}{2} \cdot g_2(p) = \int_0^1 \frac{(n_0 \nu + c/2)}{z(z+p)} \phi(z) dz = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} (\nu - \frac{3}{2}p) q(p), \quad /60/$$

$$q(p) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}(z+p)} = \frac{1}{\sqrt{1+p}} \ln \frac{1 + \sqrt{1+p}}{\sqrt{1+p} - 1}, \quad /61/$$

$$g_2(p) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{z dz}{(p+z)\sqrt{1-z}} = \pi - \frac{\pi p}{2} \cdot q(p), \quad /62/$$

$$a - f_2(p) = a - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}p - \frac{3}{8}p^2 q(p) = \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{3}{2}p - \frac{3}{4}p^2 \cdot q(p) \right). \quad /63/$$

В результате

$$\tilde{N}(p) = \frac{1}{2} \frac{3 + (\nu - \frac{3}{2}p) \cdot q(p)}{\nu + \frac{3}{2}p - \frac{3}{4}p^2 \cdot q(p)}. \quad /64/$$

Отметим, что функция $\tilde{N}(p)$ аналитична всюду, кроме разреза $(0, -1)$, поэтому $N(\tau)$, получаемое обратным преобразованием Лапласа выражения /64/, не сводится к простому виду /1/. Замыкая контур в /24/ бесконечной левой полуокружностью, получаем:

$$N(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-1} dp e^{+p\tau} (\tilde{N}_+(p) - \tilde{N}_-(p)) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 e^{-p\tau} 2\text{Im} N_-(-p) dp. /65/$$

где значками \pm отмечены значения на верхнем и нижнем берегах разреза. Учитывая, что

$$q(-p) = q'(-p) - iq''(-p), \quad q'(-p) = \frac{1}{\sqrt{1-p}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-p}}{1 - \sqrt{1-p}}, \quad /66/$$

$$q''(-p) = \frac{\pi}{\sqrt{1-p}}.$$

находим

$$2\text{Im} N_-(-p) = \frac{2\pi}{2\sqrt{1-p}} \frac{1^2}{(\nu - \frac{3}{2}p - \frac{3}{4}p^2 q'(-p)) + \frac{2\pi^2}{16} \frac{p^4}{1-p}}$$

При $\nu \ll 1$ выражение /67/ представляется в более простом виде

$$\frac{1}{2\pi} 2\text{Im} N_-(-p) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(p - \frac{2}{3}\nu)^2 + \Gamma^2}. \quad /68/$$

где

$$\Gamma = \frac{2\pi}{3} \nu^2. \quad /69/$$

Подстановка /69/ в /65/ показывает, что при $\nu \ll 1$ конечное выражение

$$N(\tau) \approx e^{-\frac{2}{3}\nu\tau'} = e^{-\frac{1}{3}\mu\nu\tau} \quad (\tau' = a \cdot \tau \approx \frac{1}{2}\tau), \quad /70/$$

совпадает с /1/, поскольку в случае бесконечного цилиндра

$$\mu \cdot \cos\theta = \frac{2}{3}\mu, \quad \bar{\ell} = 2. \quad /71/$$

Полученный результат можно было ожидать заранее, поскольку при $\nu \ll 1$ выражение /29/ имеет острый резонанс в точке, определенной выражением /35/, которая есть не что иное как $\mu/\bar{\ell}$. Это следует из выражений /19/, /28/ и /33/.

На практике соотношение $\nu \ll 1$ можно считать всегда выполняющимся, однако интересно посмотреть идеальный случай $G=0$, когда $N(t)$ дается выражением /8/. В случае сферы $\mu(\Omega)/\bar{\ell}(\Omega) \subset \frac{\mu}{2}$ и $N(t)$ оказывается совпадающим с /1/, т.е. даже чисто зеркальное отражение не меняет времени удержания УХН в малом сосуде; в случае же цилиндра

$$\frac{\mu(\Omega)}{\bar{\ell}(\Omega)} = \frac{\mu}{2} (1 - \sin^2\theta \cos^2\phi), \quad /72/$$

и в пределе $t \rightarrow \infty$ из выражения /8/ с учетом /11/ следует:

$$\begin{aligned} N(t) &= \int n_0 \frac{2\cos^2\theta d\Omega}{1 - \sin^2\theta \cos^2\phi} \exp\left(-\frac{t\mu\nu}{2} (1 - \sin^2\theta \cos^2\phi)\right), \\ &= 2n_0 \int \frac{z^2}{\rho^2} \frac{d^3r}{r} \delta(r^2 - 1) e^{-\frac{t\mu\nu}{2}\rho} \quad (\rho^2 = z^2 + x^2, r^2 = \rho^2 + y^2), \\ &= 2\pi n_0 \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{t\mu\nu}{2}\rho^2} \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} \frac{N(0)}{t\mu\nu}, \quad /73/ \end{aligned}$$

где в соответствии с /11/ было положено

$$n_0 \int \frac{2 \cos^2 \theta d\Omega}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi} = 2\pi n_0 = N(0), \quad /74/$$

Таким образом, в случае длинного сосуда зависимость $N(t)$ при зеркальном отражении от стенок не является экспоненциальной.

Автор приносит свою искреннюю благодарность В.И.Лущикову, Ю.Н.Покотиловскому и А.В.Стрелкову за интерес к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. Ф.Л.Шапиро. Сообщение ОИЯИ, РЗ-7135, Дубна, 1973.
2. Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, М., 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 июня 1975 года.