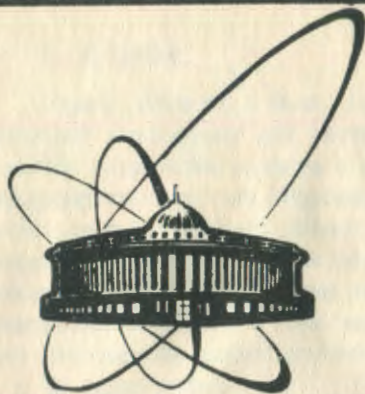


90-178



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

A 941

P4-90-178

Г.Н.Афанасьев, В.М.Шилов

КАК КВАНТОВЫЕ УСЛОВИЯ НЕПРОНИЦАЕМОСТИ
ВЛИЯЮТ НА ЭФФЕКТ ААРОНОВА - БОМА?

Направлено в "Journal of Physics A"

1990

1. Введение

Эффект Ааронова – Бом (АБ) /1/ часто определяют как квантовые следствия недоступных для частиц полей. Недоступность полей обеспечивается окружением области с отличными от нуля напряженностями электромагнитного поля непроницаемым экраном S подходящей геометрической формы. Цель данной работы состоит в анализе различных условий непроницаемости. Мы говорим, что экран S непроницаем для падающих частиц, если на нем равна нулю нормальная к S компонента квантово-механического тока вероятности. Это условие можно реализовать бесконечным числом способов.

Мы будем придерживаться следующего плана изложения. В п. 2 мы рассматриваем различные нерелятивистские условия непроницаемости и показываем, что они приводят к физически различным ситуациям. Это следует иметь в виду при анализе экспериментальных данных. В приложении к п. 2 мы доказываем, что односвязности (в математическом смысле) рассматриваемой области пространства еще недостаточно для отсутствия в ней АБ эффекта. Даны необходимые критерии для этого. В п. 3 изучаются релятивистские условия непроницаемости и вычислены соответствующие им релятивистские АБ сечения рассеяния.

2. Анализ нерелятивистских условий непроницаемости

2.1. Непроницаемый цилиндрический соленоид. Рассмотрим бесконечный цилиндрический соленоид, заключенный в непроницаемый цилиндр радиуса R_0 (см. рис. 1). В нерелятивистском случае ток вероятности равен

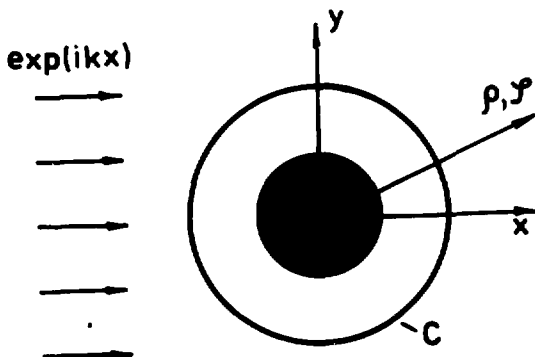


Рис. 1.

Бесконечный цилиндрический соленоид (зачернен) окружен непроницаемым цилиндром C радиуса R_0 . На поверхности C накладывается условие непроницаемости типа (2.1).

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im} (\bar{\Psi} \text{grad} \Psi - \Psi \text{grad} \bar{\Psi}) - \frac{e}{mc} \vec{A} |\Psi|^2.$$

В данном случае единственной отличной от нуля компонентой вектор-потенциала (в.п.) является $A_\varphi = \Phi/2\pi\rho$ (Φ — магнитный поток внутри соленоида). Поэтому условие непроницаемости C сводится к следующему:

$$\bar{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - \Psi \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_0. \quad (2.1)$$

Обычно этому условию удовлетворяют, полагая

$$\Psi = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_0. \quad (2.2)$$

Добиться выполнения условия (2.1) можно бесконечным числом способов. Вот два простейших, отличных от (2.2):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = \alpha \Psi \quad \text{при} \quad \rho = R_0 \quad (2.4)$$

(α — произвольная вещественная константа). В любом из этих случаев волновая функция (в.ф.) представима в виде

$$\Psi = \Psi_{AB} + \Psi_S. \quad (2.5)$$

Здесь Ψ_{AB} — волновая функция, отвечающая рассеянию на бесконечно-тонком соленоиде

$$\Psi_{AB} = \sum \exp[i\pi i (|m| - \frac{1}{2} |m - \gamma|) + im\varphi] \cdot j_{|m-\gamma|}(k\rho) \quad (2.6)$$

($k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, $\gamma = \frac{e\Phi}{\hbar c}$). Здесь и далее при отсутствии индекса суммирования подразумевается суммирование от $-\infty$ до $+\infty$. Асимптотическое выражение для Ψ_{AB} , справедливое при всех углах рассеяния, было впервые получено в работе [2]:

$$\Psi_{AB} \approx \exp[ikx + i\gamma(\varphi - \pi)] + i \sin \frac{\gamma}{2} \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\right) \frac{\exp(ik\rho)}{(1 - 2i\pi k\rho \sin^2 \frac{\varphi}{2})^{1/2}}.$$

При не слишком малых углах рассеяния ($k\rho \sin^2 \frac{\varphi}{2} \gg 1$) приходим к выражению, полученному в [1]:

$$\Psi_{AB} \sim \exp[ikx + i\gamma(\varphi - \pi)] + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \exp(ik\rho) f_{AB}(\varphi),$$

$$f_{AB}(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}ik} \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin \varphi/2} \cdot \sin \pi\gamma, \quad \sigma_{AB} = \frac{1}{2\pi k} \frac{\sin^2 \pi\gamma}{\sin^2 \varphi/2}. \quad (2.7)$$

(Ради определенности и без ограничения общности мы считаем $0 \leq \gamma \leq 1$). Второе слагаемое в (2.5) учитывает конечность размеров соленоида и его экранировку

$$\Psi_S = \sum \exp[i\pi \cdot (|m| - \frac{1}{2}|m - \gamma|) + im\varphi] H_{|m - \gamma|}^{(1)}(k\rho) \cdot C_m.$$

Коэффициенты C_m определяются граничным условием при $\rho = R_0$:

$$C_m = -\frac{J_{|m - \gamma|}}{H_{|m - \gamma|}^{(1)}} \quad - \text{при условии} \quad (2.2)$$

$$C_m = -\frac{J_{|m - \gamma|}}{H_{|m - \gamma|}^{(1)}} \quad - \text{при условии} \quad (2.3)$$

$$C_m = -\frac{K J_{|m - \gamma|} - \alpha J_{|m - \gamma|}}{K H_{|m - \gamma|}^{(1)} - \alpha H_{|m - \gamma|}^{(1)}} \quad - \text{при условии} \quad (2.4).$$

Здесь и в дальнейшем мы опускаем аргумент функций Бесселя и Ханкеля, если он равен kR_0 . Точка над этими функциями означает дифференцирование по их аргументу. При $\rho \rightarrow \infty$ получаем

$$\Psi_S \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}} \exp(ik\rho) \cdot f_S(\varphi), \quad (2.8)$$

$$f_S(\varphi) = \left(\frac{2}{\pi ik}\right)^{1/2} \sum C_m \exp[i\pi \cdot (|m| - |m - \gamma|) + im\varphi].$$

Полная амплитуда и сечение рассеяния равны

$$f = f_{AB} + f_S, \quad \sigma = |f|^2, \quad (2.9)$$

констатируем зависимость сечения рассеяния от конкретной реализации условия непроницаемости (2.1). Типичные сечения показаны на рис. 2 ÷ 4. Налицо сильная зависимость от выбора условий непроницаемости.

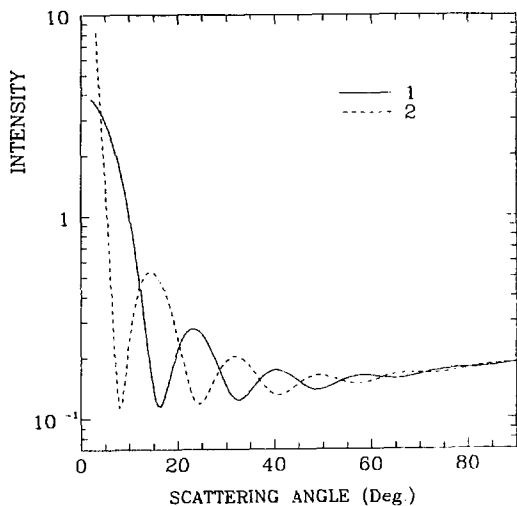


Рис. 2.
Нерелятивистская интенсивность рассеяния заряженных частиц на непроницаемом цилиндре при отсутствии (кривая 1) и наличии (кривая 2) магнитного поля ($\gamma = \frac{e\Phi}{\hbar c} = \frac{1}{2}$)

внутри цилиндра. Условие непроницаемости выбрано в виде (2.2). Интенсивность определяется как отношение нерелятивистского сечения рассеяния (2.9) к поперечному геометрическому сечению (равному $2R_0$). Определенная таким образом интенсивность безразмерна и зависит от единственного параметра $kR_0 = 10$.

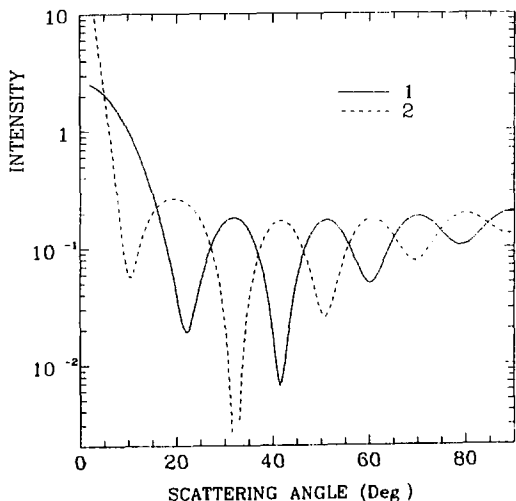


Рис. 3.

То же, что и на рис. 2, но при условии непроницаемости (2.3).

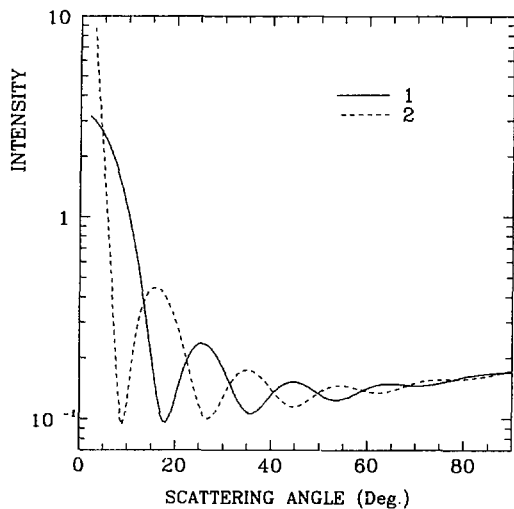
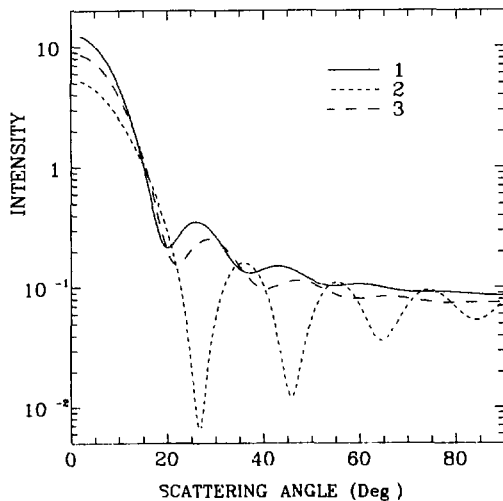


Рис. 4.

То же, что на рис.2 ,
но при условии непро-
ницаемости (2.4) и
 $d=1$.

Рис. 5.

Нерелятивистская ин-
тенсивность рас-
сеяния на непроица-
емой сфере радиуса R_0 .
Кривые 1, 2, и 3 со-
ответствуют услови-
ям непроицаемос-
ти (2.11), (2.12)
и (2.13) - при $d=1$.
Интенсивность опре-
деляется как отноше-
ние сечения рассея-
ния (2.14) к поперечному
геометрическому сече-
нию ($= \pi R_0^2$) . Па-
раметр $\kappa R_0 = 10$.



Условия (2.2) – (2.4), будучи тривиальными с математической точки зрения (они соответствуют крайним задачам Дирихле– Неймана и смешанной краевой задаче), отвечают различным типам физической непроницаемости. Существенным является ответ на вопрос: какой именно тип физической непроницаемости реализуется в экспериментах по проверке существования АБ эффекта? На данном этапе мы не интересуемся поведением в.ф. внутри C . Например, чтобы обратить Ψ внутри C в нуль при граничном условии (2.2) мы должны создать бесконечное объемное отталкивание внутри C и S -образный отталкивающий потенциал на поверхности C . Последний необходим для получения правильной величины скачка нормальной производной Ψ при переходе через границу C (в самом деле, $\partial\Psi/\partial r = 0$ внутри C и $\neq 0$ с наружной стороны C при граничном условии (1.2)). Наконец, отметим работы [3,4], в которых изучалось влияние изменения граничных условий на процесс рассеяния (безотносительно к АБ эффекту).

2.2. Рассеяние на непроницаемой сфере. Рассмотрим теперь непроницаемую сферу S радиуса R_0 . В отсутствие магнитного поля условие исчезновения на поверхности S нормальной компоненты тока вероятности выглядит следующим образом:

$$\bar{\psi}_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \psi_0 \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = R_0. \quad (2.10)$$

Простейшими реализациями (2.10) являются следующие:

$$\psi_0 = 0 \quad \text{при} \quad r = R_0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = R_0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial r} = \alpha \psi_0 \quad \text{при} \quad r = R_0 \quad (2.13)$$

(α – вещественно). В любом из этих случаев волновая функция, амплитуда и сечение рассеяния равны

$$\psi_0 = \exp(ikz) + \sqrt{\frac{\pi}{ikz}} \sum_l i^l (2l+1) C_l H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(kz) P_l(\cos\theta) \\ f(\theta) = \frac{1}{ik} \sum_l (2l+1) C_l P_l(\cos\theta), \quad \sigma = |f(\theta)|^2. \quad (2.14)$$

Коэффициенты C_l равны

$$C_l = - \frac{J_{l+1/2}}{H_{l+1/2}^{(1)}} \quad \text{при условии} \quad (2.11),$$

$$C_e = - \frac{(l+1)J_{e+\frac{1}{2}} - KR_0 J_{e-\frac{1}{2}}}{(l+1)H_{e+\frac{1}{2}}^{(1)} - KR_0 H_{e-\frac{1}{2}}^{(1)}} \quad \text{при условии (2.12),}$$

$$C_e = - \frac{(l+1+dR)J_{e+\frac{1}{2}} - KR_0 J_{e-\frac{1}{2}}}{(l+1+dR)H_{e+\frac{1}{2}}^{(1)} - KR_0 H_{e-\frac{1}{2}}^{(1)}} \quad \text{при условии (2.13).}$$

Типичные сечения $\sigma' = |f|^2$ показаны на рис. 5. Как и в случае непроницаемого цилиндра, констатируем сильную зависимость сечений от конкретной реализации условий непроницаемости.

2.3. Непроницаемая сфера с магнитным полем. Поместим теперь внутрь сферы S тороидальный соленоид $(\rho-d)^2 + z^2 = R^2$ (рис. 6). Вне соленоида магнитное поле $H=0$. Внутри соленоида отлична от нуля только одна компонента $H_\varphi (= g/\rho)$. Константа g следующим образом связана с потоком Φ магнитного поля через поперечное сечение соленоида: $g = \frac{1}{2\pi} \Phi \cdot (d - \sqrt{d^2 - R^2})^{-1}$. В кулоновской калибровке отличны от нуля две компоненты в.п. (A_z и A_θ) ^{1/5/}. На больших расстояниях они убывают как r^{-3} :

$$A_z \approx \frac{\pi g d R^2}{2 r^3} \cos \theta, \quad A_\theta \approx \frac{\pi g d R^2}{4 r^3} \sin \theta.$$

$\exp(ikz)$

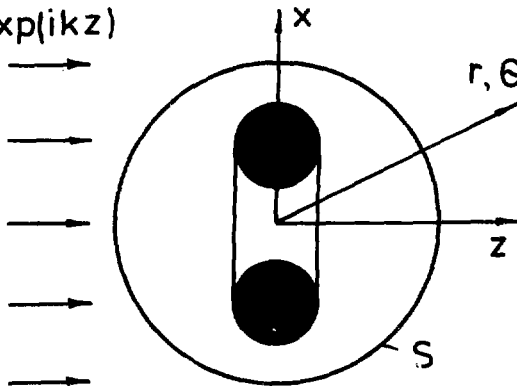


Рис. 6.

Тороидальный соленоид (зачернен) окружен непроницаемой сферой S радиуса R_0 . На ее поверхности наложено условие непроницаемости типа (2.16).

Приведем явный вид компонент в.п. для бесконечно тонкого соленоида ^{1/5/}:

$$A_z = \frac{R^2 g d}{2 (d r \sin \theta)^{3/2}} \frac{1}{\sin \mu} Q_{-\frac{1}{2}}^1 (c_h \mu), \quad (2.15)$$

$$A_\theta = \frac{R^2 g}{2 (d r \sin \theta)^{3/2}} \frac{1}{\sin \mu} \left[d \cdot \sin \theta Q_{-\frac{1}{2}}^1 (c_h \mu) - r Q_{\frac{1}{2}}^1 (c_h \mu) \right].$$

(Здесь $c_h \mu = \frac{r^2 + d^2}{2 d r \sin \theta}$, Q_ν^σ - функция Лежандра 2-го рода).

С учетом того, что вне сферы S в.п. $A \neq 0$, имеем для условия непроницаемости S :

$$j_z = \frac{\hbar}{2 i \mu} (\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z}) - \frac{e}{m c} A_z |\psi|^2 = 0 \quad \text{при } r = R_0. \quad (2.16)$$

Возникает вопрос: достаточно ли условия непроницаемости (2.16) для отсутствия наблюдаемых эффектов, обязанных отличию от нуля в.п. вне сферы S ? С первого взгляда кажется, что ответ очевиден. В самом деле, после наложения граничного условия при $r = R_0$ мы оперируем в пространстве (лежащем вне сферы S), которое математически односвязно. Обычно считают ^{16/}, что если область пространства, в которой $\vec{H} = 0$, односвязна, то в ней отсутствуют наблюдаемые эффекты, обязанные отличию от нуля в.п. A . Контрпримеры, приведенные в работе ^{7/}, заставляют усомниться в этом утверждении. Поскольку сам факт существования АБ эффекта в односвязных областях пространства имеет фундаментальное значение, мы кратко обсудим его, отнеся все подробности в Приложение.

Многие из противоречий, встречающихся в физической литературе по АБ эффекту, обязаны различному пониманию одно-и многосвязности. Математики называют область пространства многосвязной, если в ней существует замкнутый контур, который невозможно стянуть в точку, оставаясь в том же пространстве. Если же такого контура нет, пространство односвязно. Примером многосвязного пространства может служить часть пространства, лежащая вне тора T (невозможно стянуть в точку замкнутый контур, проходящий через отверстие тора). Окружим теперь тор T сферой S . Пространство R_S , находящееся вне S , односвязно (любой замкнутый контур вне S можно стянуть в точку). Уравнение Шредингера может быть решено вне S , если на поверхности S задано граничное условие. Если это условие произвольно, то частицы (поскольку $j_z \neq 0$ на поверхности S) могут проникать из R_S в многосвязную область R_m , лежащую меж-

ду тором T и поверхностью сферы S . Включение магнитного поля внутри T может привести к наблюдаемым эффектам вне S (см. Приложение), даже если тор T непроницаем. Таким образом, с точки зрения математика, пространство вне S односвязно, даже если частицы могут проникать из него в многосвязную область R_m . Чтобы избежать возникающих из-за этого физических эффектов, на поверхности S должно быть наложено условие непроницаемости. Это соответствует интуитивному пониманию односвязности у большинства физиков. Физическое понятие односвязности получается из математического путем наложения условия непроникновения на границе, задающей односвязную область.

Таким образом, существование или отсутствие АБ эффекта в односвязных пространствах зависит от того, определяем ли мы их формально-математически или физически.

3. Релятивистские условия непроницаемости

3.1. Релятивистский непроницаемый цилиндр. Переходим к рассмотрению релятивистского АБ эффекта. Имеется две работы, посвященные этому вопросу. В первой из них ^{/13/} было доказано, что для бесконечно тонкого цилиндрического соленоида релятивистское АБ сечение отличается множителем $(1 - \beta^2)$ ($\beta = v/c$). Авторы работы ^{/14/}, в которой изучалось рассеяние на непроницаемом цилиндрическом соленоиде конечного радиуса R_0 , утверждают, что на границе соленоида невозможно обратить в нуль все компоненты дираковской в.ф. Ввиду того, что в типичных экспериментах по проверке существования АБ эффекта ^{/15/} энергия электронов порядка 100 кэВ, что соответствует $\beta \approx 0,6$, возникает необходимость в более детальном изучении этого вопроса.

Вне цилиндра C в.ф. удовлетворяет уравнению Дирака (У.Д.)

$$H\psi = \epsilon\psi, \quad H = -i\hbar c \vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar c} \vec{A}) + mc^2\beta$$

$$\left(\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

ψ разлагаем по состояниям с определенной проекцией углового момента

$$\psi = \sum_l \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} \hbar \sum_3 \right) \left(\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \right),$$

$$\psi = \sum \psi_m, \quad \sum_3 \psi_m = \hbar \cdot (m + \frac{1}{2}) \psi_m, \quad \psi_m = \begin{bmatrix} \psi_{1m} \\ \psi_{2m} \\ \psi_{3m} \\ \psi_{4m} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{1m} = U_{1m} \cdot \exp(im\varphi), \quad \Psi_{2m} = U_{2m} \cdot \exp[i(m+1)\varphi],$$

$$\Psi_{3m} = U_{3m} \cdot \exp(im\varphi), \quad \Psi_{4m} = U_{4m} \cdot \exp[i(m+1)\varphi].$$

(3.1)

Функции U_{1m} , U_{2m} являются линейными комбинациями бесселевых функций:

$$U_{1m} = A_m [J_{m-\gamma}(k\rho) + B_m \cdot H_{m-\gamma}^{(1)}(k\rho)],$$

$$U_{2m} = C_m [J_{m+1-\gamma}(k\rho) + D_m H_{m+1-\gamma}^{(1)}(k\rho)],$$

$$k = \sqrt{\epsilon^2 - \mu^2 c^4} / \hbar c.$$

Малые компоненты дираковской в.ф. следующим образом выражаются через U_{1m} и U_{2m} :

$$U_{3m} = -i\eta \left(\frac{d}{d\rho} + \frac{m+1-\gamma}{\rho} \right) U_{2m} = -i\eta C_m [J_{m-\gamma}(k\rho) + D_m H_{m-\gamma}^{(1)}(k\rho)],$$

(3.2)

$$U_{4m} = -i\eta \left(\frac{d}{d\rho} - \frac{m-\gamma}{\rho} \right) U_{1m} = i\eta A_m [J_{m+1-\gamma}(k\rho) + B_m H_{m+1-\gamma}^{(1)}(k\rho)],$$

$\eta = \left(\frac{\epsilon - \mu c^2}{\epsilon + \mu c^2} \right)^{1/2}$. Коэффициенты A_m , C_m фиксируются из условия получения правильного выражения для падающей волны, которую выбираем распространяющейся в положительном направлении оси x с положительной спиральностью и энергией:

$$\vec{\Sigma} \cdot (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) \Psi_{inc} = p \Psi_{inc}, \quad p = \hbar k,$$

$$\Psi_{inc} = \exp[i(kx + \gamma(\varphi - \pi))] U_\eta, \quad U_\eta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \eta \\ \eta \end{bmatrix}.$$

В итоге получаем

$$A_m = \exp(i\pi \frac{m+\gamma}{2}),$$

$$B_m = \exp(i\pi \frac{m+1+\gamma}{2}).$$

Подставляя эти коэффициенты в (3.1), приводим Ψ к виду

$$\Psi = (\Psi_{AB} + \Psi_S^0) U_\eta + \Psi_S. \quad (3.3)$$

Здесь ψ_{AB} определено соотношением (2.6)

$$\psi_S^0 = i \sin \pi \delta \sum_{m=0}^{-\infty} \exp(i\pi \frac{\delta-m}{2}) \cdot H_{\delta-m}^{(1)}(k\rho) \exp(i m \varphi),$$

$$\psi_S = \begin{bmatrix} \psi_1^{(S)} \\ \psi_2^{(S)} \\ \psi_3^{(S)} \\ \psi_4^{(S)} \end{bmatrix},$$

$$\psi_1^{(S)} = \sum \exp(i\pi \frac{m+\delta}{2}) B_m \cdot H_{m-\delta}^{(1)}(k\rho) \cdot \exp(i m \varphi),$$

$$\psi_2^{(S)} = \sum \exp(i\pi \frac{m+\delta}{2}) D_{m-1} H_{m-\delta}^{(1)}(k\rho) \cdot \exp(i m \varphi),$$

$$\psi_3^{(S)} = \eta \sum \exp(i\pi \frac{m+\delta}{2}) D_m \cdot H_{m-\delta}^{(1)}(k\rho) \cdot \exp(i m \varphi),$$

$$\psi_4^{(S)} = \eta \sum \exp(i\pi \frac{m+\delta}{2}) B_{m-1} H_{m-\delta}^{(1)}(k\rho) \exp(i m \varphi).$$

Здесь и в дальнейшем, когда пределы суммирования не указаны, подразумевается суммирование по всем m от $-\infty$ до $+\infty$.
При $\rho \rightarrow \infty$ имеем следующее асимптотическое поведение ψ :

$$\psi \approx \exp[ikx + i\delta(\varphi - \pi)] \cdot U_2 + \frac{\exp(i k \rho)}{\sqrt{\rho}} f(\varphi), \quad (3.4)$$

где $f(\varphi)$ - спиновая амплитуда рассеяния, равная

$$f(\varphi) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \eta f_2 \exp(-i\varphi) \\ \eta f_1 \exp(i\varphi) \end{bmatrix}; \quad f_1 = \sqrt{\frac{2}{i\pi ik}} \exp(i\pi\delta) \sum B_m \cdot \exp(i m \varphi), \quad (3.5)$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{2}{i\pi ik}} \exp(i\pi\delta) \sum D_{m-1} \cdot \exp(i m \varphi).$$

Наконец, сечение рассеяния равно

$$\sigma = \frac{1}{2} (|f_1|^2 + |f_2|^2). \quad (3.6)$$

Коэффициенты B_m , D_m определяются граничным условием при $\rho = R_0$. Потребуем, например, чтобы при $\rho = R$ обращались в нуль большие компоненты (u_{1m}, u_{2m}) дираковской в.ф. Это дает

$$D_{m-1} = B_m = -Y_{m-1} / H_{m-1}^{(1)} \quad (3.7)$$

Подставляя эти значения в (3.2), получаем при $\rho = R_0$

$$|U_{3m}|^2 = \frac{4\eta^2}{\pi^2 k^2 R^2} \cdot (Y_{m-1}^2 + Y_{m-1}^2)^{-1},$$

$$|U_{4m}|^2 = \frac{4\eta^2}{\pi^2 k^2 R^2} \cdot (Y_{m+1-1}^2 + Y_{m+1-1}^2)^{-1}.$$

В типичных экспериментах по АБ эффекту $\sqrt{15} / kR_0 \approx 10^6$. Заменяем функции Бесселя и Неймана их асимптотическими выражениями:

$$|U_{3m}|^2 \approx |U_{4m}|^2 \approx \frac{2\eta^2}{\pi k R} \ll 1.$$

Поэтому, хотя отличие от нуля при $\rho = R_0$ малых компонент в ф. действительно имеет место $\sqrt{14}$, но в реальных экспериментах им можно пренебречь. Подставляя (3.7) в (3.5) и (3.6), имеем

$$f_1 = f_2 = f, \quad \delta = |f|^2$$

$$f = -\sqrt{\frac{2}{\pi i k}} \exp(i\pi\delta) \sum \frac{Y_{m-1}}{H_{m-1}^{(1)}} \exp(im\delta). \quad (3.8)$$

Эта сумма содержит бесселевы функции как с положительными, так и отрицательными индексами. Избавимся от последних, воспользовавшись (при $m-1 < 0$) тождествами

$$Y_{-1}(x) = i \sin \pi \nu H_{\nu}^{(1)}(x) + Y_{\nu} \exp(-i\pi \nu)$$

$$H_{-1}^{(1,2)}(x) = \exp(\pm i\pi \nu) H_{\nu}^{(1,2)}(x). \text{ Тогда}$$

$$f = -\sqrt{\frac{2}{\pi i k}} \left\{ \frac{1}{2} \sin \pi \delta \frac{\exp(i\delta/2)}{\sin \delta/2} + \sum \exp[i\pi(1|m-1-m-1|+1)m\delta] \frac{Y_{|m-1|}}{H_{|m-1|}^{(1)}} \right\} \quad (3.9)$$

что по форме совпадает с нерелятивистской амплитудой рассеяния (2.9), соответствующей граничному условию (2.2). Точнее, нерелятивистское (2.9) переходит в релятивистское сечение (3.9) при замене нерелятивистского импульса $K_{нерел} = \sqrt{2ME}$ на релятивистский $K_{рел} = K_{нерел} (1-\beta^2)^{-1/2}$. Типичное сечение представлено на рис. 7.

Для бесконечно тонкого соленоида ($kR_0 \ll 1$) суммами в (3.9) можно пренебречь. Поэтому

$$f_{AB}^{рел} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi i k}} \sin \pi \delta \frac{\exp(i\delta/2)}{\sin \delta/2}.$$

Это выражение отличается от нерелятивистского (2.7) смислом K . Поэтому для бесконечно тонкого соленоида $\zeta_{AB}^{rel} = \zeta_{AB}^{non-rel} \sqrt{1-\beta^2}$, что подтверждается результатами работы /13/. Апостериори факт перехода нерелятивистских выражений в релятивистские можно подтвердить тем, что отдельные компоненты дираковской в.ф. удовлетворяют уравнению второго порядка, которое по форме совпадает с уравнением Шредингера, отличаясь тем, что содержит релятивистский импульс вместо нерелятивистского. Неисчезновение при $\rho = R_0$ малых компонент дираковской в.ф.

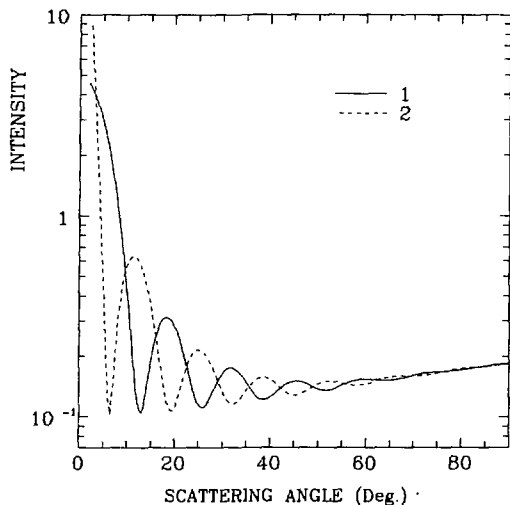


Рис. 7. Релятивистская интенсивность рассеяния электронов на непроницаемом цилиндре радиуса R_0 при $\delta = 0$ (кривая 1) и $\gamma = 1/2$ (кривая 2). Условие непроницаемости соответствует обращению в нуль при $\rho = R_0$ больших компонент дираковской волновой функции. Кинетическая энергия электронов 150 кэВ, параметр $kR_0 = 10$.

(хотя оно и носит академический характер из-за численной малости U_{lm} , U_{lm} при $\rho = R_0$) связано с нерелятивистским характером граничного условия. Точного выполнения условия непроницаемости можно добиться путем наложения релятивистского граничного условия. Именно, потребуем обращения в нуль (как это делается в теории кварковых мешков, см., например, /16/) нормальной к поверхности непроницаемого цилиндра ζ компоненты тока вероятности: $\vec{j} \cdot \vec{n} = 0$. Здесь \vec{n} - нормаль к поверхности ζ ($\vec{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0, 0)$), \vec{j} - дираковский ток вероятности ($= e c \Psi^+ \vec{\alpha} \Psi$). В результате получаем

$$\Psi^+ \vec{\alpha} \vec{n} \Psi = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_0. \quad (3.10)$$

Это выражение неудобно для практического применения. Следующее релятивистское условие, линейное по компонентам дираковской в.ф., также широко используется в теории мешков /16/:

$$i \vec{\alpha} \vec{n} \Psi = \beta \Psi \quad \text{при} \quad \rho = R_0. \quad (3.11)$$

Доказательство того, что (3.10) вытекает из (3.11), занимает всего две строчки. Эрмитово сопрягаем (3.11):

$$i \Psi^+ \vec{\alpha} \vec{n} = -\Psi^+ \beta. \quad (3.12)$$

Умножая (3.11) слева на Ψ^+ , а (3.12) справа на Ψ :

$$i \Psi^+ \vec{\alpha} \vec{n} \Psi = \Psi^+ \beta \Psi = -\Psi^+ \beta \Psi = 0.$$

Поэтому $\Psi^+ \vec{\alpha} \vec{n} \Psi = 0$, если выполнено условие (3.11). Обратное, вообще говоря, не имеет места, то есть условие (3.10) более общее, чем (3.11). В дальнейшем мы ограничимся условием (3.11). Применяем его к дираковской в.ф. (3.11). Это дает

$$u_{4m} = -i u_{1m}, u_{3m} = -i u_{2m} \quad \text{при} \quad \rho = R_0. \quad (3.13)$$

Отсюда находим коэффициенты B_m , D_m :

$$B_m = -\frac{J_{m-\alpha} + \eta J_{m+1-\alpha}}{H_{m-\alpha}^{(1)} + \eta H_{m+1-\alpha}^{(1)}}, \quad D_m = -\frac{J_{m+1-\alpha} - \eta J_{m-\alpha}}{H_{m+1-\alpha}^{(1)} - \eta H_{m-\alpha}^{(1)}}. \quad (3.14)$$

Подставляем эти выражения в (3.5):

$$f_1 = -\sqrt{\frac{2}{\pi i k}} \left\{ \frac{1}{2} \sin \eta \alpha \frac{\exp(i\eta/2)}{\sin \eta/2} + \exp(i\eta \alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{m-\alpha} + \eta J_{m+1-\alpha}}{H_{m-\alpha}^{(1)} + \eta H_{m+1-\alpha}^{(1)}} \exp(i m \eta) + \right. \\ \left. + \exp(-i\eta \alpha) \sum_{m=0}^{-\infty} \frac{J_{\alpha-m} - \eta J_{\alpha-m-1}}{H_{\alpha-m}^{(1)} - \eta H_{\alpha-m-1}^{(1)}} \cdot \exp(i m \eta) \right\},$$

$$f_2 = -\sqrt{\frac{2}{\pi i k}} \left\{ \frac{1}{2} \sin \eta \alpha \frac{\exp(i\eta/2)}{\sin \eta/2} + \right. \\ \left. + \exp(i\eta \alpha) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{m+1-\alpha} - \eta J_{m-\alpha}}{H_{m+1-\alpha}^{(1)} - \eta H_{m-\alpha}^{(1)}} \cdot \exp[i(m+1)\eta] + \right.$$

$$+ \exp(-i\pi\delta) \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{\delta-m-1} + \eta J_{\delta-m}}{H_{\delta-m-1}^{(1)} + \eta H_{\delta-m}^{(1)}} \exp[i(m+1)\varphi] \right\}. \quad (3.15)$$

Рассмотрим предельные случаи этих выражений:

а) магнитный поток внутри соленоида равен нулю ($\delta=0$)

$$f_1 = -\sqrt{\frac{2}{\pi i k}} \sum \frac{J_m + \eta J_{m+1}}{H_m^{(1)} + \eta H_{m+1}^{(1)}} \exp(im\varphi),$$

$$f_2 = -\sqrt{\frac{2}{\pi i k}} \sum \frac{J_{m+1} - \eta J_m}{H_{m+1}^{(1)} - \eta H_m^{(1)}} \exp[i(m+1)\varphi]; \quad (3.16)$$

б) бесконечно тонкий экранирующий цилиндр ($kR_0 \ll 1$).

При $0 < \delta < 1/2$

$$f_1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi i k}} \sin\pi\delta \frac{\exp(-i\varphi/2)}{\sin\varphi/2}, \quad f_2 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi i k}} \sin\pi\delta \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin\varphi/2}.$$

При $\frac{1}{2} < \delta < 1$

$$f_1 = -\frac{\sin\pi\delta}{\sqrt{2\pi i k}} \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin\varphi/2}, \quad f_2 = -\frac{\sin\pi\delta}{\sqrt{2\pi i k}} \frac{\exp(\frac{3}{2}i\varphi)}{\sin\varphi/2}. \quad (3.17)$$

В этом случае сечение рассеяния равно

$$\sigma_{AB}^{rel} = \frac{1}{2\pi k} \frac{\sin^2\pi\delta}{\sin^2\varphi/2}. \quad (3.18)$$

По форме оно совпадает с нерелятивистским выражением (2.7), отличаюсь тем, что в (3.18) входит релятивистский импульс. Поэтому, как и выше,

$$\sigma_{AB}^{rel} = \sigma_{AB}^{нерел} \cdot \sqrt{1-\beta^2}.$$

Резюмируем: выражения (3.15)–(3.17) представляют собой релятивистские АБ амплитуды, отвечающие релятивистскому граничному условию (2.11). На рис. 8 изображены сечения рассеяния, отвечающие точному релятивистскому условию непроницаемости (3.11). Сравнивая этот рисунок с предыдущим, мы констатируем прекрасное совпадение

сечений рассеяние, несмотря на резкое отличие функциональных форм соответствующих амплитуд (3.9) и (3.15).

3.2. Рассеяние на релятивистски непроницаемой сфере. Рассмотрим теперь релятивистское рассеяние на непроницаемой сфере радиуса R_0 . Пусть падающая волна распространяется в положительном направлении оси z с положительными энергией ξ и спиральностью. Тогда

$$\Psi_{inc} = \exp(ikz) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \eta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \eta = \left(\frac{\xi - \mu c^2}{\xi + \mu c^2} \right)^{1/2}.$$

Полная волновая функция равна

$$\Psi = \Psi_{inc} + \Psi_S.$$

При $z \rightarrow \infty$

$$\Psi_S = \frac{\exp(ikz)}{r} \cdot f(\vartheta), \quad f(\vartheta) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}.$$

Компоненты f_i спинорной амплитуды рассеяния зависят от выбора того или иного условия непроницаемости. Потребуем, например, ис-

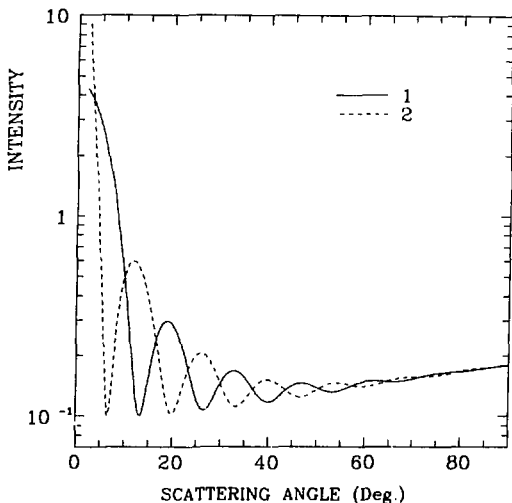


Рис. 8.

То же, что на рис. 7, но при условии непроницаемости (3.11).

чезновения при $l = R_0$ больших компонент дираковской в.ф.

Тогда

$$f_1 = \frac{i}{K} \sum (2l+1) \frac{J_{e+\frac{1}{2}}}{H_{e+\frac{1}{2}}^{(1)}} \cdot P_e(\cos\theta), \quad f_2 = 0,$$

$$f_3 = \frac{i\eta}{K} \sum \left[e \frac{J_{e-\frac{1}{2}}}{H_{e-\frac{1}{2}}^{(1)}} + (l+1) \frac{J_{e+\frac{3}{2}}}{H_{e+\frac{3}{2}}^{(1)}} \right] \cdot P_e(\cos\theta), \quad (3.19)$$

$$f_4 = \frac{i\eta}{K} \cdot \exp(i\varphi) \cdot \sum \left[\frac{J_{e-\frac{1}{2}}}{H_{e-\frac{1}{2}}^{(1)}} - \frac{J_{e+\frac{3}{2}}}{H_{e+\frac{3}{2}}^{(1)}} \right] \cdot P_e^1(\cos\theta).$$

Оказывается, что при $z = R_0$ угловая компонента $\psi_3 = 0$, а ψ_4 имеет порядок $(KR_0)^{-2}$.

Потребуем теперь точного исчезновения при $z = R_0$ дираковского тока вероятности. Это эквивалентно условию

$$i \vec{\alpha} \vec{n} \Psi = \beta \Psi \quad \text{при} \quad z = R_0$$

$$(\vec{n} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta, 0)). \quad (3.20)$$

Соответствующие этому условию непроницаемости компоненты релятивистской спинорной амплитуды равны

$$f_1 = \frac{i}{K} \sum \left[(l+1) g_{e+1} + e f_e \right] \cdot P_e(\cos\theta),$$

$$f_2 = -\frac{i}{K} \cdot \exp(i\varphi) \sum \left[g_{e+1} - f_e \right] \cdot P_e^1(\cos\theta),$$

$$f_3 = \frac{i\eta}{K} \sum \left[e g_e + (l+1) f_{e+1} \right] P_e(\cos\theta), \quad (3.21)$$

$$f_4 = \frac{i\eta}{K} \exp(i\varphi) \sum \left[g_e - f_{e+1} \right] \cdot P_e^1(\cos\theta),$$

$$g_e = \frac{J_{e-\frac{1}{2}} + \eta J_{e+\frac{1}{2}}}{H_{e-\frac{1}{2}}^{(1)} + \eta H_{e+\frac{1}{2}}^{(1)}}, \quad f_e = \frac{J_{e+\frac{1}{2}} - \eta J_{e-\frac{1}{2}}}{H_{e+\frac{1}{2}}^{(1)} - \eta H_{e-\frac{1}{2}}^{(1)}}.$$

Для каждого из рассмотренных условий непроницаемости сечения рассеяния равны

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{1+\eta^2} (|f_1|^2 + |f_2|^2 + |f_3|^2 + |f_4|^2).$$

Типичные условия зависимости показаны на рис. 9. Как и для рассея-

ния на цилиндре, констатируем прекрасное совпадение сечений рассеяния, отвечающих различным релятивистским условиям непроницаемости. При этом амплитуды рассеяния (3.19) и (3.21) имеют существенно разную функциональную форму.

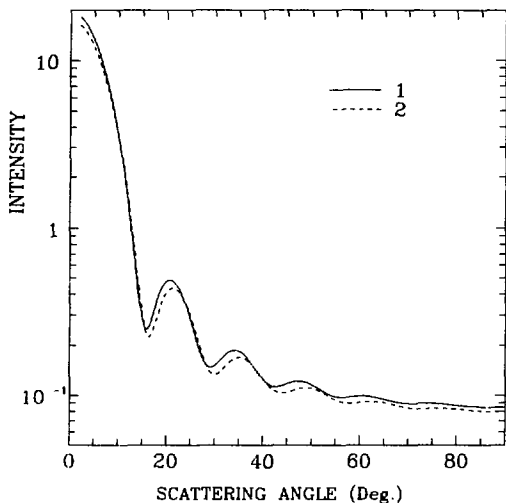


Рис. 9. Релятивистские сечения рассеяния электронов на непроницаемой сфере радиуса R_0 . Кривая 1 соответствует исчезновению при $r = R_0$ больших компонент дираковской волновой функции, кривая 2 условию непроницаемости (3.20). Кинетическая энергия электронов 150 кэВ, параметр $\kappa R_0 = 10$.

4. Обсуждение

Мы уже знаем, что существует бесконечно много теоретических возможностей воспрепятствовать проникновению падающих частиц в запрещенную область. Это плохо. К счастью, только некоторые из них можно сравнительно легко реализовать в реальных условиях. Наиболее простым выглядит условие $\Psi = 0$ на границе недоступной области. В этом случае нормальная компонента тока вероятности (см. п.2) исчезает на этой границе при любом значении в.п. \vec{A} . Для реализации этого граничного условия необходимо создать в запрещенной области, где $\vec{H} \neq 0$, достаточно сильное отталкивание. В качестве иллюстрации осложнений, возникающих при ином выборе условий непроницаемости, рассмотрим, как можно было бы проверить отсутствие АВ эффекта в односвязных (в физическом смысле) областях пространства. Для этого мы могли бы рассмотреть дифракцию заряженных частиц на непроницаемой сфере при наличии и отсутствии тороидального соленоида внутри нее. Пусть в отсутствие магнитного поля условие непроницаемости выбрано в виде $\partial\psi/\partial r = 0$ при $r = R_0$. Поместим внутрь S тороидальный

соленоид T . Поскольку вне S радиальная компонента в.п. не равна нулю, то сейчас уже нельзя с помощью того же самого граничного условия ($\partial\psi_0/\partial z = 0$ при $z = R_0$) обратить нормальную компоненту j_z (см. 2.16) в нуль на поверхности S . Если бы это условие тем не менее было наложено, то с необходимостью должен был бы произойти сдвиг дифракционной картины (из-за проникновения заряженных частиц внутрь сферы S , где помещен тороидальный соленоид). Согласно (П15) граничное условие (при котором $j_z = 0$ при $z = R_0$) имеет вид

$$\psi|_{z=R_0} = \psi_0 \cdot \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)|_{z=R_0},$$

где функция α определена соотношением (П12), а ψ_0 - решение свободного уравнения Шредингера с граничным условием $\partial\psi_0/\partial z = 0$ при $z = R_0$. Неясно, как это довольно сложное граничное условие можно реализовать экспериментально.

Подведем итоги. Граничное условие $\psi = 0$ на границе запрещенной области является наиболее универсальным и не ведет к экспериментальным осложнениям. В связи с этим результаты работ /17, 18/, в которых изучалось рассеяние электронов на непроницаемом тороидальном соленоиде (при условии непроницаемости $\psi = 0$ на границе соленоида), могут быть полезны при интерпретации экспериментальных данных /15/.

Приложение

I. Авторы работы /7/ рассматривают тороидальную полость T : $a_1 < \rho < a_2$, $|z| < b_1$, внутри которой магнитное поле H отлично от нуля

$$H_\rho = H_z = 0, \quad H_\varphi = \frac{\Phi}{2b_1(a_2 - a_1)} \quad (\text{П1})$$

(Φ - магнитный поток).

Вне T магнитное поле равно нулю. Далее, авторы /7/ приводят два в.п., дающих одно и то же магнитное поле H . Они равны нулю при $|z| > b_1$. При $|z| < b_1$ они определены следующими выражениями:

$$A_z^{(1)} = \begin{cases} \frac{\Phi}{2b_1} & \text{при } \rho < a_1, \\ \Phi \frac{1}{2b_1} \frac{a_2 - \rho}{a_2 - a_1} & \text{при } a_1 < \rho < a_2, \\ 0 & \text{при } \rho > a_2 \end{cases} \quad (\text{П2})$$

$$A_z^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho < a_1, \\ -\frac{\Phi}{2b_1} \frac{\rho - a_1}{a_2 - a_1}, & \text{при } a_1 < \rho < a_2, \\ -\frac{\Phi}{2b_1} & \text{при } \rho > a_2. \end{cases} \quad (\text{ПЗ})$$

Пусть теперь заряженная частица заключена в цилиндрической полости $C: |z| < b$ ($b < b_1$), $\rho < a$ ($a < a_1$). Наложим на в.ф. Ψ по радиальной переменной условие Дирихле ($\Psi = 0$ при $\rho = a$), а по переменной z - условие периодичности

$$\Psi(z=b) = \Psi(z=-b). \quad (\text{П4})$$

Решениями уравнения Шредингера (У.Ш.)

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{ie}{\hbar c} A_z^{(1,2)} \right)^2 \Psi \right] = E \Psi \quad (\text{П5})$$

внутри C с выбранными граничными условиями являются следующие в.ф.:

$$\Psi_{n,s,m}^{(1,2)} \sim \exp\left(\frac{in\pi z}{b}\right) \exp(im\varphi) J_m(\lambda_{ms} \frac{\rho}{R}). \quad (\text{П6})$$

Здесь λ_{ms} - s -й ненулевой корень функции Бесселя. Этим в.ф. отвечаю собственные значения

$$E_{nms}^{(1)} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\lambda_{ms}^2}{R^2} + \left(\frac{n\pi}{b} - \frac{e\Phi}{\hbar c} \frac{1}{2b_1} \right)^2 \right], \quad (\text{П7})$$

$$E_{nm}^{(2)} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\lambda_{ms}^2}{R^2} + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right].$$

Очевидно, $E_{nms}^{(1)} \neq E_{nms}^{(2)}$, то есть собственные значения в одно-связной области (где $H=0$) зависят от частного выбора в.п. Это выглядит странным, поскольку У.Ш. (П5) инвариантно относительно калибровочного преобразования

$$\vec{A}^{(1)} = \vec{A}^{(2)} + \text{grad} \chi, \quad \Psi_1 = \tilde{\Psi}_2 \exp\left(\frac{ie\chi}{\hbar c}\right) \quad (\text{П8})$$

(функция χ равна: $\Phi z / 2b_1$ при $|z| < b_1$, $\Phi / 2$ при $z > b_1$ и $-\Phi / 2$ при $z < -b_1$). Пусть Ψ_1 по-преж-

нему удовлетворяет условию периодичности (П4). Тогда из (П8) следует, что $\tilde{\Psi}_2$ этому условию не удовлетворяет:

$$\tilde{\Psi}_2(z=-b) = \tilde{\Psi}_2(z=b) \cdot \exp\left(\frac{ie\Phi}{\hbar c}\right) \neq \tilde{\Psi}_2(z=b).$$

Становится понятной причина отличия собственных значений (П7): отвечающие им в.ф. Ψ_1 и Ψ_2 не связаны калибровочным преобразованием. Или иначе: условие периодичности (П4) не является калибровочно-инвариантным. В калибровочно-инвариантной теории граничные условия также должны быть инвариантными.

2. Возвращаясь к п. 2.3, заметим, что вне тороидального соленоида в.п. может быть представлен в виде градиента некоторой функции χ . Эта функция неоднозначна (точнее, разрывна), поскольку $\oint A_{\phi} dl \neq 0$ для замкнутого пути, проходящего через отверстие соленоида. Именно для тороидального соленоида $(\rho-d)^2 + z^2 = R^2$ χ меняется скачком от $\frac{1}{2}\Phi$ до $-\frac{1}{2}\Phi$ при пересечении круга радиуса $d-R$, лежащего в плоскости $z=0$. В явном виде функция χ приведена в работе [8]. С помощью унитарного преобразования

$$\Psi = \Psi' \exp\left(\frac{ie\chi}{\hbar c}\right), \quad \vec{A} = \vec{A}' + \text{grad} \chi \quad (П9)$$

в.п. вне соленоида можно обратить в нуль. Поскольку Ψ' предполагается однозначной в.ф., то Ψ - многозначная в.ф., испытывающая скачок в том же месте, что и χ :

$$\Psi'(\rho \leq d-R, z=0-) = \exp\left(-\frac{ie\Phi}{\hbar c}\right) \cdot \Psi'(\rho \leq d-R, z=0+). \quad (П10)$$

Хотя (П9) не является истинно калибровочным преобразованием (оно меняет магнитное поле H внутри соленоида, см., например, [9]), тем не менее оно унитарно. Поэтому все наблюдаемые для в.ф. Ψ и Ψ' - одинаковы. Возвратимся к тороидальному соленоиду, заключенному внутри непроницаемой сферы S . После применения преобразования (П9) условие непроницаемости (2.16) переходит в (2.10). Найдя решение свободного уравнения Шредингера для какой-то частной реализации (2.10), можно с помощью обратного преобразования вернуться к (2.16). Однако найти неоднозначное решение свободного уравнения Шредингера отнюдь не легче, чем отыскать однозначное решение исходного неурезанного уравнения. Ситуация существенно меняется, если $\Psi = \Psi' = 0$ в месте разрывности χ функции (это случится, например, при наличии внутри сферы S бесконечного оттадживания). При этом условии разрывности (П10) становится тривиальным ($0=0$), а (П9) представляется собой унитарное преобразование между однозначными волновыми функциями при $\vec{A} = 0$ и $\vec{A} \neq 0$. В этом случае

отличие в.п. от нуля вне сферы \mathcal{S} не приводит к наблюдаемым эффектам. Из условия (2.16) отсюда не следует, что $\psi = 0$ внутри сферы, поэтому преобразование (19), меняющее магнитное поле, бесполезно.

3. Существует, однако, в.п. \vec{A}' /8,9/, отличный от нуля только в непосредственной близости тороидального соленоида и дающий то же магнитное поле, что и в.п. \vec{A} . Этот в.п. имеет только одну неисчезающую компоненту A'_z , равную $g \ln \frac{d + \sqrt{R^2 - z^2}}{\rho}$ внутри соленоида (рис.10). Вне соленоида она отлична от нуля только в области $|z| \leq R$, $0 \leq \rho \leq d - \sqrt{R^2 - z^2}$ (заштрихована на рис.10), где она равна $g \ln \frac{d + \sqrt{R^2 - z^2}}{d - \sqrt{R^2 - z^2}}$. Для бесконечного цилиндрического соленоида существует в.п., аналогичный \vec{A}' /8,9/. Его свойства детально обсуждаются в работе /10/. Получим калибровочное преобразование, связывающее \vec{A} и \vec{A}' для бесконечно тонкого тороидального соленоида. В этом случае вне соленоида /II/: $A'_z = \Phi \delta(\rho) \Theta(d - \rho)$. С другой стороны, декартовы компоненты в.п. \vec{A} можно представить в виде /8,11/:

$$A_x = \frac{\partial^2 d}{\partial x \partial z}, \quad A_y = \frac{\partial^2 d}{\partial y \partial z}, \quad A_z = -\frac{\partial^2 d}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 d}{\partial y^2}. \quad (III)$$

Здесь d следующая функция:

$$d = \frac{\Phi}{4\pi} \iint \frac{dx_1 dy_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \quad (III2)$$

(интегрирование ведется по внутренности круга радиуса $d - R$, лежащего в плоскости $z_1 = 0$). Последнее из соотношений (II) можно переписать в следующем виде: $A_z = \frac{\partial^2 d}{\partial z^2} - \Delta d$. Учитывая, что $\Delta |\vec{r} - \vec{r}_1|^{-1} = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_1)$, получаем $\Delta d = -\Phi \delta(\rho) \Theta(d - \rho)$. Таким образом,

$$\vec{A} = \vec{A}' + g \text{grad} \frac{\partial d}{\partial z}, \quad \psi' = \psi \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \frac{\partial d}{\partial z}\right). \quad (III3)$$

Сейчас нам понадобятся свойства функции d .

4. Двойной интеграл в определении функции d может быть следующим образом выражен через однократные /8,12/:

$$\begin{aligned} \iint_{|\rho_1| \leq d, z_1 = 0} \frac{d\rho_1 d\tau_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{\rho}} \int_0^d dx \sqrt{x} \cdot Q_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z^2 + x^2}{2\rho x}\right) = \end{aligned}$$

$$= 2\pi(\sqrt{z^2+d^2}-|z|) - 2\sqrt{d} \int_0^{\rho} \frac{dx}{\sqrt{x}} Q_{\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho^2+d^2+x^2}{2dx} \right). \quad (\text{П14})$$

Из второй строки этого выражения следует, что при $\rho > d$ аргумент $y (= \frac{\rho^2+z^2+x^2}{2dx})$ функции $Q_{\frac{1}{2}}$ больше 1 при всех значениях x в интервале $0 \leq x \leq d$. Это означает, что функция α и все ее производные являются непрерывными функциями z при $\rho > d$ (поскольку разрез функций Лежандра совпадает с интервалом $(-1, 1)$). При $\rho < d$ y достигает значения 1 при $z=0$, $x=\rho$. В этом случае α и ее производные могут обладать особенностями. Это показывает третья строка соотношения (П14). Аргумент $\frac{z^2+x^2+d^2}{2dx}$ функции $Q_{\frac{1}{2}}$ всегда больше 1 при $\rho < d$. Это означает, что при $\rho < d$ все сингулярности функции α обязаны первому слагаемому этой строки:

$$\frac{\Phi}{2} (\sqrt{z^2+d^2} - |z|).$$

Первая производная от этого выражения по z имеет (при $z=0$) скачок, равный $-\Phi$, тогда как вторая производная имеет δ -образную особенность: $-\Phi \delta(z)$. Мы уже знаем, что при $\rho > d$ функция и ее производные особенностей не имеют. Это означает, что при $\rho > d$ сингулярности 1-го и 2-го слагаемых третьей строки (П14) взаимно погашаются.

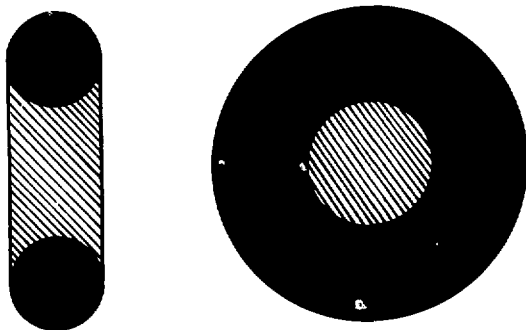


Рис. 10. Вектор-потенциал тороидального соленоида в некулоновской калибровке. Вне соленоида в.п. отличен от нуля только в заштрихованной области.

5. Отсюда следует, что калибровочное преобразование (П13) сингулярно. Его сингулярности лежат в экваториальной плоскости тороидального соленоида ($\rho \leq a, z=0$), то есть внутри сферы S . Поскольку это калибровочное преобразование устраняет в.п. вне S , то Ψ' удовлетворяет условию непроницаемости (2.10):

$$\bar{\Psi}' \frac{\partial \Psi'}{\partial z} - \Psi' \frac{\partial \bar{\Psi}'}{\partial z} = 0 \quad \text{при } r = R_0$$

и потому совпадает с в.ф. в. ср. Ψ_0 , определенной соотношением (2.14). После этого с помощью соотношения, обратного (П13), можно снова вернуться к Ψ :

$$\Psi = \Psi_0 \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \frac{\partial d}{\partial z}\right). \quad (\text{П15})$$

Поскольку при $r \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial d}{\partial z} \approx -\frac{\Phi d^2}{4r^2} \cos \theta,$$

то калибровочное преобразование (П15) не меняет асимптотику в.ф. Мы заключаем: условие непроницаемости (2.16) обеспечивает отсутствие наблюдаемых эффектов, связанных с отличием от нуля в.п. вне сферы S .

Пусть теперь на поверхности сферы S задано граничное условие

$$\Psi(r=R_0) = f_0(\theta, \varphi) \quad (\text{П16})$$

(f_0 - произвольная функция углов θ, φ).

Задача рассеяния с граничным условием (П16) - вполне корректна. Область пространства, лежащая вне сферы S - односвязна. Поместим теперь внутрь S тороидальный соленоид. В результате вне S возникает отличный от нуля в.п. \vec{A} . Решая уравнение Шредингера в односвязном пространстве вне сферы S для $\vec{A}=0$ и $\vec{A} \neq 0$ при одном и том же граничном условии (П16), мы получаем физически неэквивалентные результаты. В самом деле, с помощью калибровочного преобразования (П13) мы можем уравнение Шредингера с $\vec{A} \neq 0$ и граничным условием (П16) привести к свободному уравнению Шредингера с граничным условием

$$\Psi(r=R_0) = \tilde{f}_0 = f_0 \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \frac{\partial d}{\partial z}\right) \Big|_{r=R_0} \neq f_0(\theta, \varphi). \quad (\text{П17})$$

Поскольку решения свободного уравнения Шредингера с граничными условиями (П16) и (П17) неэквивалентны, то при одном и том же граничном условии (П16) физически неэквивалентны ситуации, отвечающие наличию

и отсутствию соленоида внутри сферы S . Эта неэквивалентность исчезает, если на поверхности сферы S наложено калибровочно-инвариантное условие. Так как квантово-механический ток вероятности является калибровочно-инвариантной величиной, то условие обращения в нуль на поверхности S его нормальной компоненты является калибровочно-инвариантным граничным условием. Мы заключаем: математической односвязности области, в которой $H=0$, еще недостаточно для отсутствия в ней наблюдаемых эффектов, связанных с отл-тием от нуля в.п. \vec{A} . Эти эффекты исчезают после наложения на границе односвязной области калибровочно-инвариантного условия (например, условия непроницаемости). Осложнения на этом не кончатся. Дело в том, что на поверхности сферы S мы должны задать не просто условия непроницаемости (2.10) или (2.16), а некоторые их конкретные реализации. Эти реализации, будучи связанными калибровочными преобразованиями типа (III5), находятся в однозначном соответствии друг с другом. Если бы при $H=0$ мы наложили одно из граничных условий из класса (2.10), а при $H \neq 0$ - произвольное граничное условие типа (2.16), то мы могли бы, в принципе, обнаружить (например, с помощью рассеяния заряженных частиц) отличие соответствующих им физических ситуаций. Единственное исключение составляет граничное условие $\Psi=0$ при $r=R_0$ (при этом граничное условие (2.16) выполнено при любом значении в.п. \vec{A}).

Литература

1. Aharonov Y., Bohm D., Phys. Rev., 1959, II5, 485.
2. Takabayasi T., Nadr. J. Suppl., 1985, I, 219.
3. Levy-Leblond J.-M., Phys. Lett., 1987, A 125, 441.
4. Razavy N., Phys. Rev., 1989, A40, I.
5. Afanasiev G.N., J. Comput. Phys., 1987, 69, 196.
6. Olariu S., Popescu I.I., Rev. Mod. Phys., 1985, 57, 339;
Horvathy P.A., Morandi G., Sudarshan E.C.G., Nuovo Cimento, 1989, DII, 201; Peshkin M., Physica, 1988, B C, 151, 384;
Ohnuki Y. in Proc. 2nd Int. Symp. Foundations of Quantum Mechanics eds. Namiki M. et al. (Tokyo; Japan Phys. Soc., 1987).
7. Roy S.M., Singh V., J. Phys., 1989, A22, L425.
8. Афанасьев Г.Н. ЭЧАЯ, 1990, т. 21, в.1, с. 172.
9. Afanasiev G.N., J. Phys., 1988, A21, 2095.
10. Ellis J.R., J. Phys., 1990, A23, 65.

11. Любошиц В.Л., Смородинский Я.А., ЖЭТФ, 1978, 75, 40.
12. Afanasiev G.N., J.Comput. Phys., 1989, 85, 245.
13. Bose S.K., Indian J. Phys., 1987, B61, 274.
14. Percoco U., Villalba V.M., Phys. Lett., 1989, A140, 105.
15. Peshkin M., Tonomura A. The Aharonov - Bohm effect, Springer, Berlin e.a., 1989, Tonomura A., Int. J. Mod. Phys., 1989, B3, 521.
16. Thomas A.W. in: Adv. in Nucl. Phys., v. 13 (eds Negele A.W., Vogt E), 1984, p. 1-137 (New York, Plenum).
17. Afanasiev G.N., Shilov V.M., J.Phys. 1989, A22, 5195.
18. Afanasiev G.N., Phys. Lett., 1989, A142, 222.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 марта 1990 года.