90-14

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-90-14

А.Е.Савельев*

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА

*Казахский химико-технологический институт, Чимкент

1990

В теоретической физике и её приложениях, в частности, для математического моделирования технологических процессов, до настоящего времени не устранён большой дефицит в аналитических решениях уравнений Колмогорова. Известные решения этих уравнений найдены при жёстких ограничениях на коэффициенты сноса и диффузии. Особые трудности возникают при учёте транспорта вещества и тепла, что, в свою очередь, связано с учётом деформаций движущегося макроэлемента среды. Наибольшие трудности при поиске аналитических решений уравнений Колмогорова возникают в том случае, когда макрохарактеристики среды – коэффициенты транспорта и диффузии – являются произвольными функциями координат и времени. Посильному преодолению отмеченных трудностей и посвящена данная работа.

Представляется естественным начать анализ уравнений Колмогорова в их исходном виде. Согласно теореме Колмогорова /I/ плотность вероятности перехода $P(s,x;t,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[a(t,y)P(s,x;t,y)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[b(t,y)P(s,x;t,y)\right]; \quad -\infty < x,y < \infty; \quad t \geq s. \tag{I}$$

Здесь s – начало отсчёта времени, t – текущее время, x – произвольная точка наблюдения, y – динамическая переменная, a, b – коэффициенты сноса и диффузии.

Уравнение Колмогорова (I) в теоретической физике, как правило, применяется не само по себе, а для анализа и решения неоднородных уравнений, например, вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(af) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(bf) = Q(t,y), \tag{2}$$

в которых функция f может представлять собой плотность вероятности найти частицу в точке y и в момент времени t, плотность числа частиц $n(t,y)$, температуру среды $T(t,y)$ и т.д.; соответственно, $Q(t,y)$ может быть источником возникновения или исчезновения частиц, плотностью мощности теплоисточников и т.д. В связи с этим возникает вопрос: при каких условиях решение уравнения (I) можно считать фундаментальным при поиске решения уравнения (2)? Из самого смысла уравнения (2) следует, что левая часть этого уравнения должна соответствовать сохранению числа частиц, энергии и т.д., т.е., если решение уравнения (I) считать фундаментальным решением уравнения (2) – функцией влияния, то она должна удовлетворять, прежде всего, условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(s,x;t,y)\,dy = 1 \tag{3}$$

при любых значениях переменных s, x, t. В уравнениях (I)-(2) и соотношении (3) предполагается, что среда является неограниченной. Кроме того, сам смысл уравнения (I) соответствует описанию непрерывных гауссовско-марковских процессов.

Ясно, что условие (3) должно наложить некоторые ограничения на зависимость коэффициентов сноса и диффузии от координат и времени. Для выяснения такого рода ограничений приведём уравнение (I) к нормальному виду:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a_1 \frac{\partial P}{\partial y} + a_0 P - \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0, \tag{4}$$

где обозначено

$$a_1 = a - \frac{\partial b}{\partial y}, \qquad a_0 = \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}. \tag{5}$$

Из соотношений (5) следует очевидная связь коэффициентов уравнения (4):

$$a_0 = \frac{\partial}{\partial y}\left(a - \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(a_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y}\right). \tag{6}$$

При решении многих задач теоретической физики возникают линейные неоднородные уравнения, левая часть которых не обязательно должна точно соответствовать структуре оператора уравнения (I). Однако, если предположить, что коэффициенты любого конкретного уравнения имеют необходимые непрерывные производные, то, совершенно аналогично (4)-(6), оно может быть приведено к форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a_1 \frac{\partial f}{\partial y} + a_0 f - \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = Q(t,y). \tag{7}$$

Чтобы увидеть связь соотношения (3) с коэффициентами уравнения (4), рассмотрим его в упрощённом виде, полагая

$$b = const, \quad a_1 \equiv 0, \quad a_0 = a_0(t), \tag{8}$$

где принято, что $a_0(t)$ - функция только времени. Если учесть равенства (8), то с помощью подстановки

$$P = D \exp\left[-\int_s^t a_0(t')\,dt'\right] \tag{9}$$

уравнение (4) приводится к виду

$$\frac{\partial D}{\partial t} - \frac{1}{2} b_0 \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} = 0, \tag{I0}$$

где $b_0 = const$. Как известно, решением уравнения (I0) при начальном условии

$$D\big|_{t=s} = \delta(y-x) \tag{II}$$

является функция

$$\mathcal{D}(s,x;t,y)=[\pi 2b_0(t-s)]^{-1/2}\exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2b_0(t-s)}\right]. \tag{I2}$$

Функция (I2), называемая функцией Грина, обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}(s,x;t,y)\,dy=1 \tag{I2'}$$

при всех значениях s, x и t. Если теперь функцию (I2) подставить в (9), а последнюю – в соотношение (3), то найдём

$$\exp\left[-\int_s^t a_0(t')dt'\right]\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}(s,x;t,y)\,dy=1,$$

т.е., с учётом (I2'),

$$\exp\left[-\int_s^t a_0(t')dt'\right]=1. \tag{I3'}$$

Поскольку $a_0(t)$ – непрерывная функция времени, то соотношение (I3') может реализоваться только при условии

$$a_0(t)\equiv 0. \tag{I3}$$

Соотношение (I3) учитывает, что s и t произвольны в пределах неравенства $t\geq s$. Оно находится в полном соответствии с формулами (5). Если, согласно (8), в эти формулы подставить $b=const$, $a_1\equiv 0$, то находим

$$a\equiv 0,\ a_0\equiv 0. \tag{I4}$$

Однако в общем случае тождество (I3), конечно, реализоваться не может, поскольку левая часть уравнения (7) не обязательно точно соответствует структуре оператора уравнения (I). Рассмотрим формулы (5), учитывая метод доказательства теоремы существования уравнения (I). Как само уравнение (I), так и его коэффициенты определены по отношению к макроэлементу с минимально возможным характерным размером $\varepsilon>0$ так, что для любых двух точек ξ и y, принадлежащих этому макроэлементу, выполняется неравенство

$$|\xi-y|<\varepsilon. \tag{I5}$$

В пределах макроэлемента (I5) представим коэффициенты a и b в виде рядов Тейлора:

$$a(t,y)=a(t,\xi)+\frac{\partial a(t,\xi)}{\partial\xi}(y-\xi)+\cdots, \tag{I6}$$

$$b(t,y)=b(t,\xi)+\frac{\partial b(t,\xi)}{\partial\xi}(y-\xi)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 b(t,\xi)}{\partial\xi^2}(y-\xi)^2+\cdots,$$

ограничиваясь лишь выписанными членами, что и соответствует методу доказательства теоремы Колмогорова. Согласно (I6) вычисляются производные:

$$\frac{\partial a(t,y)}{\partial y}=\frac{\partial a(t,\xi)}{\partial\xi}, \tag{I7}$$

$$\frac{\partial b(t,y)}{\partial y}=\frac{\partial b(t,\xi)}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 b(t,\xi)}{\partial \xi^2}(y-\xi), \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 b(t,y)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 b(t,\xi)}{\partial \xi^2}. \tag{19}$$

Равенства (17)-(19) констатируют, что в пределах макроэлемента (15) коэффициент $a(t,y)$ зависит от y лишь линейно, а $b(t,y)$ не сильнее, чем квадратично. С помощью этих равенств второе из соотношений (5) записывается в виде:

$$a_0=\frac{\partial a(t,y)}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(t,y)}{\partial y^2}= \\ =\frac{\partial a(t,\xi)}{\partial \xi}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(t,\xi)}{\partial \xi^2}, \tag{20}$$

где ξ и y принадлежат макроэлементу (15). Как видно из соотношений (20), вид формулы для коэффициента a_0 не изменяется, если она отнесена к любой точке, принадлежащей макроэлементу (15). Это говорит о том, что приближения (16) вполне корректны и соответствуют точности самого уравнения (1) и теореме его существования. Далее, из соотношений (20) следует, что коэффициент $a_0(t)$ может быть функцией только времени. Наконец, из представлений (16) и соотношения (18) вытекает: коэффициент $a_1(t,y)$, определённый первой из формул (5), в пределах макроэлемента (15) может зависеть от переменной y лишь линейно.

Учитывая только что сказанное, с помощью подстановки (9) приведём уравнение (4) к виду

$$\frac{\partial D}{\partial t}+a_1\frac{\partial D}{\partial y}-\frac{1}{2}b\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}=0. \tag{21}$$

Предположим, что существует фундаментальное решение уравнения (21), обладающее нормировкой (12′), а коэффициенты этого уравнения удовлетворяют соотношениям (5). Тогда, требуя реализации нормировки (3), снова придём к тождеству (13).

Примем теперь, что коэффициенты левой части уравнения (7) в общем случае не соответствуют структуре уравнения (1), т.е. не определяются соотношениями (5). Тем не менее будем считать, что уравнение (7) описывает непрерывные гауссовско-марковские процессы. В связи с этим представляется естественным, что во многих случаях можно считать коэффициент $a_0(t)$ функцией только времени, не удовлетворяющей требованию (13). Для дальнейшего удобно вместо коэффициента сноса a_1 ввести коэффициент транспорта вещества (или тепла)

$$v_1=\vartheta+a_1, \tag{22}$$

где ϑ - гидродинамическая скорость макроэлемента (I5), а a_1 имеет прежний физический смысл. Учитывая (22) и применяя преобразование вида (9), запишем уравнение (7) в форме:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}+\vartheta_1\frac{\partial f_0}{\partial y}-\frac{1}{2}b\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}=Q(t,y)\exp\Big[\int_s^t a_0(t')dt'\Big], \tag{23}$$

$$f(t,y)=f_0(t,y)\exp\Big[-\int_s^t a_0(t')dt'\Big]. \tag{24}$$

Из уравнения (23) видно, что коэффициент $a_0(t)$ вносит вклад в изменение источников возмущений системы. Таким образом, вклад этого коэффициента должен учитываться не фундаментальным решением, соответствующим уравнению (7), а общим его решением в виде (24). Фундаментальное же решение должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial P_0}{\partial t}+\vartheta_1\frac{\partial P_0}{\partial y}-\frac{1}{2}b\frac{\partial^2 P_0}{\partial y^2}=0. \tag{25}$$

Поскольку, согласно (22), введена гидродинамическая скорость макроэлемента, то необходимо обобщить уравнение (25) к учёту деформаций макроэлемента (I5). Это можно сделать, вводя кинематическое преобразование

$$y=y''+\int_s^t \vartheta_1(t',y'')dt'. \tag{26}$$

Примем, что существуют прямой и обратный якобианы преобразования (26)

$$J=\frac{\partial y}{\partial y''},\quad \tilde{J}=\frac{\partial y''}{\partial y}, \tag{27}$$

удовлетворяющие условию

$$J\cdot\tilde{J}=\frac{\partial y}{\partial y''}\cdot\frac{\partial y''}{\partial y}=1. \tag{28}$$

Тогда в момент времени $t=s$, согласно (26), уравнение (25) примет вид

$$\frac{\partial P_0}{\partial t}+\vartheta_1(s,y'')\frac{\partial P_0}{\partial y''}-\frac{1}{2}b(s,y'')\frac{\partial^2 P_0}{\partial y''^2}=0. \tag{29}$$

В последующие моменты времени $t>s$, согласно (26)-(27), уравнение (29) записывается в форме

$$\frac{\partial P_0}{\partial t}+\vartheta_1 J\frac{\partial P_0}{\partial y}-\frac{1}{2}b\Big[J^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial y^2}+\frac{\partial J}{\partial y''}\cdot\frac{\partial P_0}{\partial y}\Big]=0. \tag{30}$$

Последний член в левой части уравнения (30) представляет собой вклад процессов диффузии в процессы сноса и переноса. Следует подчеркнуть здесь, что последовательные производные по переменным y'' и y, вообще говоря, непереставимы, ибо эти переменные зависимы, согласно (26).

Из предыдущего следует, что необходимо, прежде всего, найти фундаментальные решения уравнений (25) и (30). Поскольку решения этих уравнений в самом общем виде найти весьма непросто, имеет смысл осуществить их поиск поэтапно. Рассмотрим уравнение (25) в том упрощённом случае, когда коэффициенты $v_1(t)$ и $b(t)$ можно считать зависящими только от времени. Считая, что уравнение (25) описывает непрерывные гауссовско-марковские процессы, начальное условие для функции ρ_0, отнесённое к минимально возможному макроэлементу (I5), запишем в виде гауссовского распределения

$$\rho_0\big|_{t=s} = [\pi 2\sigma^2]^{-1/2} \exp\left[-\frac{(y''-x)^2}{2\sigma^2}\right], \quad \sigma > 0, \tag{31}$$

в котором среднеквадратичный разброс σ имеет порядок величины ε в (I5), а $y'' = y|_{t=s}$, согласно (26).

Исходя из условий доказательства теоремы Колмогорова о существовании уравнения (I), можно заключить, что при $t \geq s$ среднеквадратичный разброс функции (3I) будет нарастать согласно соотношению

$$\begin{aligned} R^2 &= \sigma^2 + \int_s^t b_0(\tau)\,d\tau, \quad t \geq s, \\ b &= b_0(t). \end{aligned} \tag{32}$$

Соответственно изменение пространственной переменной y должно определяться кинематическим соотношением (26), в котором v_1 теперь – – функция только времени. Преобразование (26) в этом случае не противоречит виду уравнения (25), поскольку

$$J = \frac{\partial y}{\partial y''} = 1, \quad v_1 = v_1(t),$$

и уравнение (30) совпадает с (25). Таким образом, исходя из (26) и (32), решение уравнения (25) следует искать в виде

$$\rho_0(s,x;t,y) = [\pi X(t)]^{-1/2} \exp\left[-X^{-1}\left(y - \int_s^t v_1(\tau)\,d\tau - x\right)^2\right], \tag{33}$$

$$X(t) = 2\sigma^2 + 2\int_s^t b_0(\tau)\,d\tau, \quad \sigma > 0.$$

Вводя обозначение

$$\psi = y - \int_s^t v_1(\tau)\,d\tau - x \tag{34}$$

и подставляя (33) в (25), найдём

$$-\frac{b_0}{X} + \frac{2\psi v_1}{X} + \frac{2b_0\psi^2}{X^2} - \frac{2\psi v_1}{X} = \frac{2b_0\psi^2}{X^2} - \frac{b_0}{X}, \tag{35}$$

т.е. тождество, как и следовало ожидать.

Рассмотрим теперь уравнение (25) в том случае, когда v_1 – функция только времени, а $b(t,y)$ – произвольная функция координат и времени, имеющая необходимые непрерывные производные. Коэффициент диффузии удобно для дальнейшего записать в виде

$$b(t,y) = b_0(t) + b_1(t,y), \tag{36}$$

$$b_1(t,y) = b(t,y) - b_0(t). \tag{37}$$

В соотношениях (36)-(37) $b(t,y)$ и $b_0(t)$ - положительно определённые функции, а $b_1(t,y)$ может иметь как положительное, так и отрицательное значение. С помощью (36) уравнение (25) можно записать в виде

$$\frac{\partial P}{\partial t}+v_1(t)\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{1}{2}b_0\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=\frac{1}{2}b_1(t,y)\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}. \tag{38}$$

Считая среду бесконечной, запишем начальное условие для уравнения (38) аналогично (3I):

$$P\Big|_{t=s}=[\pi 2\sigma_1^2]^{-1/2}\exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_1^2}\right],\quad \sigma_1>0. \tag{39}$$

Правую часть уравнения (38) можно рассматривать как эффективный источник возмущений; в соответствии с этим запишем его формальное решение

$$P(s,x;t,y)=\int dy'[\pi 2\sigma_1^2]^{-1/2}\exp\left[-\frac{(y'-x)^2}{2\sigma_1^2}\right]\mathscr{G}_0(s,y';t,y)+$$

$$+\int_s^t d\tau\int dy'\frac{1}{2}b_1(\tau,y')\frac{\partial^2 P(s,x;\tau,y')}{\partial y'^2}\cdot\mathscr{G}_0(\tau,y';t,y). \tag{40}$$

Здесь

$$\mathscr{G}_0(\tau,x;t,y)=\lim_{\sigma\to\sigma_0}P_0(\tau,x;t,y), \tag{4I}$$

а P_0 задано формулой (33), в которой σ_0 в соответствии с пределом (4I) - положительно определённая, но сколь угодно малая величина, так что функцию $\mathscr{G}_0$ под знаком интеграла при $\tau=t$ с произвольной наперёд заданной точностью можно заменить δ-функцией Дирака:

$$\lim_{t\to\tau}\mathscr{G}_0(\tau,y';t,y)=\delta(y'-y). \tag{42}$$

Учитывая (4I)-(42), видим, что при $t\to s$ функция (40) совпадает с (39). Поскольку функция $\mathscr{G}_0$ удовлетворяет уравнению

$$\mathscr{L}\mathscr{G}_0=\frac{\partial\mathscr{G}_0}{\partial t}+v_1\frac{\partial\mathscr{G}_0}{\partial y}-\frac{1}{2}b_0\frac{\partial^2\mathscr{G}_0}{\partial y^2}=0 \tag{43}$$

при начальном условии (42), то, действуя оператором $\mathscr{L}$ на левую и правую части (40), найдём:

$$\mathscr{L}P(s,x;t,y)=\frac{1}{2}b_1(t,y)\frac{\partial^2 P(s,x;t,y)}{\partial y^2}, \tag{44}$$

что совпадает с правой частью (38). Таким образом, функция (40) действительно является формальным решением уравнения (38).

Ясно, что соотношение (40) представляет собой интегродифференциальное уравнение для функции плотности вероятности перехода $P(s,x;t,y)$. Примем теперь, что выполняется условие нормировки (3). Интегрируя левую и правую части (40), находим:

$$\int dy\, P(s,x;t,y) = \int dy' [\pi 2\sigma_1^2]^{-1/2} \exp\left[-\frac{(y'-x)^2}{2\sigma_1^2}\right] +$$
$$+ \int_s^t d\tau \int dy' \frac{1}{2} b_1(\tau,y') \frac{\partial^2 P(s,x;\tau,y')}{\partial y'^2}. \tag{45}$$

В соотношении (45) учтено, что

$$\int dy\, \varphi_0(s,y';t,y) = 1. \tag{46}$$

Отсюда, учитывая (3), запишем

$$\int_s^t d\tau \int dy' b_1(\tau,y') \frac{\partial^2 P(s,x;\tau,y')}{\partial y'^2} = 0. \tag{47}$$

Дифференцируя (47) по времени t, можно также записать соотношение

$$\int dy' b_1(t,y') \frac{\partial^2 P(s,x;t,y')}{\partial y'^2} = 0. \tag{48}$$

Как нормировка (3), так и соотношения (47)-(48) констатируют сохранение, например, числа частиц. Возмущения, вносимые в коэффициент диффузии функцией $b_1(t,y)$, приводят лишь к перераспределению частиц в пространстве таким образом, что суммарный вклад по всему пространству в общее число частиц, естественно, оказывается равным нулю.

Решение уравнений (38) и (40), в силу аддитивности гауссовско-марковских процессов, можно искать в виде:

$$P(s,x;t,y) = \varphi_{\sigma_1}(s,x;t,y) + P_1(s,x;t,y). \tag{49}$$

Здесь функция

$$\varphi_{\sigma_1}(s,x;t,y) = \int dy' [\pi 2\sigma_1^2]^{-1/2} \exp\left[-\frac{(y'-x)^2}{2\sigma_1^2}\right] \varphi_0(s,y';t,y), \tag{50}$$

т.е. определяется первым членом в правой части (40). Подстановка (49) в (48) приводит к равенству:

$$\int dy' b_1(t,y') \frac{\partial^2 \varphi_{\sigma_1}(s,x;t,y')}{\partial y'^2} =$$
$$= -\int dy' b_1(t,y') \frac{\partial^2 P_1(s,x;t,y')}{\partial y'^2}. \tag{51}$$

Аналогичное равенство можно записать и для соотношения (47).

С помощью (49) из уравнения (40) следует уравнение для функции P_1:

$$P_1(s,x;t,y) = J_1(s,x;t,y) +$$
$$+ \int_s^t d\tau \int dy' \frac{1}{2} b(\tau,y') \frac{\partial^2 P_1(s,x;\tau,y')}{\partial y'^2} \cdot \varphi_0(\tau,y';t,y). \tag{52}$$

В уравнении (52) обозначено:

$$\int_s^t d\tau \int dy' \frac{1}{2} b_1(\tau, y') \frac{\partial^2 \varphi_{\sigma_1}(s,x;\tau,y')}{\partial y'^2} \cdot \varphi_0(\tau, y'; t, y) = \tag{53}$$
$$= \mathcal{J}_1(s,x;t,y).$$

Уравнение (52) учитывает существенное свойство функции P_1. Чтобы его увидеть, достаточно проинтегрировать левую и правую части (52) по переменной y:

$$\int dy\, P_1(s,x;t,y) = \int_s^t d\tau \int dy' \frac{1}{2} b_1(\tau,y') \frac{\partial^2 \varphi_{\sigma_1}(s,x;\tau,y')}{\partial y'^2} + \tag{54}$$
$$+ \int_s^t d\tau \int dy' \frac{1}{2} b_1(\tau,y') \cdot \frac{\partial^2 P_1(s,x;\tau,y')}{\partial y'^2}.$$

Объединяя члены в правой части (54) и учитывая (49) и (47), запишем

$$\int dy\, P_1(s,x;t,y) = 0. \tag{55}$$

Свойство (55) непосредственно вытекает также из соотношений (3) и (49). Действительно, интегрируя (49) по y, найдём

$$1 = 1 + \int dy\, P_1(s,x;t,y),$$

т.е. снова реализуется равенство (55).

Аналогично (49), решение уравнения (52) можно искать в виде

$$P_1(s,x;t,y) = \mathcal{J}_1(s,x;t,y) + P_2(s,x;t,y). \tag{56}$$

Подставляя (56) в (52), найдём

$$P_2(s,x;t,y) = \mathcal{J}_2(s,x;t,y) + \tag{57}$$
$$+ \int_s^t d\tau \int dy' \frac{1}{2} b_1(\tau,y') \frac{\partial^2 P_2(s,x;\tau,y')}{\partial y'^2} \cdot \varphi_0(\tau,y';t,y).$$

В уравнении (57)

$$\mathcal{J}_2(s,x;t,y) = \int_s^t d\tau \int dy' \frac{1}{2} b_1(\tau,y') \frac{\partial^2 \mathcal{J}_1(s,x;\tau,y')}{\partial y'^2} \cdot \varphi_0(\tau,y';t,y). \tag{58}$$

Ясно, что подстановки вида (56) могут быть продолжены и далее:

$$P_2 = \mathcal{J}_2 + P_3, \ldots, P_k = \mathcal{J}_k + P_{k+1}, \tag{59}$$
$$k = 1,2,3,\ldots$$

Таким образом, возникает цепочка уравнений:

$$P_k(s,x;t,y) = \mathcal{J}_k(s,x;t,y) + \tag{60}$$
$$+ \int_s^t d\tau \int dy' \frac{1}{2} b_1(\tau,y') \frac{\partial^2 P_k(s,x;\tau,y')}{\partial y'^2} \cdot \varphi_0(\tau,y';t,y),$$
$$k = 1,2,3,\ldots,$$

$$\mathcal{J}_k(s,x;t,y) = \int_s^t d\tau \int dy' \frac{1}{2} b_1(\tau,y') \frac{\partial^2 \mathcal{J}_{k-1}(s,x;\tau,y')}{\partial y'^2} \cdot \varphi_0(\tau,y';t,y), \tag{61}$$

где, в соответствии с (53), следует формально положить

$$\mathcal{J}_0 = \mathcal{Y}_{\sigma_1}. \tag{62}$$

Из соотношений (49), (56) и (59) следует

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{Y}_{\sigma_1} + \mathcal{P}_1 = \mathcal{Y}_{\sigma_1} + \mathcal{J}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{Y}_{\sigma_1} + \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{P}_3 = \ldots = \\ &= \mathcal{Y}_{\sigma_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{J}_k + \mathcal{P}_n. \end{aligned} \tag{63}$$

Процедура подстановок (59) представляет собой своеобразный метод итераций, в котором сумма остаточных членов, не учтённых явно в (63), удовлетворяет уравнению (60) при $k=n$. Если существует непрерывное решение уравнения (60) при $k=n$, то ряд (63) является конечным при любом значении n, т.е. сходится. Для существования непрерывного решения уравнения (60) необходимо, чтобы существовали вторые непрерывные производные по переменной y' от функций $\mathcal{P}_k$ и $\mathcal{J}_k$ при всех значениях k. Это обстоятельство действительно имеет место, если учесть, что функция $\mathcal{P}$, удовлетворяющая уравнению (38), имеет не менее двух непрерывных производных, а функции $\mathcal{Y}_{\sigma_1}$ и $\mathcal{Y}_0$ имеют произвольное число непрерывных производных по переменной y. В самом деле, из только что сказанного и соотношения (49) следует, что функция $\mathcal{P}_1$ имеет не менее двух непрерывных производных. Учитывая, что функция $\mathcal{J}_1$ имеет сколько угодно непрерывных производных по переменной y, из соотношения (56) видим: $\mathcal{P}_2$ имеет не менее двух непрерывных производных по переменной y. Отсюда вытекает: $\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, \ldots$ имеют произвольное число производных по переменной y, а функции $\mathcal{P}_k$, согласно цепочке (59), имеют не менее двух непрерывных производных по y. Кроме того, считая функцию $\mathcal{B}_1(t, y)$ ограниченной и непрерывной во всём пространстве, что уже отмечалось ранее, а также учитывая свойства функций $\mathcal{Y}_0$ и $\mathcal{Y}_{\sigma_1}$, можно утверждать, что все интегралы, входящие в цепочку итераций, являются сходящимися. Это означает тогда, что правая часть уравнений (60) при любом $k=n$ является конечной непрерывной величиной, что и означает ограниченность функции $\mathcal{P}_n$, входящей в (63) при произвольном значении n. Последнее же и означает сходимость ряда (63).

Существенно обратить внимание на следующее обстоятельство. Функции $\mathcal{P}_k$, определяемые уравнениями (60), удовлетворяют начальным условиям:

$$\mathcal{P}_k\big|_{t=s} = \mathcal{J}_k\big|_{t=s} \equiv 0, \tag{64}$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

Вид уравнений (60) остаётся неизменным при всех значениях k. Отсюда можно заключить, что существует подобие в зависимостях от времени функций $\mathcal{P}_k$ при различных значениях k, несмотря на существенное различие их зависимостей от переменной y. В соответствии с этим, возвращаясь к уравнению (52), можно попытаться искать его решение в виде

$$P_1(s,x;t,y) = \mathcal{J}_1(s,x;t,y) + \phi(s,x;t,y)\mathcal{J}_2(s,x;t,y), \tag{65}$$

где ϕ – искомая функция. Учитывая сказанное о подобии функций P_k, введём среднее значение функции ϕ по переменной y соотношением

$$\theta(x,t)\int \mathcal{J}_2(s,x;t,y)dy = \int \phi(s,x;t,y)\mathcal{J}_2(s,x;t,y)dy. \tag{66}$$

Здесь $\theta(x,t)$ – усреднённая функция ϕ по переменной y; при этом роль весовой усредняющей функции играет $\mathcal{J}_2$.

Подставляя функцию (65) в левую часть уравнения (52) и интегрируя его по переменной y, запишем

$$\int \phi(s,x;t,y)\mathcal{J}_2(s,x;t,y)dy = \\ = \int_s^t d\tau \int dy' \frac{1}{2} b_1(\tau,y') \frac{\partial^2 P_1(s,x;\tau,y')}{\partial y'^2}. \tag{67}$$

Правую часть (67) выразим в соответствии с соотношениями (49) и (47):

$$\int \phi(s,x;t,y)\mathcal{J}_2(s,x;t,y)dy = \\ = -\int_s^t d\tau \int dy' \frac{1}{2} b_1(\tau,y') \frac{\partial^2 \psi_{01}(s,x;\tau,y')}{\partial y'^2}. \tag{68}$$

С помощью (66) из (68) следует

$$\theta(x,t)\mathcal{J}_2^\circ = -\mathcal{J}_1^\circ, \tag{69}$$

где обозначено

$$\mathcal{J}_2^\circ = \int \mathcal{J}_2(s,x;t,y)dy, \quad \mathcal{J}_1^\circ = \int \mathcal{J}_1(s,x;t,y)dy. \tag{69'}$$

Таким образом, функцию $\theta(x,t)$ можно считать определённой. Исходя из этого и подставляя (69) в левую часть (66), найдём интегральное уравнение для функции ϕ. Как видно, это уравнение точно совпадает с (68). Наконец, существенно отметить, что уравнение (68) непосредственно следует из представления (65) и соотношения (55):

$$\int dy P_1(s,x;t,y) = \int dy\left[\mathcal{J}_1(s,x;t,y) + \phi(s,x;t,y)\mathcal{J}_2(s,x;t,y)\right] = 0, \tag{70}$$

или

$$\int dy\, \phi(s,x;t,y)\mathcal{J}_2(s,x;t,y) = -\mathcal{J}_1^\circ. \tag{71}$$

Аналитическое решение уравнения (71), конечно, найти весьма непросто. Однако обнадёживает тот факт, что имеет место подобие итераций, констатируемое соотношением (69). Действительно, если выбрать в качестве "нулевого" приближения функцию

$$\phi^{(0)} = \theta(x,t) = -\frac{J_1^o}{J_2^o}, \tag{72}$$

то подстановка её в уравнение (7I) приводит к соотношению

$$\int dy \left(-\frac{J_1^o(x,t)}{J_2^o(x,t)}\right) J_2(s,x;t,y) = -J_1^o,$$

или

$$-\frac{J_1^o}{J_2^o}\int dy\, J_2(s,x;t,y) = -J_1^o, \tag{73}$$

т.е. к тождеству. Тождество (73), вообще говоря, не означает, что решение уравнения (7I) исчерпано. С учётом (72)-(73) его можно представить в форме

$$\phi(s,x;t,y) = \theta(x,t) + \phi_1(s,x;t,y). \tag{74}$$

Подставляя (74) в (7I), найдём

$$\int dy \left[-\frac{J_1^o}{J_2^o} + \phi_1(s,x;t,y)\right] J_2(s,x;t,y) = -J_1^o,$$

или, учитывая (73),

$$\int dy\, \phi_1(s,x;t,y) J_2(s,x;t,y) = 0. \tag{75}$$

Из уравнения (75) отнюдь не следует, что $\phi_1 \equiv 0$, поскольку условия известной леммы /2/, согласно которой это могло бы реализоваться, в данном случае не выполняются. Тем не менее решение уравнения (38) в частично сглаженном (осреднённом) виде можно представить формулой

$$\rho(s,x;t,y) = \mathcal{U}_{6_1} + J_1(s,x;t,y) + \theta(x,t) J_2(s,x;t,y). \tag{76}$$

В решении (76) отброшен член

$$\phi_1(s,x;t,y) J_2(s,x;t,y),$$

который, согласно (75), вносит суммарный по всему пространству вклад, равный нулю. Формула (76) учитывает явно две первые итерации, входящие в сумму (63). Поскольку в принятых выше условиях ряд (63) можно считать сходящимся, то учёт всех членов ряда при $K \geqslant 3$ в их осреднённом (сглаженном) виде с помощью функции $\theta(x,t)$ позволяет надеяться, что точности решения (76) вполне достаточно для применений на практике. Кроме того, если потребуется уточнение решения (76), то сглаживание решения можно произвести на любой последующей итерации с номером $K \geqslant 3$.

Теперь можно приступить к решению уравнения (30). Исходя из предыдущего, естественно рассмотреть его, прежде всего, для случая, когда скорость транспорта вещества $\vartheta_1(t,y)$ – произвольная функция координат и времени, имеющая необходимое число непрерывных производных, а коэффициент диффузии зависит только от времени. Именно в этом случае можно надеяться на прямое обобщение решения вида (33) при поиске решения уравнения (30). Действительно, учитывая преобразование (26), можно записать

$$\rho_0(s,x;t,y) = [\pi X(t)]^{-1/2} \exp\left[-X^{-1}\left(y - \int_s^t v_1(\tau, y'')d\tau - x\right)^2\right], \tag{77}$$

$$X(t) = 2\sigma^2 + 2\int_s^t b_0(\tau)d\tau, \qquad \sigma > 0.$$

Снова вводя обозначение

$$\psi = y - \int_s^t v_1(\tau, y'')d\tau - x = y'' - x, \tag{78}$$

проверим решение (77) прямой подстановкой в уравнение (30). Для этого вычислим необходимые производные, принимая во внимание свойства якобианов (27)-(28):

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \rho_0\left[-\frac{b_0}{X} + \frac{2b_0\psi^2}{X^2} + \frac{2v_1\psi}{X}\right], \tag{79}$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial y} = \tilde{J}\frac{\partial \rho_0}{\partial y''} = -\rho_0\frac{2\psi}{X}\cdot\tilde{J}, \tag{80}$$

$$\frac{\partial^2 \rho_0}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y''}\left(\rho_0\frac{2\psi}{X}\tilde{J}\right)\cdot\tilde{J} = \tag{81}$$

$$= \rho_0\left[\frac{4\psi^2}{X^2}\cdot\tilde{J}^2 - \frac{2}{X}\tilde{J}^2 - \frac{2\psi}{X}\tilde{J}\frac{\partial \tilde{J}}{\partial y''}\right].$$

Подставляя производные (79)-(81) в уравнение (30), приходим к соотношению

$$-\frac{b_0}{X} + \frac{2b_0\psi^2}{X^2} + \frac{2v_1\psi}{X} - v_1\frac{2\psi}{X} -$$

$$-\frac{1}{2}b_0\left[\frac{4\psi^2}{X^2} - \frac{2}{X} - \frac{2\psi}{X}J\frac{\partial \tilde{J}}{\partial y''} - \frac{2\psi}{X}\cdot\tilde{J}\frac{\partial J}{\partial y''}\right] = 0. \tag{82}$$

Последние два члена в левой части соотношения (82) объединяются:

$$-\frac{2\psi}{X}\left(J\frac{\partial \tilde{J}}{\partial y''} + \tilde{J}\frac{\partial J}{\partial y''}\right) = -\frac{2\psi}{X}\cdot\frac{\partial}{\partial y''}(\tilde{J}J) = \tag{83}$$

$$= -\frac{2\psi}{X}\frac{\partial}{\partial y''}(1) = 0.$$

Учитывая (83), запишем окончательно

$$-\frac{b_0}{X} + \frac{2b_0\psi^2}{X^2} + \frac{2v_1\psi}{X} - \frac{2v_1\psi}{X} - \tag{84}$$

$$-\frac{2b_0\psi^2}{X^2} + \frac{b_0}{X} = 0.$$

Тождество (84) констатирует, что функция (77) является решением уравнения (30). При $t=s$ плотность вероятности перехода (77) удовлетворяет начальному условию (3I). Как видно, решение (33) является частным случаем функции (77).

Следует остановиться на специфике нормировки функции плотности вероятности перехода (77). Естественно, что она должна сохранять нормировку начального условия (3I). Это будет иметь место, если нормировку записать соотношением:

$$\int P_0(s,x;t,y'')\,dy''=1,\qquad -\infty<x,y''<\infty,\quad t\geq s, \tag{85}$$

где y' имеет смысл, соответствующий преобразованию (26). В начальный момент времени $t=s$, согласно (3I), соотношение (85) автоматически выполняется. Соотношению (85) соответствует интеграл от функции (77):

$$\int [\pi X(t)]^{-1/2}\exp\left[-X^{-1}(y''-x)^2\right]dy''=1. \tag{86}$$

Равенство (86), очевидно, выполняется в любой момент времени $t\geq s$. Переходя к обозначениям (77), согласно (86), запишем

$$\int [\pi X(t)]^{-1/2}\exp\left[-X^{-1}\left(y-\int_s^t v_1(\tau,y'')d\tau-x\right)^2\right]\cdot J\,dy=1. \tag{87}$$

Здесь якобиан J вычисляется в соответствии с преобразованием (26) и определениями (27).

Решение (77), аналогично предыдущему, позволяет рассмотреть уравнение (30) для общего случая, когда коэффициенты $v_1(t,y)$, $b(t,y)$ – произвольные функции координат и времени, имеющие необходимое число непрерывных производных. С помощью равенств (36)-(37) уравнение (30) запишем в форме:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+v_1 J\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{1}{2}b_0(t)\left[J^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial J}{\partial y''}\frac{\partial P}{\partial y}\right]= =\frac{1}{2}b_1(t,y)\left[J^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial J}{\partial y''}\cdot\frac{\partial P}{\partial y}\right], \tag{88}$$

где функция P существенно отличается от (77). Для краткости запишем уравнение (88) в операторном виде:

$$\mathcal{L}_0(t,y)P(s,x;t,y)=\mathcal{L}_1(t,y)P(s,x;t,y), \tag{89}$$

где $\mathcal{L}_0$ – оператор левой части (88), а $\mathcal{L}_1$ – оператор его правой части. Введём также обозначения для функции (77):

$$P_0\Big|_{\sigma=\sigma_1} = \mathcal{Y}_{\sigma_1}(s,x;t,y),\ \sigma_1>0;\qquad \lim_{\sigma\to\sigma_0} P_0 = \mathcal{Y}_0(s,x;t,y). \tag{90}$$

В соотношениях (90) $\sigma_0>0$, но является сколь угодно малой величиной. Таким образом, при $t=s$ под знаком интеграла функцию $\mathcal{Y}_0$ с любой наперёд заданной точностью можно заменить δ-функцией Дирака.

Учитывая изложенное ранее, решение уравнения (88) можно искать в виде:

$$P = \mathcal{Y}_{\sigma_1}(s,x;t,y) + \int_s^t d\tau \int dy' \mathcal{F}(s,x;\tau,y')\, \mathcal{Y}_0(\tau,y';t,y). \tag{91}$$

Здесь $\mathcal{F}$ – искомая функция, для которой следует найти соответствующее уравнение. Последнее может быть найдено с помощью подстановки функции (91) в уравнение (89). Для этого вычислим величину:

$$\mathcal{L}_0(t,y)P(s,x;t,y) = \mathcal{L}_0(t,y)\,\mathcal{Y}_{\sigma_1}(s,x;t,y) + \int_s^t d\tau \int dy' \mathcal{F}(s,x;\tau,y')\mathcal{L}_0(t,y)\,\mathcal{Y}_0(\tau,y';t,y) + \int dy' \mathcal{F}(s,x;t,y')\,\mathcal{Y}_0(t,y';t,y). \tag{92}$$

Поскольку функции (90) тождественно удовлетворяют уравнению (30) при $b=b_0(t)$, то, учитывая свойства функции $\mathcal{Y}_0$, запишем:

$$\mathcal{L}_0(t,y)P(s,x;t,y) = \mathcal{F}(s,x;t,y). \tag{93}$$

Далее, величина

$$\mathcal{L}_1(t,y)P(s,x;t,y) = \mathcal{L}_1(t,y)\,\mathcal{Y}_{\sigma_1}(s,x;t,y) + \int_s^t d\tau \int dy' \mathcal{F}(s,x;\tau,y')\mathcal{L}_1(t,y)\,\mathcal{Y}_0(\tau,y';t,y). \tag{94}$$

Подстановка (93)-(94) в уравнение (89) приводит к интегральному уравнению

$$\mathcal{F}(s,x;t,y) = \mathcal{F}_0(s,x;t,y) + \int_s^t d\tau \int dy' \mathcal{F}(s,x;\tau,y')\,\mathcal{L}_1(t,y)\,\mathcal{Y}_0(\tau,y';t,y), \tag{95}$$

в котором обозначено

$$\mathcal{F}_0(s,x;t,y) = \mathcal{L}_1(t,y)\,\mathcal{Y}_{\sigma_1}(s,x;t,y). \tag{96}$$

Корректности ради следует подчеркнуть, что интегрирования в соотношениях (9I)-(95) по смежной переменной y' имеют тот же смысл, что и в нормировках (85)-(86).

Как и ранее, решение уравнения (95) можно искать методом итераций, записывая его в виде

$$\mathcal{F}(s,x;t,y)=\mathcal{F}_0(s,x;t,y)+\mathcal{F}_1(s,x;t,y). \tag{97}$$

Подстановка (97) в (95) приводит к уравнению

$$\mathcal{F}_1(s,x;t,y)=\mathcal{F}_{01}(s,x;t,y)+$$
$$+\int_s^t d\tau\int dy'\,\mathcal{F}_1(s,x;\tau,y')\,\mathcal{L}_1(t,y)\,\mathcal{G}_0(\tau,y';t,y). \tag{98}$$

Здесь

$$\mathcal{F}_{01}(s,x;t,y)=\int_s^t d\tau\int dy'\,\mathcal{F}_0(s,x;\tau,y')\,\mathcal{L}_1(t,y)\,\mathcal{G}_0(\tau,y';t,y). \tag{98'}$$

Как и при поиске решения уравнения (38),найдем решение уравнения (95) методом сглаживания. Для этого запишем его в виде

$$\mathcal{F}=\mathcal{F}_0(s,x;t,y)+\psi(s,x;t,y)\,\mathcal{F}_{01}(s,x;t,y). \tag{99}$$

Введём среднее значение функции ψ по весовой функции $\mathcal{F}_{01}$:

$$\theta(x,t)\int\mathcal{F}_{01}(s,x;t,y)\,dy=\int\psi(s,x;t,y)\,\mathcal{F}_{01}(s,x;t,y)\,dy. \tag{I00}$$

Снова принимая условие нормировки (3) для функции ρ и интегрируя соотношение (9I) по переменной y, находим

$$1=1+\int_s^t d\tau\int dy'\,\mathcal{F}(s,x;\tau,y'),$$

или

$$\int_s^t d\tau\int dy'\,\mathcal{F}(s,x;\tau,y')=0. \tag{I0I}$$

Дифференцируя (I0I) по времени, запишем

$$\int dy'\,\mathcal{F}(s,x;t,y')=0. \tag{I02}$$

Подставляя функцию (99) в соотношение (I02), находим

$$\int dy'\,\mathcal{F}_0(s,x;t,y')+\int dy'\,\psi(s,x;t,y')\,\mathcal{F}_{01}(s,x;t,y')=0. \tag{I02'}$$

Согласно определению (I00), теперь можно записать

$$\varphi_0(x,t)+\theta(x,t)\,\varphi_{01}(x,t)=0, \tag{I03}$$

где

$$\varphi_0(x,t)=\int dy'\,\mathcal{F}_0(s,x;t,y'),$$
$$\varphi_{01}(x,t)=\int dy'\,\mathcal{F}_{01}(s,x;t,y'). \tag{I03'}$$

Таким образом,
$$\theta(x,t) = -\frac{\varphi_0(x,t)}{\varphi_{01}(x,t)}, \qquad (104)$$
и решение (99) в сглаженном (осреднённом) виде можно записать формулой
$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0(s,x;t,y) + \theta(x,t)\,\mathcal{F}_{01}(s,x;t,y). \qquad (105)$$
Соотношения (9I) и (I05) определяют решение уравнения (88) в сглаженном виде.

Теперь можно вернуться к уравнению (23). Так же, как и уравнение (25), оно может быть преобразовано к виду, учитывающему деформации движущегося макроэлемента:
$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + v_1 J \frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{1}{2} b(t,y)\left[J^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + \frac{\partial J}{\partial y''}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial y}\right] = Q(t,y)\, e^{\int_s^t a_0(t')dt'}. \qquad (106)$$
Пусть начальное условие для функции f_0 задано в виде
$$f_0\big|_{t=s} = \int \varphi_0(y')P(s,y';s,y'')dy', \qquad y\big|_{t=s} = y'', \qquad (107)$$
где y'' соответствует преобразованию (26). Тогда с помощью плотности вероятности перехода, определяемой формулами (9I) и (I05), можно записать общее решение уравнения (I06) для неограниченной системы:
$$f_0(t,y) = \int \varphi_0(y')P(s,y';t,y)dy' + \int_s^t d\tau \int dy'\, Q(\tau,y')\, e^{\int_s^\tau a_0(t')dt'} \cdot P(\tau,y';t,y), \qquad (108)$$
или, согласно (24),
$$f(t,y) = g^-(s,t)\int \varphi_0(y')P(s,y';t,y)dy' + g^-(s,t)\int_s^t d\tau \int dy'\, Q(\tau,y')\, g^+(s,\tau) P(\tau,y';t,y), \qquad (109)$$
где обозначено
$$g^{\pm}(s,t) = \exp\left[\pm\int_s^t a_0(t')dt'\right]. \qquad (109')$$
С помощью решения (I09) может быть рассмотрен широкий класс задач теории диффузии и теплопроводности, учитывающей транспорт тепла и вещества, а также деформации движущегося макроэлемента.

В силу независимости гауссовско-марковских процессов по всем координатным направлениям проведённое выше рассмотрение может быть обобщено на трёхмерное пространство. Однако это выходит за рамки данной работы.

Литература

I. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. Москва, Наука, 1985.

2. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.IУ. Москва-Ленинград, ГИТТЛ, 1951.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 января 1990 года.