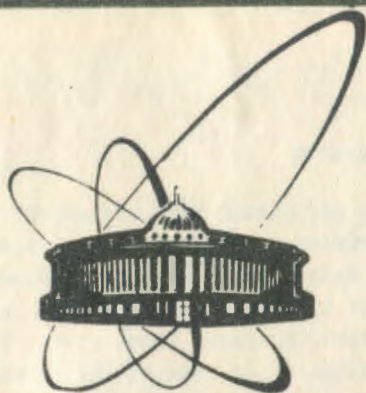


90-143



объединенный  
институт  
ядерных  
исследований  
дубна

Б 795

Р4-90-143

Ю.Л.Болотин\*, С.И.Виницкий, В.Ю.Гончар\*,  
Б.Л.Марковски, В.Н.Тарасов, Н.А.Чеканов\*

КВАНТОВЫЕ ПРОЯВЛЕНИЯ  
КЛАССИЧЕСКОЙ СТОХАСТИЧНОСТИ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

\*Харьковский физико-технический институт АН УССР

1990

## Введение

Осознание того факта, что классическая динамика связанных гамильтоновых систем может быть хаотической, привело к постановке фундаментальной проблемы о соответствии между классической и квантовой динамиками. Суть проблемы состоит в том, что, с одной стороны, энергетический спектр любой квантовой системы, совершающей финитное движение, является дискретным, а, с другой стороны, принцип соответствия требует возможности предельного перехода к классической механике, обладающей, кроме регулярных, и хаотическими режимами. Для стационарной квантовой механики ограниченная постановка задачи заключается в идентификации тех особенностей собственных состояний и спектра, которые можно трактовать как квантовые проявления классической стохастичности. Цель настоящей работы - проследить за изменением статистических свойств как квантового энергетического спектра, так и структуры стационарных волновых функций по мере перехода от энергий, соответствующих классическому регулярному движению, к энергиям, отвечающим глобальной стохастичности.

### I. Корреляции между статистическими свойствами энергетических спектров и характером классического движения

I. При исследовании корреляций между особенностями поведения квантовой системы (на уровне энергетических спектров) и характером ее динамики в классическом пределе мы вынуждены перейти от глобальных характеристик (типа числа состояний  $N(E)$ , сглаженной плотности уровней  $\rho(E)$  и т.д.) к локальным характеристикам (типа функции распределения расстояний между ближайшими уровнями, спектральной жесткости и т.д.), описывающим отклонение от средних значений. Действительно, асимптотические решения квантовых уравнений движения для больших квантовых чисел непосредственно связаны с решениями классических уравнений движения, генерируемых тем же самым гамильтонианом. Качественные свойства классических траекторий существенно зависят от потенциала, а для системы типа бильярда - от структуры границы. Достаточно, например, в квадрате слегка изогнуть одну из его стенок, так, чтобы она стала рассеивающей, как классические траектории в таком бильярде станут стохастическими. При этом число состояний изменится незначительно или вовсе не изменится <sup>/I/</sup>. Как мы увидим ниже,

квантовые локальные характеристики при этом претерпевают существенную перестройку.

Попробуем, опираясь на некоторые простые соображения /2/, построить одну из важнейших локальных характеристик квантового спектра - "типичную" функцию распределения расстояний между соседними уровнями  $\rho(s)$ . Для случайной последовательности вероятность нахождения уровня в малом интервале  $(E+s, E+s+\Delta s)$ , конечно, пропорциональна  $\Delta s$ , но она не зависит от того, имеется ли уровень при энергии  $E$ . Ситуация меняется, если между положением уровней имеется корреляция. Вероятность  $\rho(s)\Delta s$  нахождения уровня в интересующем нас интервале есть произведение двух факторов: вероятности наличия уровня в интервале  $\Delta s$  и вероятности его отсутствия в интервале  $s$ :

$$\rho(s)\Delta s = W(1 \in \Delta s | \emptyset \in s) W(\emptyset \in s). \quad (1)$$

Второй фактор легко выражается через функцию распределения

$$W(\emptyset \in s) = \int_s^{\infty} \rho(s') ds', \quad (2)$$

в то время как первый фактор

$$W(1 \in \Delta s) = f(s)\Delta s, \quad (3)$$

где неизвестная функция  $f(s)$  описывает корреляции между соседними уровнями. Для функции распределения  $\rho(s)$  получаем интегральное уравнение

$$\rho(s) = f(s) \int_s^{\infty} \rho(s') ds', \quad (4)$$

решение которого

$$\rho(s) = c f(s) \exp \left\{ - \int_0^s f(s') ds' \right\}. \quad (5)$$

При отсутствии корреляций между уровнями  $f(s) = \text{const} = 1/D$  ( $D$  - среднее расстояние между уровнями) приходим к распределению Пуассона

$$\rho(s) = \frac{1}{D} \exp \left( - \frac{s}{D} \right). \quad (6)$$

В случае простейших корреляций - линейного расталкивания - приходим к распределению Вигнера

$$p(s) = \frac{\pi s}{2D^2} \exp\left(-\frac{\pi s^2}{4D^2}\right). \quad (7)$$

Произвольные константы определены из условий

$$\int p(s) ds = 1, \quad \int s p(s) ds = D. \quad (8)$$

Очевидным следствием заложенных нами корреляций типа линейного расталкивания является поведение распределения Вигнера при малых расстояниях между уровнями

$$\lim_{s \rightarrow 0} p(s) = 0. \quad (9)$$

Для случайной же последовательности характерен эффект кластеризации уровней - преобладание малых расстояний между ними.

2. Подчеркнем, что только вероятностные аргументы, игнорирующие специфику гамильтониана рассматриваемой системы, не могут объяснить природу, происхождение и следствия феномена расталкивания уровней, моделируемого функцией  $f(s)$ . Однако ситуация меняется, если предположить, что статистические свойства последовательности уровней реальной физической системы эквивалентны статистическим свойствам последовательности собственных значений ансамбля случайных матриц определенной симметрии, например, ансамбля матриц, элементы которых распределены по Гауссу:

$$p(H_{ij}) = A \exp\left[-\frac{1}{4a^2} \left(\sum_i H_{ii}^2 + 2 \sum_{i < j} H_{ij}^2\right)\right], \quad (10)$$

где  $H_{ij}$  - матричные элементы гамильтониана,  $a$  и  $A$  - постоянные. Теория, основанная на этой гипотезе, была завершена в 60-е годы /3/. Окончательный результат для функции распределения расстояний между соседними уровнями, полученный в этой теории, имеет вид

$$p(s) \sim s^\alpha \exp(-\beta s^2). \quad (11)$$

Критический показатель  $\alpha$ , определяющий поведение функции распределения при  $s \rightarrow 0$ , зависит от симметрии ансамбля матриц. Симметрия ансамбля случайных матриц определяется свойствами физической системы, статистику спектра которой мы хотим воспроизвести с помощью этого ансамбля. Если система инвариантна относительно обращения времени, то соответствующий ансамбль является гауссовым ортогональным ансамблем

(ГОА). Системе, допускающей нарушение инвариантности относительно обращения времени, сопоставляется гауссов унитарный ансамбль. Наконец, гамильтониану более сложной структуры  $H = H_0 + \sum_k \tau_k \epsilon_k$ , где  $H_0^* = H_0^T$ ,  $h_k = h_k^* = -h_k^T$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $\tau_k$  - матрицы Паули, соответствует гауссов симплектический ансамбль. Критический показатель  $\alpha$  в формуле (II) равен:  $\alpha = 1$  для ортогональных ансамблей,  $\alpha = 2$  для унитарных ансамблей и  $\alpha = 4$  для симплектических ансамблей.

Остановимся кратко на некоторых аргументах, поясняющих феномен расталкивания уровней. Рассмотрим <sup>/2/</sup> гамильтониан, определенный в некотором фиксированном базисе с помощью своих матричных элементов. (Оператор  $H$  можно рассматривать как вектор в этом пространстве.) Расталкивание уровней можно считать обязанным тому факту, что подмножество матричных элементов, для которого соответствующий спектр является вырожденным, имеет меньшую размерность, чем общее пространство матричных элементов, поэтому вырождение, или более слабый эффект - кластеризация, маловероятны. Альтернативное пояснение <sup>/4/</sup> заключается в том, что если гамильтониан зависит от некоторого набора параметров, то пересечения уровней можно добиться лишь в случае существования двух независимых параметров. В однопараметрическом случае можно показать неизбежность возникновения отталкивания на малых расстояниях между уровнями.

Предсказания статистической теории уровней (главным образом предсказания для ГОА матриц) были детально сравнены со всем доступным множеством ядерных данных <sup>/2,3/</sup>. Никаких существенных расхождений между теорией и экспериментом обнаружено не было. В частности, ансамбли случайных матриц прекрасно воспроизводят свойство спектральной жесткости ядерных спектров: малые флуктуации вокруг средних значений числа уровней на интервале заданной длины. Аналогичные сравнения были выполнены и для атомных спектров <sup>/5/</sup>. И здесь было обнаружено хорошее согласие с предсказаниями ГОА, хотя количество обработанных данных существенно меньше, чем в ядерной спектроскопии.

3. Если для сложных систем (атомное ядро, многоэлектронный атом) можно привести серьезные аргументы в пользу гипотезы эквивалентности статистических свойств спектра реальной физической системы и последовательности собственных значений ансамбля случайных матриц, то ее обобщение на случай систем с небольшим числом степеней свободы не кажется естественным.

Достаточно универсальный подход к проблеме статистических свойств энергетических спектров может быть разработан на основе нелинейной теории динамических систем <sup>/6-8/</sup>. Как показывают численные расчеты <sup>/9-14/</sup>, подкрепленные серьезными теоретическими соображениями <sup>/15-17/</sup>,

главной универсальной особенностью квантовых энергетических спектров систем, хаотических в классическом пределе, является феномен расталкивания уровней, в то время как для систем, чья динамика в классическом пределе регулярна, характерна кластеризация уровней. Это утверждение иногда называют гипотезой об универсальном характере флуктуаций энергетических спектров.

Среди систем, чьи спектры были подвергнуты детальному численному анализу, центральное место занимают двумерные бильярды. Двумерный бильярд - свободная частица, двигающаяся по плоскости внутри некоторой области произвольной формы и испытывающая на границе упругое зеркальное отражение. Выбор в качестве объекта исследования двумерного бильярда удобен по нескольким причинам:

- 1) эта система имеет наименьшее число степеней свободы, при которых в консервативной системе возможно хаотическое движение;
- 2) классическая динамика двумерного бильярда хорошо изучена;
- 3) для бильярда существуют эффективные методы нахождения спектра /1/ (решение задачи Дирихле известно для границ разной формы);
- 4) бесконечное число собственных значений в дискретном спектре обеспечивает статистическую достоверность результатов.

Для бильярдов с определенной формой границы может быть реализована одна из двух экстремальных ситуаций: интегрируемая или неинтегрируемая. Так, в круговом бильярде (рис.1а) угловой момент является вторым (помимо энергии) интегралом движения и такая система является интегрируемой. Бильярд типа "стадион" (рис.1б) - простейшая динамическая стохастическая система. На рис.1 представлены статистические характеристики (функция распределения расстояний между соседними уровнями и дисперсия) этих двух систем в полном соответствии с гипотезой об универсальных флуктуациях энергетических спектров функция распределения для интегрируемой системы - кругового бильярда - прекрасно аппроксимируется пуассоновским распределением, а дисперсия является линейной функцией длины рассматриваемого энергетического интервала. В неинтегрируемом случае наблюдается эффект расталкивания уровней и медленный рост дисперсии, обусловленный жесткостью соответствующего спектра. Все статистические характеристики спектра в этом случае практически совпадают с характеристиками ГОА случайных матриц.

В отличие от бильярдov, где характер движения не зависит от энергии, гамильтоновы системы общего вида являются системами с разделяющимися фазовыми пространствами, которые содержат как области, в которых движение стохастично, так и островки устойчивости. Как это обстоятельство отражается на статистических свойствах спектра? Берри и Робник /18/ и независимо Богомольный /19/, базировавшись на квазиклассических аргументах, показали, что распределение расстояний между

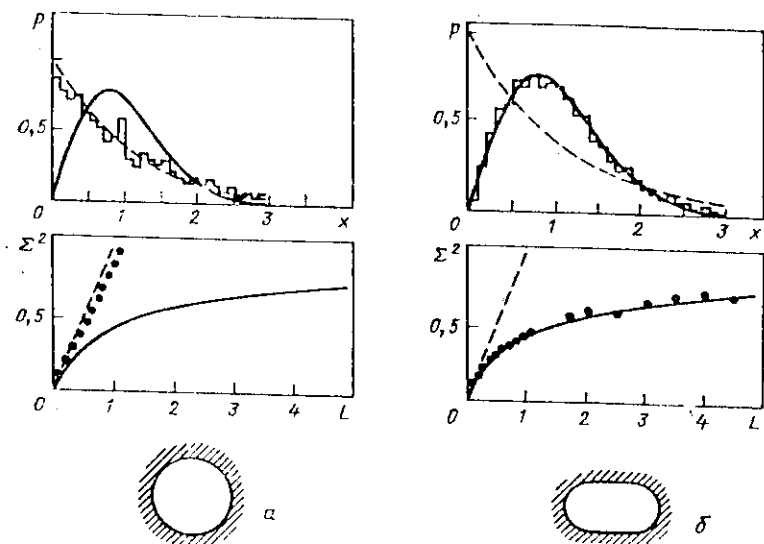


Рис. 1. — Статистические характеристики энергетических спектров ( $p(x)$  — функция распределения расстояний между соседними уровнями,  $\Sigma^2$  — дисперсия) для кругового бильярда (а) и бильярда типа "стадион" (б). Сплошная линия соответствует распределению Вигнера, штриховая — распределению Пуассона. Здесь и ниже  $x = \frac{s}{D}$ .

соседними уровнями представляет для такой системы независимую суперпозицию пуассоновского распределения с относительным весом  $\mu$ , определяемым долей фазового пространства с регулярным движением, и распределением Вигнера с относительным весом  $\bar{\mu}$  ( $\mu + \bar{\mu} = 1$ ), определяемым долей фазового пространства с хаотическим движением,

$$p(x) = \mu^2 \exp(-\mu x) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \bar{\mu} x\right) + \left(2\mu\bar{\mu} + \frac{\pi}{2} \bar{\mu}^3 x\right) \exp\left(-\mu x - \frac{\pi}{4} \bar{\mu}^2 x^2\right), \quad x = \frac{s}{D}. \quad (12)$$

## II. Статистические свойства спектров $C_{3c}$ и $C_{4c}$ инвариантных гамильтонианов

I. Для того, чтобы проследить за корреляциями между статистическими свойствами квантового спектра и характером классического движения, обратимся к гамильтониану, описывающему в классическом пределе динамику взаимодействующих полей Янга-Миллса [20]:

$$H = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + b x^4 y^2 + c(x^2 + y^2)^2. \quad (I3)$$

Рассматриваемый гамильтониан, как легко видеть, инвариантен относительно восьми преобразований:  $(x, y) \rightarrow (\pm x, \pm y)$ ,  $(x, y) \rightarrow (\pm y, \pm x)$ , образующих дискретную группу  $C_{4v}$ . Отметим также, что этот гамильтониан является наиболее общим в классе полиномиальных потенциалов степени не выше четвертой, обладающих  $C_{4v}$  симметрией. Действительно, можно показать [21], что потенциальная часть произвольного  $C_{4v}$  инвариантного гамильтониана может быть построена с помощью двух комбинаций  $x^2 + y^2$  и  $x^2 y^2$ . Кроме того, гамильтониан (I3) не меняет своего функционального вида при повороте координатных осей на угол  $\pi/4$ . При этом параметры гамильтониана преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} b &\rightarrow -b, \\ c &\rightarrow c + b/4. \end{aligned} \quad (I4)$$

При  $c \geq 0$  и  $b + 4c \geq 0$  потенциальная функция имеет единственный экстремум - минимум в начале координат и движение при всех энергиях является финитным.

Для оценки критической энергии перехода к хаосу в потенциале с единственным минимумом удобно воспользоваться критерием отрицательной кривизны [22, 23]. Согласно последнему, переход от регулярного движения к хаотическому вызван возникновением локальной неустойчивости, связанной с попаданием частицы в область отрицательной кривизны поверхности потенциальной энергии. При этом критическая энергия определяется как минимальная энергия на линии нулевой гауссовой кривизны. Для поверхности потенциальной энергии гамильтониана (I3) уравнение линии нулевой кривизны имеет вид

$$1 + 2(b + 8c)/(x^2 + y^2) + 24c(b + 2c)(x^2 + y^2)^{-2} - 12b(b + 8c)x^2 y^2 = 0. \quad (I5)$$

Так как критические точки полинома четвертой степени, обладающего  $C_{4v}$  симметрией, могут лежать либо в начале координат, либо на прямой  $x = y$  (либо на прямых, получающихся из нее поворотом на  $\pi/4$ , с учетом преобразования параметров (I4)), то будем искать минимум потенциальной энергии на линии нулевой кривизны при условии  $x = y$ . Корни уравнения (I6) при этом условии равны



$$\chi_{1,2} = \sqrt{\frac{-1}{2(\ell-4c)}} \quad , \quad \chi_{3,4} = \sqrt{-\frac{1}{\epsilon(\ell+4c)}} \quad (16)$$

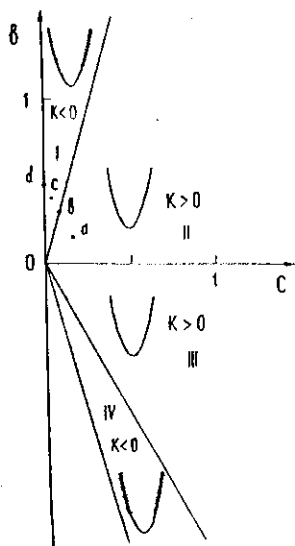
Как мы видим, в области финитного движения ( $\ell+4c > 0$ ) корни  $\chi_{3,4}$  не реализуются. Условие же существования корней  $\chi_{1,2}$

$$\ell - 4c > 0 \quad (17)$$

дает ограничение области параметров, при которых на поверхности потенциальной энергии имеется область отрицательной гауссовой кривизны. Значение потенциальной энергии в точке  $\chi_{1,2}$  согласно критерию отрицательной кривизны определяет критическую энергию перехода к хаосу, равную

$$E_{кр} = \frac{3\ell - 4c}{4(\ell - 4c)^2} \quad (18)$$

Рассмотрим теперь структуру пространства параметров  $(\ell, c)$  гамильтониана (13), изображенную на рис.2. Область финитного движения ограничена прямыми  $c=0$  и  $\ell+4c=0$ . В секторе I, ограниченном прямыми  $c=0$  и  $\ell-4c=0$ , при  $E > E_{кр}$  имеется возможность попадания в



**Рис.2.** Профили потенциальной функции  $U(x, y=c; \ell, c)$  в пространстве параметров  $\ell, c$ . Штрихами обозначены области отрицательной кривизны поверхности потенциальной энергии. Буквы  $a, \ell, c$  и  $d$  указывают точки в пространстве параметров ( $\ell=1/6, c=1/6$ ), ( $\ell=1/3, c=1/12$ ), ( $\ell=5/12, c=1/24$ ) и ( $\ell=1/2, c=0$ ), в которых производились численные расчеты сечений Пуанкаре и статистических характеристик спектров гамильтониана (13).

область отрицательной кривизны. Возникающая при этом локальная неустойчивость может породить хаотический режим движения. При повороте координатных осей на  $\pi/4$  прямые  $c=0$  и  $\psi-4c=0$  согласно (14) переходят соответственно в прямые  $\psi+4c=0$  и  $\psi+2c=0$ . Таким образом, область пространства параметров I эквивалентна области IV, а область II - области III (прямая  $\psi=0$  при преобразовании (14) не трансформируется). В секторе II, где кривизна поверхности потенциальной энергии заведомо неотрицательна, следует ожидать регулярный характер движения при любых энергиях.

Интересно отметить, что уравнения линий  $\psi-4c=0$  и  $\psi+2c=0$  являются условиями точной интегрируемости гамильтониана (13). Действительно, при условии  $\psi=-2c$  переменные разделяются в исходных координатах. А при условии  $\psi=4c$  тривиальная замена  $x=u+v, y=u-v$  также приводит к сепарабельному гамильтониану. Дополнительный интеграл движения в исходных переменных в этом случае

$$I = pxpy + xy + 4xy(x^2 + y^2). \quad (19)$$

Уравнение линии  $\psi=0$  является условием точной интегрируемости в полярных координатах. Очевидно, что в этом случае дополнительный интеграл движения - момент импульса. В терминах теории нелинейного резонанса <sup>/6-8/</sup> возможность перехода к хаосу в области  $\psi > 4c$  связывается с существованием сепаратрисы, проходящей через гиперболические точки. Рост стохастического слоя в окрестности сепаратрисы при  $E \gg E_{cr}$  (последняя может быть оценена, например, по критерию перекрытия нелинейных резонансов <sup>/24/</sup>) приводит к хаосу. В случае  $\psi < 4c$  все траектории замкнуты вокруг эллиптических точек, что подразумевает регулярный характер движения, подтверждаемый численными расчетами <sup>/25,26/</sup>. Таким образом, подход, основанный на теории нелинейного резонанса, и анализ геометрии поверхности потенциальной энергии приводят к согласованным результатам. Более того, критическая энергия, вычисленная по формуле (18), близка к вычисленной по критерию перекрытия резонансов при тех же значениях параметров.

Проведенные численные расчеты сечений Пуанкаре для двух наборов параметров из области I:

$$d) \quad \psi = \frac{1}{2}, \quad c = 0$$

$$c) \quad \psi = \frac{5}{12}, \quad c = \frac{1}{24}$$

и из области II

$$b) \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{1}{12}$$

$$a) \quad \beta = \frac{1}{6}, \quad c = 1/6$$

подтверждают выполненный выше анализ. При энергиях, существенно превышающих критическую, в области I вид сечений Пуанкаре (рис.3, позиции Ic и Id) свидетельствует о жонглическом движении, в то время как в области II (рис.3, позиции Ia и Ib) движение остается регулярным.

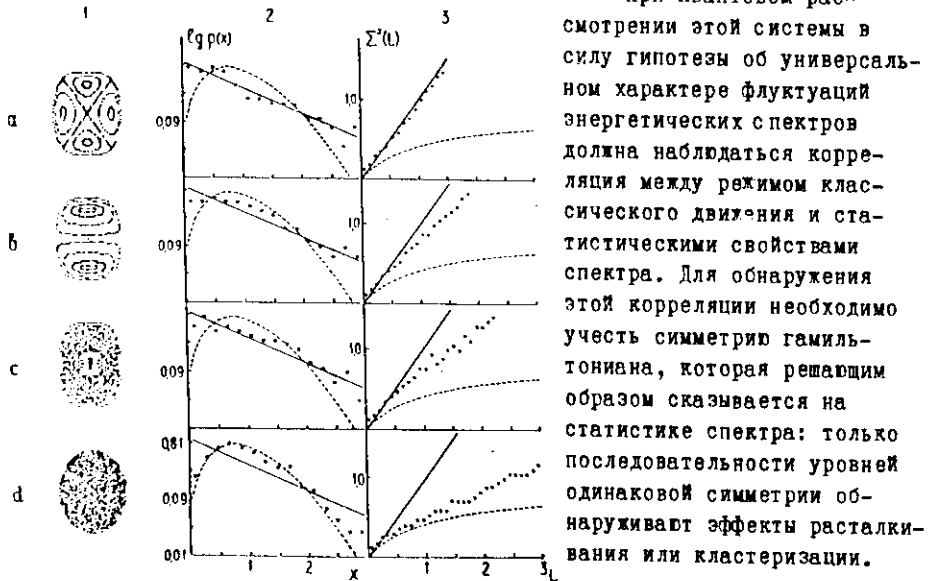


Рис.3. Сечения Пуанкаре (колонка 1) для классического гамильтониана (I3); логарифмы функций распределения расстояний между соседними уровнями (колонка 2) с соответствующими дисперсиями (колонка 3) для квантового аналога гамильтониана (I3). Сплошные линии изображают логарифм функции распределения Пуассона и соответствующую дисперсию, штриховая - Вигнера. Численные расчеты проводились для параметров, которые одинаковы в каждой из строк a, b, c и d и соответствуют наборам параметров, отмеченных теми же буквами на рис.2.

Как уже отмечалось выше, гамильтониан (I3) обладает  $C_{7L}$  симметрией. Из теории дискретных групп известно, что группа  $C_{7L}$  имеет пять неприводимых представлений. В соответствии с этим полная матрица гамильтониана в подходящем базисе представима в виде пяти блоков, каждый из которых генерирует независимую последовательность энергетических уровней.

Базисные векторы  $|NLj\rangle$ , используемые в наших расчетах, выбирались в виде /27/

$$|NLj\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|NL\rangle + j|N, -L\rangle), \quad j = \pm 1, \quad (20)$$

где главное квантовое число  $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ , а орбитальное квантовое число  $L = N, N-2, \dots$  1 или 0. Векторы  $|NL\rangle$  образуют полный ортонормированный базис

$$|NL\rangle = \left[ \frac{(N+L)!}{2} \left( \frac{N-L}{2} \right)! \right]^{-\frac{1}{2}} Q_1^{\frac{N+L}{2}} Q_2^{\frac{N-L}{2}} |0\rangle, \quad (21)$$

где операторы  $Q_1$  и  $Q_2$  выражаются через операторы декартовых координат  $(x, y)$  и импульсов  $(p_x, p_y)$  следующим образом:

$$Q_1 = \frac{1}{2} (p_x - ip_y + ix + y),$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} (-p_x - ip_y - ix + y). \quad (22)$$

Вакуумное состояние  $|0\rangle$  удовлетворяет условиям

$$Q_1|0\rangle = Q_2|0\rangle = 0, \quad (23)$$

где

$$Q_1 = \frac{1}{2} (p_x + ip_y - ix + y),$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} (-p_x + ip_y + ix + y). \quad (24)$$

На рис. 4 представлена гистограмма расстояний между соседними

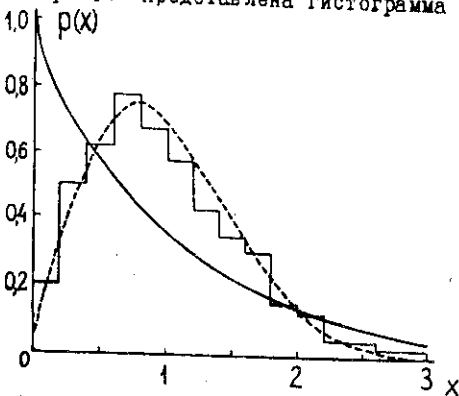


Рис. 4.  
Функция распределения расстояний между соседними уровнями гамильтониана (13) для параметров  $\beta = 1/2$ ,  $\epsilon = 0$ .

уровнями гамильтониана (13) при значениях параметров  $\xi = 1/2$ ,  $c=0$  (линии уровня и линии нулевой кривизны соответствующей поверхности потенциальной энергии изображены на рис.5).

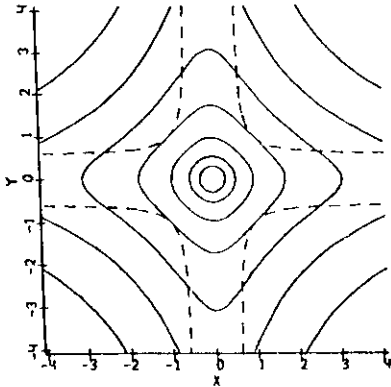


Рис.5. Изолинии поверхности потенциальной энергии при значениях параметров ( $\xi$ ,  $c$ ) из сектора I рис.2, штрихами показаны линии нулевой гауссовой кривизны.

Гистограмма получена путем усреднения гистограмм, соответствующих отдельным неприводимым представлениям группы  $C_{4v}$ . Уровни, включенные в гистограмму, взяты из энергетического интервала 40 - 145. При этих энергиях практически все классическое фазовое пространство отвечает хаотическому движению (см.рис.3, позиция I). Как видно, гистограмма хорошо согласуется с теоретическим предсказанием, т.е. с распределением Вигнера. На рис.3 (позиции 2 и 3) представлены логарифмы функций распределения и дисперсии для всех четырех рассматриваемых наборов параметров (логарифмический масштаб для функции распределения позволяет лучше проследить ее поведение при больших расстояниях между уровнями). Для всех четырех

рассматриваемых случаев в соответствии с гипотезой об универсальных флуктуациях энергетических спектров наблюдается четкая корреляция между характером классического движения, представленного сечением Пуанкаре для некоторой промежуточной из выбранного интервала энергии,

и статистическими свойствами спектра, характеризуемыми логарифмом функций распределения и дисперсией. Для регулярных движений функция распределения в логарифмическом масштабе хорошо аппроксимируется прямой линией (логарифмом распределения Пуассона). Отсутствие корреляции между уровнями в регулярном случае проявляется и в линейном росте дисперсии как функции длины рассматриваемого интервала  $L$ . Возникновение корреляций (расталкивания уровней) приводит в хаотическом случае к замедлению роста дисперсии до логарифмического (рис.3, позиция 3).

В заключение этого раздела заметим, что центр тяжести исследований детерминированного хаоса смещается от модельных к более реалистическим системам. Из физических систем квантовые проявления классической стохастичности наиболее подробно изучены для атома водорода в магнитном поле /28-30/. Интересно, что фазовая траектория электрона

атома водорода в магнитном поле идентична фазовым траекториям системы двух связанных осцилляторов с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + \lambda x^2 y^2 (x^2 + y^2), \quad (25)$$

который также обладает  $C_{4v}$  симметрией. Учет этой симметрии, как и в случае обобщенного гамильтониана Янга-Миллса, необходим при изучении статистических свойств энергетического спектра.

2. Интересующие нас корреляции могут быть прослежены и для более сложного перехода регулярность - хаос - регулярность, имеющего место для систем с локализованной областью неустойчивости <sup>/31,32/</sup>. Возникновение такого перехода можно пояснить с помощью уже использованного выше сценария стохастизации, связывающего переход к хаосу с попаданием частицы в область отрицательной кривизны поверхности потенциальной энергии. При низких энергиях движение вблизи минимума потенциала, где кривизна заведомо положительна, носит периодический или квазипериодический характер и отделено от области неустойчивости линией нулевой кривизны. При повышении энергии частица может попасть в область отрицательной кривизны, где первоначально близкие траектории экспоненциально разбегаются, что на больших временах приводит к такому движению, которое имитирует случайное и обычно называется стохастическим. Для потенциалов с локализованной областью отрицательной кривизны при высоких энергиях можно ожидать (как и подтверждается численными расчетами <sup>/31,32/</sup>) возврата к регулярному движению, причем критическая энергия этого нового перехода будет определяться верхней границей области отрицательной кривизны.

В качестве примера, реализующего переход регулярность - хаос - регулярность, рассмотрим гамильтониан <sup>/33,34/</sup>:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y; a, b, c)$$

$$V(x, y; a, b, c) = \frac{a}{2}(x^2 + y^2) + b(c^2 y - \frac{1}{3} y^3) + c(x^2 + y^2)^2. \quad (26)$$

Топология поверхности потенциальной энергии  $U(x, y; a, b, c)$  определяется параметром  $W = b^2/ac$ . При переходе через сепаратрису  $W=16$  меняется число и природа критических точек потенциальной поверхности. Область  $0 < W < 16$  включает потенциалы, обладающие единственным экстремумом - минимумом в начале координат. Анализ гауссовой кривизны лежащих в этой области потенциалов позволяет разделить ее на три подобласти. В первой  $0 < W < 4$  гауссова кривизна всюду положительна и согласно сценарию стохастизации, связывающему возникновение неустойчивости с попаданием в область отрицательной кривизны потенциальной поверхности, движение является регулярным. Для  $4 < W < 12$  область отрицательной кривизны локализована при  $y < 0$  в интервале

$$-\frac{1}{4} \frac{\epsilon}{c} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{W}}\right) < y < -\frac{1}{4} \frac{\epsilon}{c} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{W}}\right). \quad (27)$$

Для  $12 < W < 16$  появляется и вторая область отрицательной кривизны при  $y > 0$  в интервале

$$\frac{1}{12} \frac{\epsilon}{c} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{12}{W}}\right) < y < \frac{1}{12} \frac{\epsilon}{c} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{12}{W}}\right). \quad (28)$$

Энергии на линиях нулевой кривизны в сечении поверхности потенциальной энергии при  $x=0$  для значений  $4 < W < 16$  приведены на рис.6.

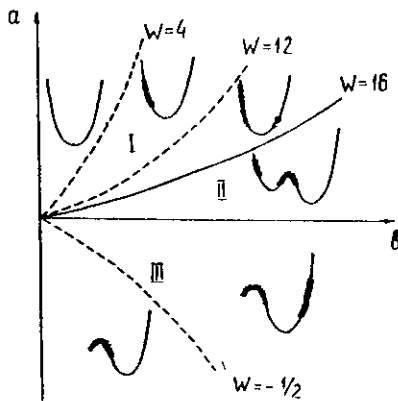


Рис.6. Профили потенциала (26)  $V(x=0, y)$  для наиболее характерных точек пространства параметров. Заштрихованы области отрицательной кривизны.

В области пространства параметров, отвечающей потенциалам с единственным экстремумом  $0 < W < 16$ , диагонализация гамильтониана (26) может быть эффективно осуществлена на уже использованном нами выше базисе волновых функций  $|N, L, j\rangle$ .  $C_{3L}$  симметрия гамильтониана приводит к тому, что матрица  $\langle N, L, j' | H | N, L, j \rangle$  имеет блочную структуру. Она состоит из двух матриц  $A_1$  и  $A_2$  типа  $(\text{Mod}(L, 3) = 0, j = \pm 1)$  и двух матриц  $E$  типа  $(\text{Mod}(L, 3) \neq 0, j = \pm 1)$ . Возможность независимой диагонализации каждой из этих матриц позволяет существенно улучшить статистику уровней.

Изменяя при фиксированном  $W$  параметры  $\epsilon$  и  $c$ , мы можем смещать область локализации отрицательной кривизны и тем самым варьировать критические энергии переходов регулярность - хаос - и хаос - регулярность. Это обстоятельство позволяет получать достаточно большие последовательности уровней в области энергий, соответствующих определенному типу классического движения: первая регулярная область  $E < E_{кр1}$ , хаотическая область  $E_{кр1} < E < E_{кр2}$  и вторая регулярная область  $E > E_{кр2}$ . На рис.7 представлены типичные сечения Пуанкаре для этих областей энергий и статистические характеристики спектра: логарифмы функции распределения и дисперсия. Для хаотической

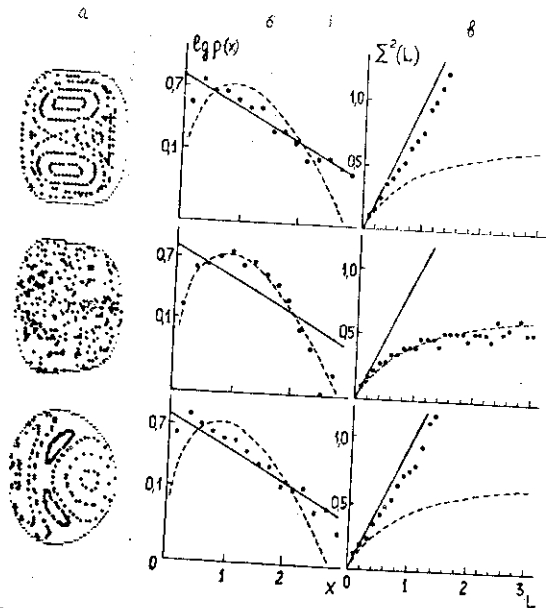


Рис. 7. Корреляция между характером классического движения и статистическими свойствами спектра в тройном переходе ( $R-S-R$ ) потенциала (26) для  $W = 13$ ; а - сечения Пуанкаре,  $\sigma$  - распределение расстояний между соседними уровнями  $\rho(x)$ ,  $\delta$  - дисперсия  $\Sigma^2(L)$ . Внизу  $E_{кр1} \approx 90$  (первая регулярная область), посередине  $E_{кр2} \approx 1,8$ ;  $E_{кр2} \approx 1895$  (хаотическая область), сверху  $E_{кр2} \approx 14,2$  (вторая регулярная область).

области как функция распределения, так и дисперсия хорошо соответствуют предсказаниям ГОА. Для регулярных областей функция распределения хорошо аппроксимируется пуассоновской, хотя для малых расстояний между уровнями наблюдается небольшое отклонение, по-видимому, связанное с небольшой примесью хаотической компоненты.

Заметим, что подобную сложную перестройку спектра можно ожидать и для атома водорода в магнитном поле <sup>357</sup>. Действительно, в пределе слабых магнитных полей, когда доминируют кулоновские силы, проблема сводится к интегрируемой кеплеровой задаче, и следовательно, статистика спектра должна быть пуассоновской. В обратном пределе сильных магнитных полей, когда можно пренебречь электростатическими силами, задача опять сводится к интегрируемой. И лишь в промежуточном случае, когда кулоновские и магнитные силы одного порядка, движение электрона становится хаотическим, а соответствующая функция распределения расстояний между соседними уровнями - вигнеровской.



3. Выше мы привели ряд примеров, подтверждающих гипотезу об универсальных флуктуациях энергетических спектров. При внимательном рассмотрении этих примеров возникает естественный вопрос о роли численных ошибок, в частности, о роли неизбежного обрезания базиса. Возник даже специальный термин - "индуцированная нерегулярность" <sup>/36/</sup>. Некоторый свет на эту проблему проливает исследование статистических свойств спектра в трехуровневой модели Липкина-Мешкова-Глика <sup>/37/</sup>.

Рассмотрим систему  $N$  частиц на трех  $N$ -кратно вырожденных уровнях, гамильтониан которой в представлении вторичного квантования имеет вид

$$H = \sum_{k=0}^2 \varepsilon_k \left( \sum_{n=1}^N \alpha_{kn}^+ d_{kn} \right) - \frac{1}{2} v \sum_{k,l=0}^2 (1 - \delta_{kl}) \left( \sum_{n=1}^N \alpha_{kn}^+ d_{ln} \right)^2, \quad (29)$$

где одночастичные состояния (уровни) маркируются индексом  $k$  ( $k=0, 1, 2$ ), а  $n = 1, 2, \dots, N$  - различные вырожденные состояния, принадлежащие одному уровню,  $\alpha^+, \alpha$  - фермионные операторы рождения и уничтожения с обычными правилами антикоммутиации.

Более традиционная двухуровневая модель ЛМГ имеет единственную степень свободы - число частиц на верхнем уровне - и следовательно, классический аналог двухуровневого ЛМГ гамильтониана при любом взаимодействии  $V$  не допускает хаотического поведения. Введение третьего уровня эквивалентно появлению дополнительной степени свободы. Стационарные состояния гамильтониана (29) можно маркировать двумя индексами - числами частиц на втором и третьем уровнях. Так как имеется конечное число способов размещения  $N$  частиц по трем уровням, то и число базисных векторов в такой модели конечно. Проблема обрезания базиса и оценки возникающих при этом ошибок отсутствует.

Используя когерентные состояния

$$|z\rangle = \exp \left( \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^N z_k \alpha_{kn}^+ d_{0n} \right) |0\rangle, \quad (30)$$

где  $|0\rangle$  - "вакуум" - состояние со всеми  $N$  частицами на уровне с  $k=0$ , определим, следуя <sup>/37/</sup>, классический гамильтониан как среднее от  $H$  по когерентным состояниям. В результате получим

$$\langle z | \frac{H}{N\varepsilon} | z \rangle \equiv H_{cl} = -1 + \frac{1}{2} q_1^2 (1-\chi) + \frac{1}{2} q_2^2 (2-\chi) + \frac{1}{2} p_1^2 (1+\chi) + \frac{1}{2} p_2^2 (2+\chi) + \frac{\chi}{4} \left[ (q_1^2 + q_2^2)^2 - (p_1^2 + p_2^2)^2 - (q_1^2 - p_1^2)(q_2^2 - p_2^2) - 4q_1 q_2 p_1 p_2 \right].$$

(31)

Здесь  $\epsilon$  - расстояние между уровнями,  $\chi = (W-DV)/\epsilon$ ,

$$q_k = \operatorname{Re} \frac{\sqrt{2} z_k}{\sqrt{1+|z_1|^2+|z_2|^2}}, \quad p_k = \operatorname{Im} \frac{\sqrt{2} z_k}{\sqrt{1+|z_1|^2+|z_2|^2}} \quad (32)$$

Уравнения движения для  $q_k$  и  $p_k$ , получаемые из вариационного принципа<sup>/38/</sup>, являются гамильтоновыми, генерируемыми гамильтонианом (31). При  $\chi=0$  ( $V=0$ ) классический аналог гамильтониана ЛМГ интегрируем. Меняя величину константы связи и анализируя соответствующие сечения Пуанкаре, можно наблюдать переход от регулярного движения к хаотическому. При  $\chi=100$  был обнаружен широкий энергетический интервал, соответствующий хаотическому движению. Этот интервал включает около 400 уровней ( $N=85$ ) для каждого из четырех неприводимых представлений гамильтониана (31). Спектральные флуктуации для трехуровневой модели ЛМГ ( $N=85$ ,  $\chi=100$ ) приведены на рис.8. Эти результаты представляют серьезный аргумент в поддержку гипотезы, связывающей статистические свойства спектров квантовых систем с характером динамики их классических аналогов.

### III. Проявление квантовой стохастичности в структуре волновых функций

I. При исследовании квантовых проявлений классической стохастичности в структуре стационарных волновых функций в основном используются координатное и так называемое  $H_0$ -представление, т.е. представление собственных функций интегрируемой части рассматриваемого гамильтониана. Если использование координатного представления удобно для непосредственного сравнения с известными результатами по структуре фазового пространства соответствующего классического гамильтониана, то  $H_0$ -представление более естественно при выполнении численных расчетов, так как диагонализация точного гамильтониана  $H_0+H_1$  чаще всего выполняется именно в этом представлении.

Гипотеза о различии свойств регулярных и хаотических волновых функций в координатном представлении была выдвинута Берри еще в 1977 г.<sup>/39/</sup>. Интерпретируя волновую функцию хаотического состояния как суперпозицию большого числа плоских волн с некоррелированными фазами, Берри предположил, что в пределе  $\hbar \rightarrow 0$  для таких состояний  $\psi(q_i)$  будет случайной функцией  $\psi$  с гауссовым распределением по  $\psi$ . Такая структура волновой функции хорошо согласуется с картиной классического фазового пространства: в условиях, соответствующих стохастическому

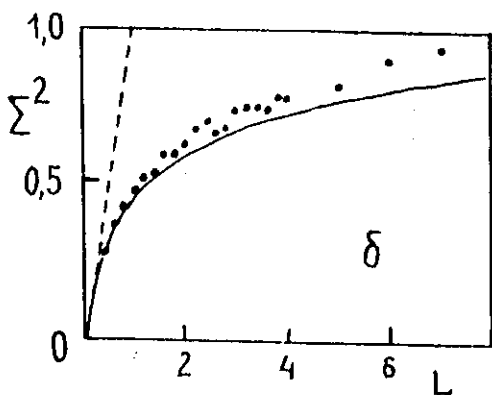
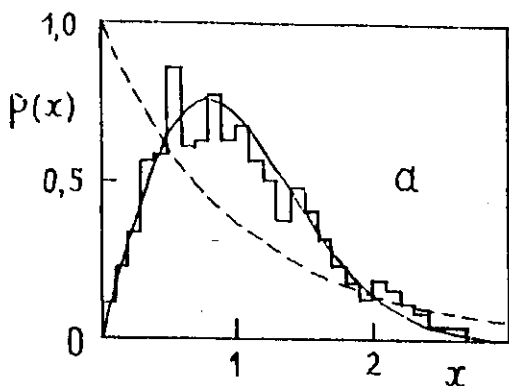


Рис.8. Спектральные флуктуации в трехуровневой модели ЛМГ ( $N=85$ ,  $\chi=100$ ): а) функция распределения расстояний между соседними уровнями, б) дисперсия /37/.

Уравнение Шредингера для рассматриваемой системы сводится к волновому уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + \kappa^2)\Psi = 0, \quad \kappa^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (33)$$

с условием  $\Psi = 0$  на границе.

Обратимся теперь к анализу численных решений уравнения (33) для

движению, классическая траектория однородно заполняет изоэнергетическую поверхность. Из рассмотрения регулярного квантового движения как аналога классического движения на торе следует вывод<sup>/39/</sup> о сингулярности  $\Psi(q_i)$  вблизи каустик - границ области классического движения в координатном пространстве. Эта гипотеза подверглась наиболее полной проверке для бильярдов различного типа и, в частности, для бильярда типа стадион<sup>/40/</sup> (рис.9). Форму такого бильярда удобно описывать двумя параметрами:  $a$  - половина длины прямоугольной части и  $R$  - радиус закругления. Напомним, что в зависимости от величины параметра  $\gamma = a/R$  классический аналог этой системы будет либо интегрируемым ( $\gamma = 0$ , круговой бильярд), либо неинтегрируемым, стохастическим ( $\gamma \neq 0$ ). При  $\gamma = 0$  интегрируемость связана с сохранением углового момента.

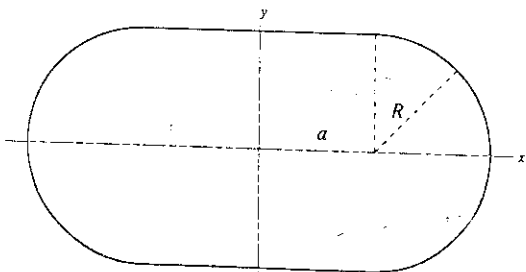


Рис. 9. Бильярд типа стадион /40/.

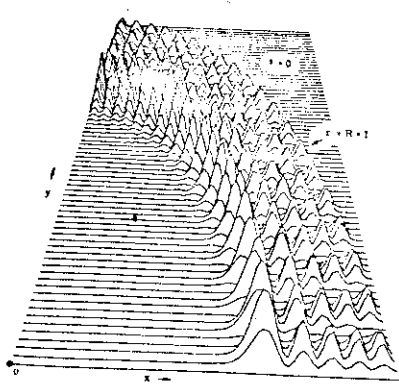


Рис. 10. Типичный пример  $|\psi(x,y)|^2$  интегрируемого кругового бильярда ( $\gamma=0$ ) /40/.

случаев  $\gamma=0$  и  $\gamma=1$ .  
 "Типичная" волновая функция интегрируемого кругового бильярда ( $\gamma=0$ ) представлена на рис.10. Мы видим, что в классически запрещенном районе (в силу сохранения углового момента у кругового бильярда произвольная траектория заключена между внешней и некоторой внутренней окружностью, определяемой величиной углового момента (см.рис. II)) амплитуда волновой функции пренебрежимо мала, в то время как вблизи акустик она максимальна.

Представленное на рис.12 распределение  $|\psi|^2$  для случая  $\gamma=1$ , при котором классическая динамика стохастична, разительно отличается от интегрируемого случая. Однако это распределение не столь однородно, как это можно было ожидать, исходя из эргодичности классического движения.

Продемонстрируем теперь, насколько хорошо подтверждается для бильярда типа стадион гипотеза Берри о случайном характере волновой функции с гауссовым распределением  $\rho(\psi) \sim \exp(-\beta\psi^2)$ . На рис.13 представлено распределение  $\rho(\psi)$  для волновой

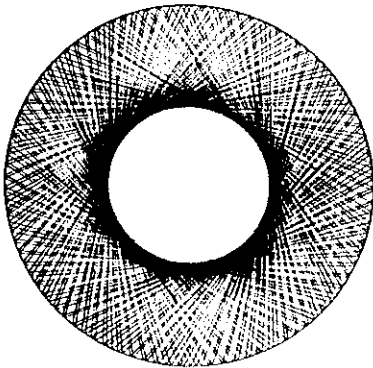


Рис.11. Типичный пример траектории для кругового бильярда ( $\gamma = 0$ )/40/ .

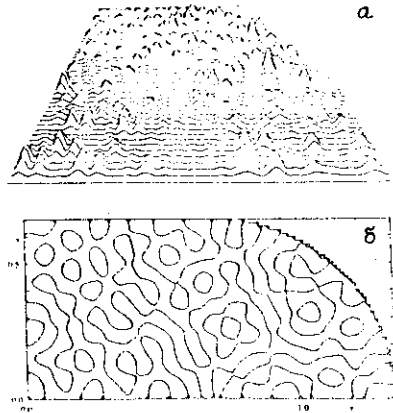


Рис.12. а) Типичное распределение  $|\psi(x,y)|^2$  для  $\gamma = 1$ .  
б) Линии узлов волновой функции для  $\gamma = 1/40$  .

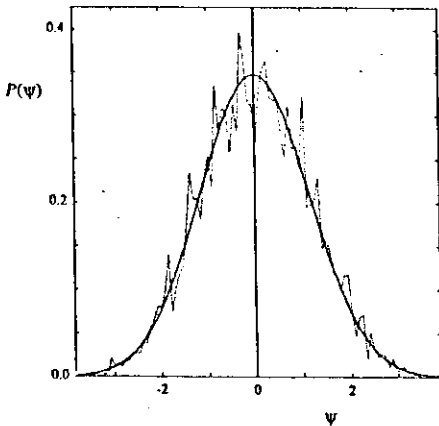


Рис.13. Распределение  $P(\psi)$  для волновой функции, изображенной на рис.12 ( $\gamma = 1$ )/40/ .

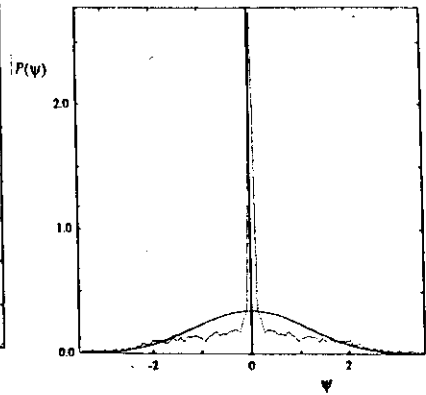


Рис.14. Распределение  $P(\psi)$  для волновой функции интегрируемого кругового бильярда, изображенной на рис.10 ( $\gamma = 0$ )/40/ .

функции, изображенной ранее на рис.12. Как видно, это распределение в целом хорошо аппроксимируется гауссовым. Такой вид оказался типичным для всех волновых функций в неинтегрируемом случае, рассчитанных в работе /40/ .

В то же время распределение собственных волновых функций интегрируемого кругового бильярда имеет резкий максимум вблизи нуля (см. рис. 14), что предопределено наблюдаемой выше концентрацией волновых функций вблизи каустик. Таким образом, в случае бильярдов вид функции распределения  $P(\psi)$  оказывается наиболее надежным критерием отличия регулярных и хаотических волновых функций.

2. Перейдем теперь к исследованию квантовых проявлений классической стохастичности на уровне волновых функций от бильярдов к гамильтоновым системам общего положения. В качестве объекта исследования выберем уже рассмотренные выше при анализе статистических свойств энергетических спектров  $S_{3W}$  и  $S_{4W}$  - инвариантные гамильтонианы. В отличие от бильярдов структуру стационарных волновых функций этих систем будем изучать в  $H_0$ -представлении или, более конкретно, в представлении волновых функций двумерного гармонического осциллятора с равными частотами (точнее, в представлении  $MLJ$ ) (см. (20))

$$\Psi_k = \sum x^k(i) u_i. \quad (34)$$

Если ввести понятие распределенности волновой функции  $\Psi$  по базисным волновым функциям  $u_i$ , то критерий стохастичности, сформулированный еще Нордхольмом и Райсом [41], заключается в том, что вместе со степенью стохастизации в среднем возрастает степень распределенности волновых функций. Разумеется, этот критерий является непосредственным аналогом гипотезы Берри для  $H_0$ -представления, если трактовать номер базисного состояния как дискретную координату.

Проследим за изменением структуры волновых функций по мере изменения характера классического движения на уже рассмотренном выше тройном переходе регулярность - хаос - регулярность. На рис. 15б приведены абсолютные величины коэффициентов разложения  $x(i)$  для состояния  $k = 86$  в зависимости от номера базисного состояния  $i$  для трех областей энергий, соответствующих определенному типу классического движения:  $R_1$  - первая регулярная область  $E < E_{kp_1}$ ,  $S$  - хаотическая область  $E_{kp_1} < E < E_{kp_2}$ ,  $R_2$  - вторая регулярная область  $E > E_{kp_2}$  (для всех трех случаев  $W = 13$ ). Мы видим, что в энергетическом диапазоне, соответствующем области  $R_1$ , преобладают малые величины  $x(i)$ : волновая функция локализована на небольшом числе базисных векторов. В хаотической области  $S$  степень распределенности волновой функции существенно выше, однако, как и в случае бильярда типа стадион, она не столько высока, чтобы можно было говорить об "эргодичности" в  $H_0$ -представлении. При переходе ко второй регулярной области  $R_2$  опять возрастает степень локализации волновой функции

(т.е. число нулевых коэффициентов  $x(i)$ ), несмотря на существенное увеличение нелинейности. Степень нелинейности потенциала (26) определяется параметрами  $\ell$  и  $c$ , величины которых равны

$$R_1: \quad \ell = 0,044159, \quad c = 0,00015 \quad (E_{kF_1} = 53,8),$$

$$S: \quad \ell = 0,34225, \quad c = 0,0075 \quad (E_{kF_1} = 2,15, E_{kF_2} = 1895),$$

$$R_2: \quad \ell = 8,06226, \quad c = 5,0 \quad (E_{kF_2} = 2,843).$$

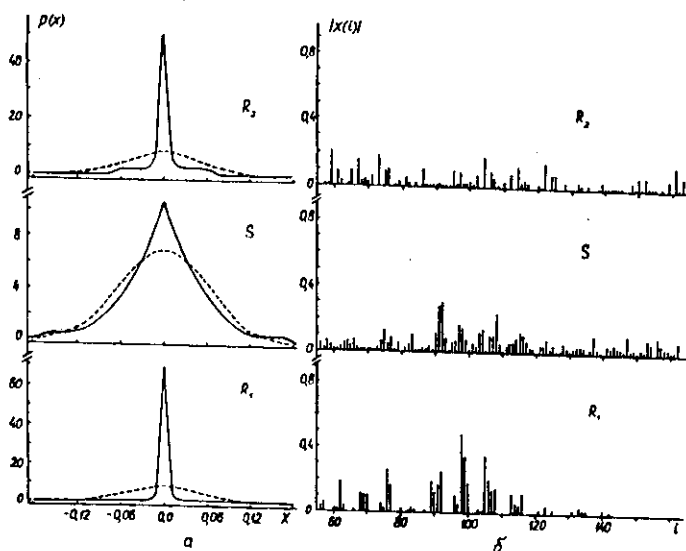


Рис. 15. а) функция распределения  $P(x)$  коэффициентов разложения волновой функции (34) по базису  $|NL_i\rangle$  для перехода  $R-S-R$  гамильтониана (26). (Для улучшения статистики проведено усреднение по состояниям  $78 \leq k \leq 126$ ). Штриховая линия - нормированное распределение Гаусса. б) Величина коэффициентов разложения  $x(i)$  в зависимости от номера базисного состояния  $i$  (для состояния с номером  $k = 86$ ).

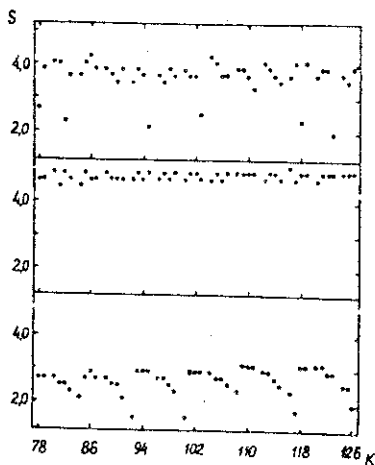
Поскольку совокупность  $x(i)$  представляет волновую функцию в  $H_0$ -представлении, то согласно гипотезе Берри в области глобальной стохастичности эти коэффициенты должны быть распределены по нормальному закону. В самом деле, в хаотической области  $S$  (см. рис. 15а) распределение  $\rho(x)$  приближается к гауссову, хотя степень аппроксимации хуже,

чем в случае бильярда типа стадион. Причиной этого, видимо, является присутствие небольшой доли регулярной компоненты (трудно поддающейся оценке), в то время как для бильярда типа стадион мера регулярной компоненты заведомо равна нулю. Функции распределения  $\rho(x)$  для регулярных областей  $R_1$  и  $R_2$  почти идентичны, коэффициенты  $\chi(i)$  локализованы в окрестности нулевых значений.

Для количественной оценки степени распределенности волновых функций удобно ввести аналог обычной термодинамической энтропии <sup>/42/</sup>:

$$S = - \sum_i |\chi(i)|^2 \ln |\chi(i)|^2. \quad (35)$$

На рис. 16 приведена зависимость  $S$  от номера состояния  $k$  для трех диапазонов параметров  $b, c$ , соответствующих переходу регулярность - хаос - регулярность в системе с гамильтонианом (26). Из рисунка видно, что тип классического движения существенно определяет характер зависимости  $S$  от  $k$ : в хаотической области энергий  $S$  практически постоянна, что соответствует высокой степени распределенности, а в регулярных областях  $R_1$  и  $R_2$  энтропия меньше по величине и имеет немонотонное поведение. Немонотонность  $S$  связана с довольно высокой и зависящей от номера состояния  $k$  степенью локализации волновой функции. Обратим внимание на то, что в области  $R_2$  имеются отдельные "сверхлокализованные" состояния, соответствующие минимальным значениям энтропии  $S$ . Это иллюстрируется рис. 17а, на котором показана



зависимость коэффициентов  $\chi(i)$  волновой функции  $k=82$  от номера базисного состояния  $i$ . Для сравнения на этом же рис. 17б приведена аналогичная зависимость для волновой функции ближайшего состояния ( $k=83$ ).

Рис. 16. Зависимость энтропии  $S$  от номера состояния  $k$  для тройного перехода  $R-S-R$  инвариантного гамильтониана (26); а) первая регулярная область, б) область, соответствующая хаотическому классическому движению, в) вторая регулярная область. Параметры  $b$  и  $c$  такие же, как и для рис. 15.



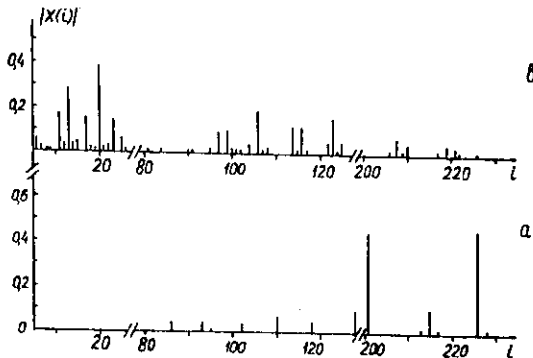


Рис.17. Зависимость абсолютных величин коэффициентов  $\chi(i)$  от номера базисного состояния  $i$  для второй регулярной области  $R_2$   $S_{3\pi}$  инвариантного гамильтониана (26): а) "сверхлокализованное" состояние ( $k=82$ ), в) соседнее состояние ( $k=83$ ).

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + x^4 + y^4) - vx^2y^2. \quad (36)$$

Таким образом, энтропия и распределения коэффициентов волновой функции позволяют исследовать проявление классической стохастичности в квантовой задаче.

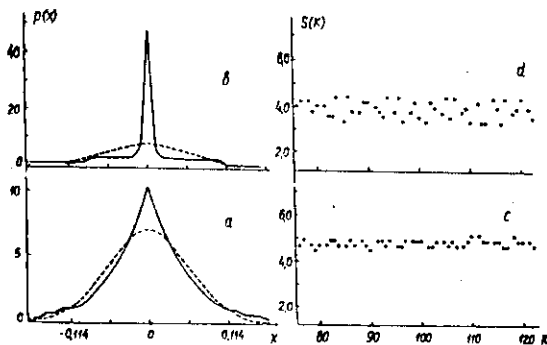


Рис.18. Статистические характеристики волновых функций  $S_{4\pi}$  инвариантного гамильтониана (13):

распределение  $p(x)$  при энергиях, соответствующих: а- хаотическому (внизу) и в - регулярному (вверху) типам движения; с и d - зависимости энтропии от номера состояния, вычисленные при тех же условиях, что и  $p(x)$ .

Корреляция характера зависимости  $S$  от  $k$  с типом классического движения имеет место и для  $S_{4\pi}$ -инвариантного гамильтониана (13). Как видно из рис.18, на котором приведены функции  $p(x)$  и  $S(k)$  гамильтониана (13) для двух предельных случаев, соответствующих хаотическому (а) и регулярному (в) классическим движениям. Отметим, что подобные результаты только в координатном представлении были получены в работе /43/ для гамильтониана

## Заключение

На первый взгляд, любой подход к решению квантового хаоса требует предварительного разрешения следующей альтернативы /15/:

- 1) квантовый хаос является свойством одного стационарного состояния,
- 2) квантовый хаос является свойством группы близких по энергии состояний.

В самом деле, при исследовании статистических свойств спектров во главу угла ставятся усредненные характеристики системы уровней: функция распределения расстояний между соседними уровнями, спектральная жесткость и т.д., то есть квантовый хаос трактуется как свойство группы состояний. Выбор же в качестве объекта исследования волновой функции квантовой системы, хаотической в классическом пределе, связывает появление квантовой стохастичности с индивидуальным состоянием. Поэтому представленный в настоящей работе анализ конкретных моделей позволяет сделать вывод о том, что проявления квантовой стохастичности скорее всего касаются как индивидуальных, так и коллективных свойств системы, поскольку имеется возможность для каждой конкретной волновой функции проверить ее принадлежность к интегрируемому или неинтегрируемому в классическом пределе случаю.

Отметим также, что использование тестов стохастичности волновых функций может быть применено для оценки радиуса сходимости теории пертурбации вокруг выбранного затравочного гамильтониана  $H_0$  в интегрируемом и неинтегрируемом случаях.

## Литература

1. Berry M.V.—Ann.Phys. (N.Y.), 1981, v.131, 163.
2. Brody T.A. et al.—Rev.Mod.Phys., 1981, v.53, 385.
3. Porter C.E.(ed.).—Statistical theories of spectra. N.Y.:Academic Press, 1965.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.—Квантовая механика. М.:Наука, 1989.
5. Samalida H.S., Georgopoulos P.D.—Phys.Rev.Lett. 1983, v.50, 492.
6. Заславский Г.М.—Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
7. Лихтенберг А., Либерман М.—Регулярная и стохастическая динамика, М.: Мир, 1984.
8. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.—Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1989.
9. McDonald S.W., Kaufman A.N.—Phys.Rev.Lett. 1979, v.42, 1189.
10. Casati G., Valz-Gris F., Guarneri I.—Lett. Nuovo Cim. 1980, v.28, 279.

11. Korsch H.J., Berry M.V.—Physica 3D, 1981, 627.
12. Bohigas O., Giannoni M.J., Schmit C.—Phys.Rev.Lett. 1984, v.52,1.
13. Ishikawa T., Yukawa T.—Phys.Rev.Lett. 1985, v.54, No 15, 1617.
14. Болотин Д.Л. и др.—1989, Препринт ОИЯИ Р4-89-590, Дубна.
15. Елютин П.В.—Проблема квантового хаоса. УФН, 1988 т.155, с.397-
16. Berry M.V., Tabor M.—Proc. R.Soc. 1977, v.A356, 375.
17. Casati G. (ed.)—Chaotic Behaviour in Quantum Systems. NATO ASI, Series B: Physica, v.120, 1986.
18. Berry M.V., Robnik M.—J.Phys.A, 1984, v. 17, 2413.
19. Богомольный Е.В.—Распределение уровней энергии квантовых систем. Письма в ЖЭТФ. 1985. т.41. вып.2, с.55-58.
20. Матинян С.Г.—Динамический хаос неабелевых калибровочных полей. ЭЧАЯ 1985, т.16, с.522-550.
21. Гилмор Р.—Прикладная теория катастроф. М. Мир, 1984.
22. Toda M.—Phys.Lett. 1974, v.48A, 335.
23. Болотин Д.Л., Гончар В.Д., Кривошей И.В.—Отрицательная кривизна потенциальной энергии и стохастизация в нелинейных задачах химической динамики. Химическая физика, 1986, т.5, с.309-317.
24. Чириков Б.В.—Резонансные процессы в магнитных ловушках. Атомная энергия. 1959. т.6, с.63-638.
25. Pullen R.A., Edmonds A.R.—J.Phys.A, 1981, v.14, L477.
26. Haller E., Koppel H., Cederbaum L.S.—Phys.Rev.Lett. 1984, v.52, 1665.
27. Louck J.D., Shaffer W.H.—J.Mol. Spectrosc. 1960, v.4, 285.
28. Lande D., Gay J.C.—Phys.Rev.Lett. 1986, v.57, No 16, 2006.
29. Wintgen D., Friedrich H.—Phys.Rev. 1987, v.A35, No 3, 1464.
30. Saini S., Ferrelly D.—Phys.Rev. 1987, v.A 36(8), 3556.
31. Болотин Д.Л., Гончар В.Д., Инопин Е.В. и др.—Стохастическая ядерная динамика. ЭЧАЯ. 1989, т.20, вып.4, с.878-929.
32. Bolotin Y. et al.—Phys.Lett. 1989, v.135A, No 1, 29.
33. Айзенберг И., Грайнер В.—Микроскопическая теория ядра. М.: Атомиздат, 1976, 487 с.
34. Болотин Д.Л., Гончар В.Д., Инопин Е.В.—Хаос и катастрофы в квадрупольных колебаниях ядер. ЯФ, 1987, т.45, вып.2, с.350-356.
35. Berry M.V.—New Scientist, 1987, No 11, 44.
36. Ersin Y.—Phys.Rev. 1988, A38, 1027.
37. Meredith D.C., Koonin S.E., Zirnbaur M.R.—Phys.Rev., 1988, v.A37, No 9, 3499.

38. Williams R.D., Koonin S.E.—Nucl.Phys. 1982, A391, 72.
39. Berry M.V.—J.Phys. Ser.A. 1977, v.A 10, 2083.
40. McDonald S.W., Kaufman A.N.—Phys.Rev. 1988, 37A, No 8, 3067.
41. Nordholm K.S.J., Rice S.A.—J.Chem. Phys. 1974, v.61, 203; 768.
42. Yonezawa F.—J.Non-Cryst.Solids. 1980, v.35, 36, 29.
43. Reichl J.—Europhys.Lett. 1988, v.6(8), 669.

Рукопись поступила в издательский отдел  
26 февраля 1990 года.