объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4-90-412

В.К.Игнатович

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В УПРУГИХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Направлено в "Акустический журнал"

1990

1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании распространения волн в слоистых средах обычно ищутся коэффициенты отражения и прохождения системы слоев и определяются условия возникновения внутри них локализованных (связанных) возбуждений. В случае обратных задач определяются свойства сред по заданным коэффициентам прохождения или отражения. Мы здесь будем касаться только прямых и только линейных задач, хотя используемый метод может оказаться полезным при решении и нелинейных, и обратных задач, по крайней мере там, где свойства сред отыскиваются методом подгонки.

Принципиальных трудностей в прямых задачах обычно не возникает. Если в однородном слое решение задачи известно, то решение задачи для нескольких слоев получается путем сшивки решений на границах раздела. Все трудности носят чисто технический характер, поскольку сшивка на границе раздела, например в случае акустики, может приводить к очень громоздким выражениям.

В данной работе обсуждается метод, в котором используется следующий прием: между слоями слоистой среды вводятся воображаемые бесконечно узкие щели, заполненные какой-нибудь воображаемой стандартной средой. В случае акустики это может быть среда с единичной плотностью и единичными скоростями поперечных и продольных волн. Далее рассчитываются матрицы амплитуд отражения и пропускания одного слоя, погруженного в стандартную среду. После чего расчет матриц отражения и пропускания системы слоев производится не путем сшивки граничных условий, а с помощью рекуррентных соотношений, в которых фигурируют матрицы амплитуд разделенных слоев.

Используемая процедура имеет прозрачный физический смысл. Введенные воображаемые щели, казалось бы, увеличивают число границ раздела и тем самым усложняют задачу. Однако поскольку в щелях находится одна и та же среда, то все граничные условия практически зависят только от свойств данного слоя. Происходит как бы развязка свойств соседних слоев. Причем поскольку воображаемые щели бесконечно узки и по ним могут распространяться волны всех типов, то волны с единичной вероятностью просачиваются (туннелируют) из одного слоя в другой. Таким образом, воображаемые щели на решение задачи не оказывают никакого физического влияния. Математически же они оказываются очень полезными.

Рассмотрим, например, отражение и пропускание системы из двух слоев. Обозначим амплитуды отражения и пропускания этих слоев, взятых по отдельности, через r_1, t_1 и r_2, t_2 соответственно. Тогда совместные амплитуды отражения и пропускания r_{12} и t_{12} этих двух слоев, прижатых друг к другу, равны

$$a)\ r_{12}=r_1+t_1r_2(1-r_1r_2)^{-1}t_1, \qquad b)\ t_{12}=t_2(1-r_1r_2)^{-1}t_1, \tag{1}$$

где множитель

$$f=(1-r_1r_2)^{-1} \tag{2}$$

описывает многократное переотражение между слоями в воображаемой щели. Эти формулы абсолютно физически прозрачны, встречаются во многих учебниках, и мы выводить их не будем.

Если бы щель была не бесконечно узкой, то вместо формул (1) для амплитуд отражения и пропускания двух слоев (на самом деле здесь мы имеем уже три слоя, поскольку промежуток между слоями также может рассматриваться как слой) следовало бы воспользоваться иными формулами:

$$a)\ r_{12}=r_1+t_1e_{12}r_2e_{21}(1-r_1e_{12}r_2e_{21})^{-1}t_1,$$

$$b)\ t_{12}=t_2e_{21}(1-r_1e_{12}r_2e_{21})^{-1}t_1, \tag{3}$$

где e_{12} и e_{21} - функции распространения от слоя 2 к слою 1 и обратно соответственно. В случае плоской геометрии функции распространения представляют собой плоские волны, а в случае сферической геометрии - сферические волны в промежуточном слое.

Формулы (1) и (3) описывают весь класс рассматриваемых здесь задач, связанных со слоистыми средами. И наша задача состоит только в том, чтобы получить амплитуды r и t для одного слоя. В акустике соотношения (1) и (3) встречаются, например, в монографии Бреховских/1/, но применяются они здесь только к волне, поляризованной перпендикулярно плоскости отражения, и при описании одного единственного слоя. В этом случае r и t в формулах (3) представляют собой скалярные величины. Мы покажем, что область применимости этих формул значительно шире.

Возможность введения воображаемых щелей и замена условий сшивки на границах раздела рекуррентными соотношениями является существеннейшим моментом. При этом амплитуды отражения и пропускания могут быть матрицами. В случае изотропных упругих сред это матрицы 2x2, а в случае неизотропных - 3x3. С матрицами такой размерности (причем они имеют стандартный вид) значительно проще работать, чем с матрицами 4x4 или 6x6, которые обычно рассматриваются для подобного рода задач[1,2].

В п. 2 мы покажем, как определять амплитуды отражения и пропускания границы раздела двух произвольных упругих сред. Эта задача хорошо известна, но нам понадобится получить ее решение для того, чтобы продемонстрировать, каким образом получаются матрицы более низкой размерности, чем те, которые обычно используются. В п. 3 демонстрируется естественный переход к случаю, когда одна из сред или обе оказываются жидкими. В п. 4 получено решение для одного слоя, погруженного в стандартную среду. В заключение (п.5) обсуждается применимость метода для одномерных и трехмерных периодических сред, а также для сферической геометрии.

2. ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Уравнение упругих волн в однородной и изотропной среде запишем в виде[3]:

$$d^2\mathbf{u}/dt^2=c_t^2\Delta\mathbf{u}+(c_l^2-c_t^2)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}, \tag{4}$$

где $\mathbf{u}$ - смещение, $c_{l,t}$ - продольная и поперечная скорости упругих волн. В однородной среде решение ищется в виде совокупности плоских волн

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0\exp(i\mathbf{kx}-i\omega\tau), \tag{5}$$

где $\mathbf{u}_0$ - вектор поляризации волны, $\mathbf{k}$ -волновой вектор, ω - частота ($\omega=c|\mathbf{k}|$), $\mathbf{x}$ - трехмерный радиус-вектор. Координаты и время обозначены через $\mathbf{x}$ и τ, поскольку обозначения r и t зарезервированы за амплитудами отражения и пропускания.

В неоднородной среде при наличии границы раздела решение представляется разными плоскими волнами по обе стороны от границы, связанными друг с другом граничными условиями. Граничные условия состоят в требовании непрерывности смещения $\mathbf{u}$ и поверхностного давления:

$$\sigma_{ik}n_k \equiv \rho c_t^2[(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{u}+\nabla(\mathbf{nu})]+\rho(c_l^2-2c_t^2)\mathbf{n}(\nabla\mathbf{u}), \qquad (6)$$

где ρ – плотность среды, а $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к границе раздела. Этим условиям, вообще говоря, можно удовлетворить, только взяв в качестве решения в однородной среде не одну, а связку трех плоских волн вида (5) с разными волновыми векторами $\mathbf{k}$, у которых одинакова компонента вдоль поверхности раздела $k_\parallel$. Эти волны имеют одинаковые частоты ω и взаимно перпендикулярные поляризации, которые мы обозначим единичными векторами $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}$. Состояния $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ соответствуют поперечной волне, т.е. волновой вектор этих волн $\mathbf{k}_t$ перпендикулярен $\mathbf{v}_i$ и длина его определяется соотношением $|\mathbf{k}_t|=\omega/c_t$. Вектор $\mathbf{v}_1$ будем считать перпендикулярным плоскости падения, а $\mathbf{v}_2$ – параллельным ей. Состояние $\mathbf{w}$ соответствует продольной волне с волновым вектором $|\mathbf{k}_l|=\omega/c_l$ и поляризацией $\mathbf{w}\parallel\mathbf{k}_l$.

Уравнение (4) удобно записать в виде:

$$(L+\omega^2)\mathbf{u}=0, \qquad L=\begin{pmatrix} c_t^2\Delta & 0 & 0 \\ 0 & c_t^2\Delta & 0 \\ 0 & 0 & c_l^2\Delta \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

и его решение представимо в виде столбца

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1\gamma\exp(i\mathbf{k}_t\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}_2\alpha\exp(i\mathbf{k}_t\mathbf{x}) \\ \mathbf{w}\,\beta\exp(i\mathbf{k}_l\mathbf{x}) \end{pmatrix}\exp(-i\omega\tau), \qquad (8)$$

где γ, α, β – характеризуют амплитуды соответствующих волн. Заметим, что такое представление удобно тем, что выделяет самые существенные величины, которые находятся из граничных условий. Вектора поляризации все единичные, их направление задается волновым вектором, который однозначно определяется свойствами среды и направлением падения первичной связки волн, и чтобы найти амплитуды отражения и пропускания, нужно найти только коэффициенты γ, α и β отраженных и прошедших волн при заданных соответствующих коэффициентах в падающей. Таким образом, вектор состояния связки волн в общем виде имеет максимальную размерность 3. При обычном подходе вектор связки волн разбивают по трем взаимно перпендикулярным направлениям и каждое направление составляют из комбинации волновых мод. При этом вектор состояния в общем виде оказывается имеющим размерность 6. Поскольку в случае изотропных сред мода с вектором поляризации $\mathbf{v}_1$ отделяется от других, то для нее задача становится скалярной, а две другие моды в обычном случае объединяются в четырехмерный вектор/1,2/. В данной работе они будут представляться двумерным вектором.

Найдем решение в случае, когда слева на границу раздела падает триплет волн (8). Полное решение задачи содержит аналогичный триплет волн, отраженных с амплитудами r и преломленных с амплитудами t. Условия непрерывности $\mathbf{u}$ и тензора напряжений показывают, что состояние $\mathbf{v}_1$ полностью независимо от двух других, т.е. для него, как хорошо известно, можно отдельно записать оба условия непрерывности в виде

$$1+r_\perp=t_\perp, \qquad \rho c_t^2 k_{t\perp}(1-r_\perp)=\rho' c_t'^2 k'_{t\perp} t_\perp, \tag{9}$$

где величины со штрихом относятся к отражающей среде, причем

$$k_{t\perp}=[\omega^2/c_t^2-k_\parallel^2]^{1/2}, \qquad k'_{t\perp}=[\omega^2/c_t'^2-k_\parallel^2]^{1/2}, \tag{10}$$

и значок $\perp$ при r и t указывает, что рассматривается случай волны, поляризованной перпендикулярно плоскости отражения.

Обозначим через Z_t отношение $\rho' c_t'^2/\rho c_t^2$, при этом решение граничных условий принимает хорошо известный/1/ вид

$$r_\perp=[k_{t\perp}-Z_t k'_{t\perp}]/[k_{t\perp}+Z_t k'_{t\perp}], \qquad t_\perp=2k_{t\perp}/[k_{t\perp}+Z_t k'_{t\perp}]. \tag{11}$$

В частности, $k'_{t\perp}$ может оказаться мнимым, тогда компонента $\mathbf{v}_1$ будет испытывать полное отражение, поскольку $|r_\perp|=1$.

Два других состояния необходимо объединить, поскольку граничные условия перемешивают их. В отличие от обычного подхода введем двумерный вектор

$$\psi=\begin{bmatrix}\alpha\exp(ik_t x)\\ \beta\exp(ik_l x)\end{bmatrix}, \qquad (12)$$

в котором α и β характеризуют амплитуды состояний с поляризацией v_2 и w. Введем вектор n' вдоль нормали, направленной внутрь второй среды, и вектор e в плоскости отражения, параллельный границе раздела. Вектора v_1, e и n составляют правую тройку. Вектора поляризации падающей, отраженной и преломленной волн однозначно связаны с векторами e, n и волновыми векторами следующими соотношениями:

a) $v_{20}=-(k_\parallel/k_t)n+(k_{t\perp}/k_t)e$, b) $v_{2r}=-(k_\parallel/k_t)n-(k_{t\perp}/k_t)e$,

c) $w_0=(k_{l\perp}/k_l)n+(k_\parallel/k_l)e$, d) $w_r=-(k_{l\perp}/k_l)n+(k_\parallel/k_l)e$,

e) $v_{2t}=-(k_\parallel/k'_t)n+(k'_{t\perp}/k'_t)e$, f) $w_t=(k'_{l\perp}/k'_l)n+(k_\parallel/k'_l)e$, (13)

где $v_{2\alpha}$ и w_α $\alpha=(0,r,t)$ отвечают векторам поляризации падающей, отраженной и преломленной волн, а величины k со штрихами обозначают волновые вектора внутри среды.

Полные нормальная un и тангенциальная ue компоненты амплитуды колебаний в падающей волне на границе раздела складываются из соответствующих амплитуд обеих, продольной и поперечной, мод, т.е. они равны соответственно

a) $u_0n=-(k_\parallel/k_t)\alpha+(k_{l\perp}/k_l)\beta$, b) $u_0e=(k_{t\perp}/k_t)\alpha+(k_\parallel/k_l)\beta$. (14)

Для дальнейшего удобно эти комбинации представить в виде произведения двумерных векторов a_0, b_0 и ψ_0, определяемых равенствами

a) $u_0n=a_0\psi_0=(-k_\parallel/k_t,\ k_{l\perp}/k_l)\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$,

b) $u_0e=b_0\psi_0=(k_{t\perp}/k_t,\ k_\parallel/k_l)\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$, (15)

в которых произведения вычисляются по обычным правилам матричной алгебры. При этом полный вектор смещения в падающей волне можно записать в виде

$u_0=a_0\psi_0n+b_0\psi_0e$.

Если падающая волна описывается двумерным вектором-столбцом ψ_0, то отраженную и преломленную волну можно соответственно записать в виде векторов

$\psi_r=r_\parallel\psi_0$, $\psi_t=t_\parallel\psi_0$, где r и t - квадратные матрицы 2x2, и значок $\parallel$ указывает, что рассматривается случай, когда падающая волна поляризована параллельно плоскости отражения.

Условия непрерывности по отдельности и нормальной и тангенциальной компонент колебаний на границе раздела приводят к уравнениям

$$\text{a) } a_0+a_r r_\parallel=a_t t_\parallel, \qquad \text{b) } b_0+b_r r_\parallel=b_t t_\parallel, \tag{16}$$

где

$$\text{a) } a_0=(-k_\parallel/k_t, k_{l\perp}/k_l), \qquad \text{b) } b_0=(k_{t\perp}/k_t, k_\parallel/k_l),$$

$$\text{c) } a_r=-(k_\parallel/k_t, k_{l\perp}/k_l), \qquad \text{d) } b_r=(-k_{t\perp}/k_t, k_\parallel/k_l),$$

$$\text{e) } a_t=(-k_\parallel/k'_t, k'_{l\perp}/k'_l), \qquad \text{f) } b_t=(k'_{t\perp}/k'_t, k_\parallel/k'_l). \tag{17}$$

В принципе, оба уравнения (16) следовало бы умножить на ψ_0 справа, и тогда мы имели бы два числовых уравнения. Однако поскольку компоненты α и β у вектора ψ_0 падающей волны произвольны, то уравнения (16) справедливы для векторов-строк.

Уравнения (16) содержат всего четыре линейных алгебраических уравнения, тогда как полное число неизвестных в матрицах r и t равно восьми. Для разрешимости уравнений требуются еще четыре алгебраических уравнения. Они находятся из условия непрерывности напряжения (6) на границе раздела. Поскольку для произвольной волны, состоящей из двух мод, амплитуду колебаний можно представить в виде $\mathbf{u}=a\psi\mathbf{n}+b\psi\mathbf{e}$, то выражение (6) переписывается следующим образом:

$$\sigma_{ik}n_k\equiv\mathbf{n}\{\rho c_t^2 2(\mathbf{n}\nabla)a\psi+\rho(c_l^2-2c_t^2)[(\mathbf{n}\nabla)a\psi+(\mathbf{e}\nabla)b\psi]\}+$$

$$+\mathbf{e}\rho c_t^2[(\mathbf{n}\nabla)b\psi+(\mathbf{e}\nabla)a\psi]=\rho c_l^2(\mathbf{n}\{2\zeta a(\mathbf{n}\nabla)+(1-2\zeta)[a(\mathbf{n}\nabla)+b(\mathbf{e}\nabla)]\}+$$

$$+\mathbf{e}\zeta[b(\mathbf{n}\nabla)+a(\mathbf{e}\nabla)]\})\psi, \tag{18}$$

где

$$\zeta=(c_t/c_l)^2. \tag{19}$$

Подставив в (18) в качестве ψ вектор (12), получим на границе раздела следующие уравнения непрерывности для совокупности падающей, отраженной и преломленной волн:

$$\text{a) } [a_0\hat{k}_{0\perp}+(1-2\zeta)b_0 k_\parallel]+[a_r\hat{k}_{r\perp}+(1-2\zeta)b_r k_\parallel]r_\parallel=$$

$$=Z[a_t\hat{k}'_{t\perp}+(1-2\zeta')b_t k_\parallel]t_\parallel,$$

$$\text{b)}\ \zeta(b_0\hat{k}_{0\perp}+a_0k_\parallel)+\zeta(b_r\hat{k}_{r\perp}+a_rk_\parallel)r_\parallel=Z\zeta'(b_t\hat{k}'_{t\perp}+a_tk_\parallel)t_\parallel, \qquad (20)$$

где

$$\text{a)}\ \hat{k}_{0\perp}=\begin{pmatrix}k_{t\perp} & 0\\ 0 & k_{l\perp}\end{pmatrix},\qquad \text{b)}\ \hat{k}_{r\perp}=-\begin{pmatrix}k_{t\perp} & 0\\ 0 & k_{l\perp}\end{pmatrix},\qquad \text{c)}\ \hat{k}'_{t\perp}=\begin{pmatrix}k'_{t\perp} & 0\\ 0 & k'_{l\perp}\end{pmatrix},$$

$$\text{d)}\ \zeta'=(c'_t/c'_l)^2,\qquad \text{e)}\ Z=(\rho'/\rho)(c'_l/c_l)^2. \qquad (21)$$

Уравнения (16a,b) удобно записать в едином матричном виде, записав строки друг под другом. Аналогичную комбинацию можно проделать и с уравнениями (20a,b). В результате получим два матричных уравнения:

$$\text{a)}\ e+ar_\parallel=bt_\parallel,\qquad \text{b)}\ E+Ar_\parallel=ZBt_\parallel, \qquad (22)$$

где

$$\text{a)}\ a=\begin{pmatrix}a_r\\ b_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_\parallel/k_t & -k_{l\perp}/k_l\\ -k_{t\perp}/k_t & k_\parallel/k_l\end{pmatrix},\qquad \text{b)}\ b=\begin{pmatrix}a_t\\ b_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_\parallel/k'_t & k'_{l\perp}/k'_l\\ k'_{t\perp}/k'_t & k_\parallel/k'_l\end{pmatrix},$$

$$\text{c)}\ e=\begin{pmatrix}a_0\\ a_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_\parallel/k_t & k_{l\perp}/k_l\\ k_{t\perp}/k_t & k_\parallel/k_l\end{pmatrix}, \qquad (23)$$

$$\text{a)}\ A=\begin{bmatrix}a_r\hat{k}_{r\perp}+(1-2\zeta)b_rk_\parallel\\ \zeta(b_r\hat{k}_{r\perp}+a_rk_\parallel)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\zeta k_\parallel k_{t\perp}/k_t & (k_l^2-2\zeta k_\parallel^2)/k_l\\ (k_l^2-2\zeta k_\parallel^2)/k_t & -2\zeta k_{l\perp}k_\parallel/k_l\end{bmatrix},$$

$$\text{b)}\ B=\begin{bmatrix}a_t\hat{k}'_{t\perp}+(1-2\zeta')b_tk_\parallel\\ \zeta'(b_t\hat{k}'_{t\perp}+a_tk_\parallel)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\zeta' k_\parallel k'_{t\perp}/k'_t & (k_l'^2-2\zeta' k_\parallel^2)/k'_l\\ (k_l'^2-2\zeta' k_\parallel^2)/k'_t & 2\zeta' k'_{l\perp}k_\parallel/k'_l\end{bmatrix},$$

$$\text{c)}\ E=\begin{bmatrix}a_0\hat{k}_{0\perp}+(1-2\zeta)k_\parallel b_0\\ \zeta(b_0\hat{k}_{0\perp}+k_\parallel a_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\zeta k_\parallel k_{t\perp}/k_t & (k_l^2-2\zeta k_\parallel^2)/k_l\\ (k_l^2-2\zeta k_\parallel^2)/k_t & 2\zeta k_{l\perp}k_\parallel/k_l\end{bmatrix}, \qquad (24)$$

и было использовано соотношение $\zeta k_t^2=k_l^2$. Заметим, что матрицы a и b невырождены, поскольку

$$\det a=-(k_\parallel^2+k_{l\perp}k_{t\perp})/k_lk_t$$

и

$$\det b=-(k_\parallel^2+k'_{l\perp}k'_{t\perp})/k'_lk'_t$$

никогда не могут обратиться в ноль. С другой стороны, матрицы

A и B могут быть вырождены, поскольку

a) $\det A=-\zeta^2[(k_{t\perp}^2-k_\parallel^2)^2+4k_\parallel^2 k_{t\perp}k_{t\perp}]/k_t k_l$,

b) $\det B=-\zeta'^2[(k_{t\perp}'^2-k_\parallel^2)^2+4k_\parallel^2 k_{t\perp}'k_{l\perp}']/k_t' k_l'$ (25)

могут обратиться в ноль. В частности, при $\rho=0$ уравнение (22b) приводится к виду $Bt_\parallel=0$, и имеет решение лишь при условии $\det B=0$. Это условие может быть выполнено только при мнимых $k_{l\perp}'$ и $k_{t\perp}'$, т.е. продольная и поперечная волны затухают вглубь вещества. Соответствующее решение представляет собой поверхностную рэлеевскую волну. Она состоит из двух мод, которые обладают единым волновым вектором $k_\parallel$ и скоростью $c_R=\omega/k_\parallel$. Скорость поверхностной, т.е. рэлеевской, волны определяется из условия $\det B=0$, которое приводится к хорошо известному уравнению[3]

$$(2-x)^4=16(1-x)(1-x/\zeta') \tag{26}$$

для $x=(c_R/c_t')^2$.

Решение двух матричных уравнений (22) равно

a) $r_\parallel=a^{-1}(ZBb^{-1}-Aa^{-1})^{-1}(E-ZBb^{-1}e)$,

b) $t_\parallel=b^{-1}(ZBb^{-1}-Aa^{-1})^{-1}(E-Aa^{-1}e)$. (27)

Может случиться так, что матрица $D=ZBb^{-1}-Aa^{-1}$ окажется вырожденной.

$$D=Z\begin{pmatrix}-2\zeta' k_\parallel k_{t\perp}'/k_t' & (k_l'^2-2\zeta' k_\parallel^2)/k_l' \\ (k_l'^2-2\zeta' k_\parallel^2)/k_t' & 2\zeta' k_{l\perp}' k_\parallel/k_l'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_\parallel/k_l' & -k_{l\perp}'/k_l' \\ -k_{t\perp}'/k_t' & -k_\parallel/k_t'\end{pmatrix}/\det b$$

$$-\begin{pmatrix}2\zeta k_\parallel k_{t\perp}/k_t & (k_l^2-2\zeta k_\parallel^2)/k_l \\ (k_l^2-2\zeta k_\parallel^2)/k_t & -2\zeta k_{l\perp} k_\parallel/k_l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_\parallel/k_l & k_{l\perp}/k_l \\ k_{t\perp}/k_t & k_\parallel/k_t\end{pmatrix}/\det a=$$

$$=Z\begin{pmatrix}k_{t\perp}'k_l'^2 & \zeta' k_\parallel[(k_{t\perp}'-k_{l\perp}')^2-k_l'^2] \\ -\zeta' k_\parallel[(k_{t\perp}'-k_{l\perp}')^2-k_l'^2] & k_{l\perp}'k_l'^2\end{pmatrix}/d_b+$$

$$+\begin{pmatrix}k_{t\perp}k_l^2 & -\zeta k_\parallel[(k_{t\perp}-k_{l\perp})^2-k_l^2] \\ \zeta k_\parallel[(k_{t\perp}-k_{l\perp})^2-k_l^2] & k_{l\perp}k_l^2\end{pmatrix}/d_a, \tag{28}$$

где

$d_a=k_\parallel^2+k_{l\perp}k_{t\perp}$, $\quad d_b=k_\parallel^2+k_{l\perp}'k_{t\perp}'$.

Условием вырождения, которое равносильно условию возникновения поверхностной волны на границе раздела двух сред, является

$$\det D=$$
$$(k_{t\perp}k_l^2/d_a+Zk'_{t\perp}k_l'^2/d_b)(k_{l\perp}k_l^2/d_a+Zk'_{l\perp}k_l'^2/d_b)+$$
$$+k_\parallel^2\{\zeta[(k_{l\perp}-k_{t\perp})^2-k_l^2]/d_a-Z\zeta'[(k'_{l\perp}-k'_{t\perp})^2-k_l'^2]/d_b\}^2=0. \qquad (29)$$

Обозначив $k_\parallel=\omega/c_s$ и разделив обе части этого выражения на $Z^2k_\parallel^2$, получим уравнение для безразмерной переменной $x=(c_s/c_t)^2$:

$$[z\zeta\varkappa_t x/d(x)+\zeta'\varkappa'_t x'/d(x')][z\zeta\varkappa_l x/d(x)+\zeta'\varkappa'_l x'/d(x')]-$$
$$\{z\zeta[(\varkappa_l-\varkappa_t)^2+\zeta x]/d(x)-\zeta'[(\varkappa'_l-\varkappa'_t)^2+\zeta' x']/d(x')\}^2=0, \qquad (30)$$

где

$$x'=\beta x, \quad \beta=(c_t/c'_t)^2, \quad z=1/Z=\beta(\rho/\rho'),$$

$$\varkappa_t=\sqrt{1-x}, \quad \varkappa_l=\sqrt{1-\zeta x}, \quad \varkappa'_t=\sqrt{1-x'}, \quad \varkappa'_l=\sqrt{1-\zeta' x'},$$

$$d(x)=1-\varkappa_t\varkappa_l, \quad d(x')=1-\varkappa'_t\varkappa'_l, \quad \zeta=(c_t/c_l)^2, \quad \zeta'=(c'_t/c'_l)^2.$$

Из общих соображений очевидно, что скорость поверхностной волны на границе раздела двух сред должна быть меньше наименьшей из скоростей поперечных волн по обе ее стороны, т.к. в противном случае в одной из сред колебания границы будут создавать уходящие волны, которые постепенно унесут всю энергию, заключенную в поверхностных колебаниях.

Для определенности мы будем считать среду слева от границы раздела менее плотной, тогда все параметры и решение x, отвечающее поверхностной волне, меньше единицы. Приведенные формулы показывают, что скорость поверхностной волны зависит от отношения плотностей и от скоростей продольных и поперечных волн по обе стороны границы раздела. Это дает возможность менять c_s путем изменения свойств одной из сред.

3. ОТРАЖЕНИЕ ОТ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ТВЕРДОЕ ТЕЛО - ЖИДКОСТЬ

Если вторая среда жидкая, то в ней, во-первых, скорость $c_t=0$, а во-вторых, продольные смещения на границе раздела не передаются, т.е. уравнение (16b) следует из рассмотрения исключить. Поскольку жидкость не оказывает сопротивления тангенциальному смещению, то правую часть уравнения (20b) следует положить равной нулю. (Правда, если учесть вязкость и прилипание жидкости к поверхности твердого тела, то на границе следует ввести диссипацию для тангенциальных смещений, но мы здесь этого учитывать не будем.) Все эти обстоятельства модифицируют уравнения (16) и (20), которые приводятся к виду

$$\text{a)}\ a_0+a_r r_\parallel=a_t t_\parallel, \qquad \text{b)}\ [a_0\hat{k}_{0\perp}+(1-2\zeta)b_0 k_\parallel]+$$
$$+[a_r\hat{k}_{r\perp}+(1-2\zeta)b_r k_\parallel]r_\parallel=Z[a_t\hat{k}'_{t\perp}+b_t k_\parallel]t_\parallel,$$
$$\text{c)}\ b_0\hat{k}_{0\perp}+a_0 k_\parallel+(b_r\hat{k}_{r\perp}+a_r k_\parallel)r_\parallel=0, \tag{31}$$

причем

$$\text{a)}\ a_t=(0,k'_{l\perp}/k'_l), \qquad \text{b)}\ b_t=(0,k_\parallel/k'_l), \qquad \text{c)}\ \hat{k}'_{t\perp}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & k'_{l\perp}\end{pmatrix}. \tag{32}$$

Более того, сама матрица пропускания границы раздела имеет вид

$$t_\parallel=\begin{pmatrix}0 & 0\\ t_{21} & t_{22}\end{pmatrix}.$$

Последнее позволяет преобразовать уравнения (31a,b) к виду

$$\text{a)}\ (k'_l/k'_{l\perp})(a_0+a_r r_\parallel)=\tilde{t}_\parallel,$$
$$\text{b)}\ \{[a_0\hat{k}_{0\perp}+(1-2\zeta)b_0 k_\parallel]+[a_r\hat{k}_{r\perp}+(1-2\zeta)b_r k_\parallel]r_\parallel\}/k'_l Z=\tilde{t}_\parallel, \tag{33}$$

где введена двумерная вектор-строка

$$\tilde{t}_\parallel=(t_{21},t_{22}).$$

Из уравнений (33a,b) следует

$$Zk'_{l\perp}a_0-[a_0\hat{k}_{0\perp}+(1-2\zeta)b_0 k_\parallel]=\{[a_r\hat{k}_{r\perp}+(1-2\zeta)b_r k_\parallel]-Zk'_{l\perp}a_r\}r_\parallel. \tag{34}$$

Скомбинируем, как и раньше, уравнения (31c) и (34). В результате получим уравнение

$$\text{a)}\ Dr_\parallel=F, \qquad \text{b)}\ D=\begin{bmatrix} b_r\hat{k}_{r\perp}+a_r k_\parallel \\ a_r(\hat{k}_{r\perp}-Zk'_{l\perp})+(1-2\zeta)b_r k_\parallel\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}(k^2_{t\perp}-k^2_\parallel)/k_t & -2k_\parallel k_{l\perp}/k_l\\ k_\parallel(Zk'_{l\perp}+2\zeta k_{t\perp})/k_t & [\zeta(k^2_{t\perp}-k^2_\parallel)+Zk'_{l\perp}k_{l\perp}]/k_l\end{pmatrix},$$

c) $F=\begin{pmatrix} (k_{t\perp}^2-k_\parallel^2)/k_t & 2k_\parallel k_{l\perp}/k_l \\ k_\parallel(Zk'_{l\perp}-2\zeta k_{t\perp})/k_t & [\zeta(k_{t\perp}^2-k_\parallel^2)-Zk'_{l\perp}k_{l\perp}]/k_l \end{pmatrix}$. (35)

Решение уравнения (35a) равно $r_\parallel=D^{-1}F$. Подставив его в (31a), получим $t_\parallel$. Условием возникновения поверхностной волны является $\det D=0$. Получающееся при этом уравнение для скорости поверхностной волны c_s приводится к виду

$$(\varkappa_t^2+1)[\zeta(\varkappa_t^2+1)+Z\varkappa'_l\varkappa_l]-2\varkappa_l(2\zeta\varkappa_t+Z\varkappa'_l)=0, \tag{36}$$

где приняты такие же обозначения, что и в (30).

Если по обе стороны от границы раздела могут распространяться только продольные волны, то задача отражения и преломления становится фактически скалярной, и мы ею заниматься не будем. Достаточно сказать, что в этом случае поверхностные волны возникать не могут.

4. ОТРАЖЕНИЕ И ПРОПУСКАНИЕ СЛОЯ ТОЛЩИНОЙ L

Определив рассеяние на одной границе раздела, мы без труда определяем отражение и пропускание слоя толщиной L. Действительно, обозначим матрицы отражения от границы раздела при падении из первой среды через r_+, а при падении из второй среды - r_-, и аналогичным же образом поступим с амплитудами пропускания границы раздела. Тогда матрицы отражения и пропускания слоя толщиной L записываются следующим образом[4]:

$$r_L=r_++t_-(1-gr_-gr_-)^{-1}gr_-gt_+,\quad t_L=t_-(1-gr_-gr_-)^{-1}gt_+, \tag{37}$$

где матрицы r_+ и t_+ даются выражениями (27), матрицы r_- и t_- получаются из выражений (27) путем перестановки местами штрихованных и нештрихованных величин, а матрица g диагональна и равна

$$g=\begin{pmatrix} \exp(ik'_{t\perp}L) & 0 \\ 0 & \exp(ik'_{l\perp}L) \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Формулы (37), (38) полностью решают задачу, позволяя теперь получать матрицы отражения и пропускания произвольного количества слоев.

Пусть, например, у нас имеется n слоев. Тогда матрицы отражения и пропускания n слоев выражаются через матрицы отражения и пропускания n-1 слоев:

$$r_n=r_1+t_1(1-r_{n-1}r_1)^{-1}r_{n-1}t_1, \quad t_n=t_{n-1}(1-r_{n-1}r_1)^{-1}t_1. \tag{39}$$

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Формулы типа (39) очень удобны для исследования одномерных периодических сред. Действительно, если у нас имеется полубесконечная система, состоящая из двух слоев, и величины r_1, t_1 относятся к одной паре слоев, то, учитывая, что для бесконечной системы оставшаяся среда после отщепления одной пары слоев ничем не отличается от первоначальной, легко получим уравнение для матрицы отражения r_∞ от полубесконечной периодической среды:

$$r_\infty=r_1+t_1(1-r_\infty r_1)^{-1}r_\infty t_1. \tag{40}$$

Зная отражение от полубесконечной среды, без труда находим отражение и пропускание периодической системы слоев конечной длины. Соответствующая процедура полностью аналогична той, которая используется для решения задач о распространении квантово-механических частиц в периодических потенциалах[4].

Все вышеприведенные формулы касались плоских волн с заданным волновым вектором и частотой. Если у нас имеется источник неплоских волн, то необходимо воспользоваться фурье-разложением, и тогда все формулы нужно использовать совместно с фурье-интегрированием.

Формулы (37) справедливы не только в плоских геометриях, где функция распространения имеет вид (38). В работе[5], например, показано применение аналогичных выражений и в сферических геометриях.

Наконец, следует еще отметить, что предлагаемый метод является полезным не только при рассмотрении одномерных задач. Он применим также и к таким задачам, как дифракция на рассеивателях, расположенных упорядоченно в трехмерном пространстве. Примером может служить дифракция нейтронов на трехмерном кристалле[6,7]. Совершенно аналогичную задачу можно сформулировать и для акустики.

Литература

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. - М.: АН СССР, 1957г.
2. Молотков Л.А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. - Л.: Наука, 1984.
3. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Теория упругости. - М.: Наука, 1965, гл.3
4. Игнатович В.К.: Этюд об одномерном периодическом потенциале. УФН, 1986, т. 150, с. 145
5. Ignatovich V.K.: Remarkable capability of the recursive relations method. Am. J. Phys. 1989, v. 57, p. 873.
6. Ignatovich V.K. Physics of Ultracold Neutrons. Oxford Clarendon Press, 1990.
7. Игнатович В.К. Физика ультрахолодных нейтронов. - М: Наука, 1986, гл. 5.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 июня 1990 года.