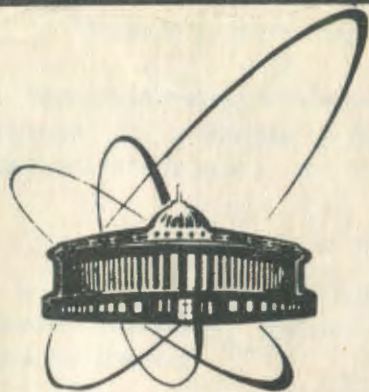


90-136



объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

В 488

Р4-90-136

С.И.Виницкий, А.А.Сузько *

ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ
И ТРЕХЧАСТИЧНЫЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ
В АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

*Институт тепло- и массообмена АН БССР, Минск

1990

1. Введение и постановка задачи

При адиабатическом описании [1,2] квантовых систем выделяются медленная s и быстрая f подсистемы, т.е. гамильтониан H представляется в виде

$$H = h^s + h^f, \quad (1)$$

где h^f - параметрическое семейство гамильтонианов, зависящее от медленных переменных. Полная волновая функция системы представляется в виде разложения

$$\Psi(\vec{X}) = \sum_n \psi_n(X, \cdot) X_n(X) \quad (2)$$

по собственным состояниям $\psi_n(X, \cdot)$ гамильтониана быстрого движения $h^f(X, \cdot)$ при каждом фиксированном значении медленной переменной X :

$$h^f(X, \cdot) \psi_n(X, \cdot) = \varepsilon_n(X) \psi_n(X, \cdot). \quad (3)$$

Точкой мы обозначаем быстрые переменные, которые в дальнейшем будут определяться в зависимости от конкретной постановки задачи.

Подстановка разложения (2) в исходное уравнение Шредингера

$$H \Psi(\vec{X}) = E \Psi(\vec{X}) \quad (4)$$

и усреднение по быстрым переменным движущегося репера $\psi_n(X, \cdot)$ приводит к многоканальной задаче рассеяния для коэффициентов χ :

$$[-D^2(X) + U(X) - \not{p}^2] \chi(X) = 0. \quad (5)$$

Здесь $D(X) = \partial_X + iA(X)$ - ковариантная производная, $A(X)$ - эффективный векторный потенциал, генерируемый функциями базиса $\psi_n(X, \cdot)$:

$$A_{nm}(X) = -i \langle \psi_n | \partial_X \psi_m \rangle. \quad (6)$$

Эффективный скалярный потенциал $U(X) = U^f(X) + U^s(X)$ состоит из двух частей: диагональной потенциальной матрицы

$$U_{nm}^f(X) = \{ \langle \psi_n(X, \cdot) | h^f(X, \cdot) | \psi_m(X, \cdot) \rangle - \varepsilon_n(X \rightarrow \infty) \} \delta_{nm}, \quad (7)$$

элементы которой совпадают с энергетическими уровнями $\mathcal{E}_m(x)$ мгновенного гамильтониана \hat{h}^f (3), и некоторой дополнительной потенциальной матрицы $V^S(x)$, содержащейся только в системе уравнений (5), зависящей от медленных переменных

$$V_{nm}^S(x) = \langle \psi_n(x, \cdot) | V^S(x, \cdot) | \psi_m(x, \cdot) \rangle. \quad (8)$$

(В частности, при $V^S(x) = 0$ задача упрощается).

При каждом фиксированном значении медленной переменной X функции базиса $\psi_n(x, \cdot)$ образуют полный, ортонормированный набор функций

$$\begin{aligned} \langle n | m \rangle &= \int dy \psi_n^\dagger(x, y) \psi_m(x, y) = \delta_{nm}, \\ \int_n \psi_n(x, y) \psi_n^\dagger(x, y') &= \delta(y - y'). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь через y, y' обозначены быстрые переменные. Используя эти соотношения, определим в некоторой фиксированной точке \hat{X} репер

$$|e\rangle = |\psi(\hat{X}, \cdot)\rangle.$$

Движущийся репер $\psi(x, \cdot)$ связан с фиксированным $|e(\cdot)\rangle$ с помощью унитарного биллокального оператора $\mathcal{U}(x, \hat{x}) = \mathcal{U}(x)$, $\mathcal{U}^\dagger(x) = \mathcal{U}^\dagger(x)$:

$$|\psi(x, \cdot)\rangle = |e\rangle \mathcal{U}(x, \hat{x}), \quad (10)$$

$$\mathcal{U}(x, \hat{x}) = \langle e | \psi(x, \cdot) \rangle,$$

осуществляющего параллельный перенос репера из \hat{X} в X . Из определения оператора A (6) и с учетом (10) и (9) получаем

$$\mathcal{U}(x, \hat{x}) = i \text{P exp} \int_x^{\hat{x}} A(x') dx'. \quad (11)$$

На основе адиабатического представления в работах [2-5] даны постановки прямой и обратной трехчастичных задач рассеяния. Здесь на их основе разрабатывается метод, позволяющий генерировать широкий класс точно решаемых многомерных и многочастичных моделей. До настоящего времени исследован один класс точно решаемых парных потенциалов системы N -взаимодействующих частиц, расположенных на прямой [6, 7]. Отметим, что в работах [3-5] уже указывалось, что можно конструировать точно решаемые трехчастичные модели на основе обратной задачи в адиабатическом подходе с учетом правильных граничных условий для процессов рассеяния как с перераспределением частиц, так и с развалом. Поскольку 3-частичная задача сводится, по сути дела, к многомерной,

имеющей также и самостоятельный интерес, в данной работе мы сконцентрируем основное внимание на построении точно решаемых многомерных моделей, не забывая параллельно рассматривать системы трех частиц, и детально разберем некоторые простые, с точки зрения обратной задачи, примеры получения аналитических решений.

Для получения в явном виде решений многомерного уравнения Шредингера (4) с использованием адиабатического представления (2) необходимо уметь точно решать уравнения меньшей размерности (3) для быстрого движения, а также системы связанных уравнений (5) для медленного движения. Таким целям в наибольшей мере отвечает аппарат обратной задачи рассеяния, который позволяет генерировать точно решаемые модели как для систем одномерных уравнений, так и для двух- и трехмерных уравнений в частных производных [8,9,10].

В работах [3-5] при исследовании 3-частичных взаимодействий мы сформулировали обратную задачу рассеяния для систем уравнений с удлиненной производной $D(\hbar) = \partial_x + iA(x)$, причем A является антиэрмитовой матрицей (6), играющей роль калибровочного потенциала. До появления этих работ обратная задача для систем уравнений с зацеплением за счет оператора кинетической энергии не была сформулирована [8].

Такая задача сводится к определению S^+ -матрицы, отвечающей системе (5), по известным многомерным амплитудам $f(\hat{X}, \vec{P})$ и последующему восстановлению эффективных векторной $A(x)$ и потенциальной $U(x)$ матриц, а также решений χ . Принципиально она решена благодаря использованию унитарного преобразования калибровочного типа (II), приводящего систему (5) к системе обыкновенных уравнений с зацеплением за счет эффективной потенциальной матрицы. Тем самым были созданы предпосылки для генерирования широкого класса точно решаемых моделей для многомерных и многочастичных объектов.

Однако задача решена не полностью, пока не определен исходный многомерный потенциал $V^f(x)$. В общей постановке, когда заранее не известен потенциал $V^f(x)$, его нельзя определить, как в обычной многоканальной теории рассеяния [8], даже после того, как по заданной S^+ -матрице найдены потенциальные матричные элементы $V^f(x) = \langle \psi | V^f(x) | \psi \rangle$ системы (5). Дело в том, что здесь базисные функции $\psi(x, \cdot)$ определяются тем же потенциалом $V^f(x, \cdot)$ при решении "быстрого" уравнения (3), параметрически зависящего от медленных переменных. Восстановить потенциал $V^f(x, \cdot)$ и найти функции движущего репера $\psi(x, \cdot)$ можно с помощью формализма обратной задачи для уравнения (3) при параметрической зависимости данных рассеяния

от медленных переменных, определяемой при решении "медленной" системы уравнений (5). Это второй важный момент адиабатического представления, интересный в связи с новой постановкой обратной задачи с параметрической зависимостью от медленных переменных. Ситуация до известной степени аналогична теории нелинейных эволюционных уравнений. Наш подход может быть обобщен и на нелинейные уравнения. Однако мы имеем дело со значительно более сложной системой уравнений (5) для определения параметрической зависимости спектральных данных от медленных переменных, вместо простого эволюционного уравнения в теории солитонов. На основе многоканальной и одноканальной техники баргмановских потенциалов для преобразованной системы уравнений (5) и параметрически зависящего уравнения (3) мы предлагаем способ аналитического моделирования эффективных взаимодействий в многомерных и трехчастичных задачах и нахождения соответствующих решений.

Итак, в данной работе рассматривается многомерная обратная задача в адиабатическом подходе, которая представлена в виде двух обратных задач: одна - для уравнения Шредингера (3), описывающего быструю динамику при параметрической зависимости от медленных переменных, другая - для системы уравнений (5), описывающей медленное движение. Дан способ конструирования точно решаемых моделей для обоих этих случаев, а тем самым и для полной многомерной задачи (4).

2. Обратная задача для системы уравнений, описывающей медленную динамику

В результате калибровочного преобразования (II) эффективные скалярные и векторные потенциальные матрицы в (5) принимают вид

$$V'(x) = \mathcal{U} V \mathcal{U}^{-1}, \quad (12)$$

$$A'(x) = \mathcal{U} A \mathcal{U}^{-1} - i \mathcal{U}^{-1} \frac{d}{dx} \mathcal{U}. \quad (13)$$

При этом система уравнений (5) сводится к обычной многоканальной системе уравнений с потенциальным зацеплением

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V'(x) - \lambda^2 \right] \chi'(x, \lambda) = 0, \quad (14)$$

$$\lambda = i \left(\frac{E - \epsilon_n(x \rightarrow \infty)}{2} \right)^{1/2}, \quad \lambda_n = \sqrt{E - \epsilon_n(x \rightarrow \infty)}$$

для новых коэффициентов χ' , связанных со старыми χ соотношением

$$\chi'(x, p) = \mathcal{Q}'(x) \chi(x, p). \quad (I5)$$

Теперь мы можем применить стандартные методы многоканальной обратной задачи для системы уравнений (I4), если известна отвечающая ей матрица рассеяния $\hat{S}(p)$ и информация по состояниям дискретного спектра: их положениям $\{E_\lambda\}$ и нормировкам $\{M_\lambda\}$. Вследствие унитарного произвола в калибровке радиальных функций оказывается, что

$$M'_\lambda = M_\lambda, \quad (I6a)$$

$$\hat{S}'(p) = \hat{S}(p). \quad (I6b)$$

Действительно, подставим в определение нормировочных матриц M'_λ соотношение связи (I5) и воспользуемся свойством унитарности матриц $\mathcal{Q}(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} M'_\lambda &= \left[\int_0^\infty dx \tilde{F}(i\alpha_\lambda, x) F'(i\alpha_\lambda, x) \right]^{-1} \\ &= \left[\int_0^\infty dx \tilde{F}(i\alpha_\lambda, x) \mathcal{Q}'^{-1}(x) \mathcal{Q}(x) F(i\alpha_\lambda, x) \right]^{-1} = M_\lambda \\ &\quad ((i\alpha_\lambda)^2 = E_\lambda < 0). \end{aligned}$$

Для полноты изложения повторим также вывод соотношения (I6b), предложенный в [3]. Как известно, унитарная по открытым каналам симметричная \hat{S}' -матрица, отвечающая системе (I4), определяется следующим образом:

$$\hat{S}'(p) = \bar{p}^{-1/2} \mathcal{F}'_-(p) (\mathcal{F}'_+(p))^{-1} \bar{p}^{1/2}. \quad (I7)$$

Используя соотношение (I5) в стандартном определении матричных функций Йоста $\mathcal{F}'_\pm(p)$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_\pm(p) &= W \{ \tilde{F}'_\pm(x, p), \Phi'(x, p) \} = W \{ \tilde{F}_\pm(x, p), \Phi(x, p) \} + (I8) \\ &+ 2 \tilde{F}'_\pm(x, p) A(x) \Phi(x, p) = W_D \{ \tilde{F}_\pm(x, p), \Phi(x, p) \} - \mathcal{F}_\pm(p). \end{aligned}$$

Здесь Φ' и Φ -матрицы регулярных решений систем уравнений (I4) и (5) соответственно. Знак " \sim " используется для обозначения транспонирования. Но такими матричными решениями Йоста определяется \hat{S} -матрица, отвечающая системе (5):

$$S'(p) = \bar{F}^{-1/2} F_-(p) F_+(p) p^{1/2}. \quad (19)$$

В итоге, учитывая (18), получаем (166). Пока предполагается, что нет квазипересечений уровней $\mathcal{E}_n(x)$, ответственных за нарушение унитарности \mathcal{U} в этих точках, возникновение вследствие этого сингулярных членов в (14) и нетривиальной топологической фазы Берри [11] в данных рассеяния.

В обобщенном подходе Марченко [12], когда опорный потенциал $V(x) \neq 0$, основные матричные уравнения обратной задачи, соответствующие системе уравнений (14), следующие:

$$K(x, x') + Q(x, x') + \int_x^\infty \tilde{K}(x, t) Q(t, x') dt = 0, \quad (20)$$

$$U'(x) = -U^0'(x) - 2 \frac{d}{dx} K(x, x), \quad (21)$$

$$F'(x, p) = \tilde{F}'(x, p) + \int_x^\infty \tilde{K}(x, x') \tilde{F}'(x', p) dx'. \quad (22)$$

Матрицы решений Йоста $F'(x, p) \tilde{F}'(x, p)$ связаны с решениями Йоста $F(x, p)$, $\tilde{F}(x, p)$ в соответствии с (15). Система уравнений (20) решается относительно матричного ядра обобщенного сдвига $K(x, t)$ при известном ядре $Q(x, t)$, определяемом данными рассеяния $\{S'(p), \{M_\lambda\}, \{E_\lambda\}$ и $\{\tilde{S}'(p), \{\tilde{M}_\lambda\}, \{\tilde{E}_\lambda\}$, отвечающими системе уравнений (14) с потенциальными матрицами $U'(x)$ и $\tilde{U}'(x)$, соответственно

$$Q(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}'(x, p) (S'(p) - \tilde{S}'(p)) \tilde{F}(x', p) dp + \sum_{\lambda}^N F^0(x, i\mathcal{E}_\lambda) M_\lambda' \tilde{F}^0(x', i\mathcal{E}_\lambda) - \sum_{\lambda}^N \tilde{F}^0(x, i\mathcal{E}_\lambda) \tilde{M}_\lambda' F^0(x', i\mathcal{E}_\lambda). \quad (23)$$

Решения Йоста $F^0(x, i\mathcal{E}_\lambda)$ и $\tilde{F}^0(x, i\mathcal{E}_\lambda)$ системы (14) с матрицей $U^0(x)$ должны быть взяты при энергиях **связанных** состояний E_λ и \tilde{E}_λ обеих задач с $U^+(x)$ и $\tilde{U}^+(x)$.

Для определенности рассмотрим n -мерную задачу рассеяния в сферических координатах. Свободное движение описывается уравнением

$$-\frac{(n-1)}{x} \partial_x \psi - \partial_x^2 \psi - x^2 \Delta_x^2 \psi = E \psi. \quad (24)$$

Перепишем это уравнение через удлиненную производную

$$\left[(-\partial_x + \nu \bar{x}^{-1})^2 + \nu(\nu-1) \bar{x}^{-2} - \bar{x}^{-2} \Delta_{\hat{x}} \right] \psi = E \psi. \quad (24)$$

Здесь $\nu = (N-1)/2$. Поскольку $A dx = -i \psi^{-1} d\psi = -i \nu \bar{x}^{-1} dx$, получим $\partial_x = \bar{x}^\nu \partial$. В соответствии с (15) введем новые функции

$$\psi = \bar{x}^{-\nu} \psi' = \bar{x}^{-\nu} \psi'.$$

После подстановки такого ψ в (24) получим уравнение для ψ' без первой производной:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \psi' + \nu(\nu-1) \bar{x}^{-2} \psi' - \bar{x}^{-2} \Delta_{\hat{x}} \psi' = E \psi'. \quad (25)$$

Неисчезающий центробежный барьер $\nu(\nu-1)\bar{x}^{-2}$ связан с дефектом вложения сферы S^{N-1} в $R^N, \{0\}$. Лишь для одномерного $\nu=0$ и трехмерного $\nu=1$ пространство дефект вложения отсутствует. Наличие барьера $\nu(\nu-1)\bar{x}^{-2}$ приводит к возникновению топологической фазы \mathcal{D} , которая легко определяется при вычислении интеграла с помощью формул контурного интегрирования:

$$\delta = \int_0^\infty -A(x) dx = -\nu i \int_0^\infty \frac{dx}{x} = \pi \nu. \quad (26)$$

Рассмотрим теперь N -мерную задачу рассеяния с возмущающим сферически-несимметричным взаимодействием $V(\vec{x})$. Пусть радиус x сферы $S^{N-1}(\hat{x})$ - медленная переменная, углы \hat{x} - быстрые переменные. Тогда параметрическое "быстрое" уравнение (3) переписывается в виде

$$h^f(x, \hat{x}) \psi(x, \hat{x}) = [-\bar{x}^2 \Delta_{\hat{x}} + V^f(x, \hat{x})] \psi(x, \hat{x}) = \epsilon_{\nu}^f(x) \psi_{\nu}^f(x, \hat{x}) \quad (3')$$

и система "медленных" уравнений (5) будет выглядеть следующим образом:

$$\left[-(\partial_x + iA)^2 + \nu(\nu-1) \bar{x}^{-2} - U(x) - \beta^2 \right] \mathcal{A}(x, \beta) = 0,$$

$$-U(x) = U^S(x) + \langle \psi | h^f(x, \hat{x}) | \psi \rangle - \epsilon_{\nu}^f(x, \nu).$$

Матричные элементы эффективных векторного и скалярного потенциалов получают при усреднении по углам подвижного репера $|\psi\rangle$, удовлетворяющего (3).

Исследуем вначале наиболее простую ситуацию, когда заранее известен потенциал $V^f(\vec{x})$. В трехчастичной задаче это может быть эффективный потенциал $V^f(\vec{x}) \equiv \sum_{\alpha} V_{\alpha}(\vec{x}, \hat{x}_{\alpha})$, равный сумме двухчастичных. Необходимо определить дополнительный потенциал $V^g(x)$. В рассматриваемом примере - потенциал трехчастичного взаимодействия $V^g(x) = V_{123}(x)$. Будем считать, что амплитуды $f^+(\vec{p}, \hat{x}) = f(\vec{p}, \hat{x})$ и $f(\vec{p}, \hat{x})$ известны. При каждом фиксированном значении медленной переменной из решения прямой задачи на собственные значения для уравнения (3) определяем реперные функции $\psi_{\alpha}(x, \hat{x})$ и термы $\epsilon_{\alpha}^{\pm}(x)$, параметрически зависящие от x . Помимо параметрической задачи Штурма-Лиувилля можно рассматривать для уравнения (3) задачи рассеяния или с периодическими граничными условиями. По известным базисным функциям находим матричные элементы оператора связности $A(x)$ (6), а впоследствии по формулам (II) или (IO) - биллокальный транспортный оператор $\mathcal{Q}(x)$. Унитарный оператор $\mathcal{U}(x)$ позволяет перейти от системы уравнений (5) к системе (I4) с неизвестным пока потенциалом $V(x, \cdot) \equiv V^S(x, \cdot)$ в обкладках фиксированного репера $|\epsilon\rangle$.

Физические асимптотики (5)

$$\chi(x, p) \rightarrow -(2i)^{-1} \left\{ e^{-i(xp - \frac{1}{2}\delta)} - e^{i(xp - \frac{1}{2}\delta)} \frac{1}{p} \frac{1}{i\delta/p} p^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (27)$$

определяются известным асимптотическим поведением полной волновой функции

$$\psi(\vec{x}, \vec{p}) \rightarrow (2\pi)^{-3/2} \left\{ e^{xp}(\vec{x}, \vec{p}) - x^{-1} e^{xp} (xp - \frac{1}{2}\delta) f(\vec{x}, \vec{p}) \right\} \quad (28)$$

мы ввели $Y = V - I$, используя традиционную форму записи, в которой выделяется часть фазы без дефекта вложения сферы S^2 в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Поскольку мы считаем амплитуды $f(\hat{x}, \vec{p})$ и $f(\vec{x}, \vec{p})$ заданными, находим соответствующие им матрицы $\hat{S}(p)$ и $\hat{\xi}(p)$, используя соотношения (I6б) и связь полной многомерной амплитуды с парциальными:

$$f(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{4\pi}{i} \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\vec{x}, \omega) \psi_{\alpha}^*(\vec{p}, \omega) f_{\alpha}(\vec{p}), \quad (29)$$

$$f_{\alpha}(\vec{p}) = (\hat{S}(p) - \hat{I})_{\alpha\alpha} p_{\alpha}^{(-1-\epsilon)}$$

где \hat{I} - оператор полной инверсии в $\mathcal{R}^N\{p\}$,

$$\hat{S}(p) = \hat{I} S'(p), \quad (30)$$

S' - обычный оператор рассеяния [2], [13]. Например, в трехчастичной задаче $\gamma = 3/2$ для процессов $3 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 2$ и $\gamma = 0$ для процессов $2 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, поскольку в системе центра масс трехчастичная задача становится шестимерной, $\lambda' = 5/2$.

Здесь подразумевалось, что система уравнений (5) ограничена. Если полный набор состояний включен в разложение (2), то она точная. Обычно разложение (2), в общем случае содержащее состояния $\psi(x, \cdot)$ дискретного и непрерывного спектров гамильтониана h^+ , ограничивается конечным неполным набором N состояний. Тогда в системе (5) возникает некоторый дополнительный эффективный потенциал $U_{nm} = \langle \partial_x \phi_n | \partial_x \phi_m \rangle + A_{nm}^2$. Вклад опущенных членов в (5) можно учесть, используя проективную технику Фешбаховского типа. Это приводит к появлению дополнительных потенциальных членов в системе, состоящей из конечного набора "медленных" уравнений. Система такого типа из ограниченного числа уравнений была исследована в [1], где вкладом остаточных членов пренебрегалось в предположении их малости.

Теперь основные обобщенные уравнения многоканальной обратной задачи Гельфанда - Левитана - Марченко (20) - (22) дают возможность определить потенциальную матрицу $\langle e^{iV(x, \tilde{x})} \rangle$ и отвечающие ей матричные решения.

Возвращаясь к представлению в базисе $|\psi\rangle$, получаем следующие соотношения в подходе Марченко:

$$V^{\pm}(x) = V(x) - V^{\pm}(x) = -2\mathcal{Q}^{\pm}(x) \frac{d}{dx} K(x, x) \mathcal{Q}^{\pm}(x), \quad (31)$$

$$F_{\pm}(x, p) - \mathcal{Q}^{\pm}(x) F_{\pm}'(x, p) = \quad (32)$$

$$= \mathcal{Q}^{\pm}(x) \left[F_{\pm}^{\circ}(x, p) + \int_x^{\infty} K(x, x') F_{\pm}^{\circ}(x', p) dx' \right]$$

($\mathcal{Q}^{\pm}(x) = \mathcal{Q}^{\pm}(x, \tilde{x})$, удобно выбрать $\tilde{x} \rightarrow \infty$..

Физические решения системы (5) получаются, как линейная комбинация решений Йоста:

$$X^{\pm}(x, p) = (2i)^{\pm 1/2} \{ F_{\pm}'(x, p) - F_{\pm}^{\pm}(x, p) p^{-1/2} \hat{S}(p) p^{1/2} \}. \quad (33)$$

Полагая $(2i)^{\pm 1/2} = (2i)^{\pm 1/2} \mathcal{Q}^{\pm}(x)$, $(2i)^{\pm 1/2} = (2i)^{\pm 1/2} \mathcal{Q}^{\pm}(x)$, соотноше-

ния (31)–(33) сразу же становятся выражениями для матриц трехчастичного взаимодействия $U_{123}(x)$ и соответствующих решений. Подробности см. в статье [3]^{*}.

Для потенциалов баргмановского типа ядро $G(x, y)$ представимо в виде суммы факторизованных членов, благодаря чему системы интегральных уравнений (20)–(22) сводятся к алгебраическим.

Отметим, что при конструировании точно решаемых моделей методами обратной задачи необходимо удовлетворить требования на данные рассеяния, при которых они отвечают соответствующей краевой задаче для уравнения или системы уравнений Шредингера [14], в данном случае (5), (27) с локальной по медленной переменной x и ограниченной потенциальной матрицей:

$$\int_0^{\infty} x |U(x)| dx < \infty, \quad \int_0^{\infty} |U(x)| dx < \infty.$$

Основываясь на результатах работы [15], выпишем алгебраическую схему решения многоканальной обратной задачи в адиабатическом представлении.

Для примера рассмотрим достаточно простую ситуацию, когда искомый потенциал $U(x)$ добавляет несколько связанных состояний, оставляя данные рассеяния или спектральные характеристики задачи с $U^0(x) \equiv \tilde{U}(x)$ без изменений. Этому может отвечать задача на всей оси в подходе Марченко с $S(p) = \hat{S}(p)$, ($\hat{S}(p) = S^0(p)$):

$$\hat{G}^M(x, x') = \sum_{\lambda} \hat{F}^0(i\lambda, x) M_{\lambda} \hat{F}(i\lambda, x') = \hat{F}^0(x) M \hat{F}(x'), \quad (34)$$

или радиальная задача в подходе Гельфанда – Левитана с равными спектральными матрицами $\hat{p}(p) = \hat{p}^0(p)$ при $E \rightarrow 0$ [8]:

$$\hat{G}^{\Gamma A}(x, x') = \sum_{\lambda} \langle \hat{p}^0(i\lambda, x) | \hat{p}(i\lambda, x') \rangle \cdot \langle \hat{p}^0(i\lambda, x) | \hat{p}(i\lambda, x') \rangle \quad (34^{\Gamma})$$

В такой сокращенной записи $\hat{G}(x, x')$ является "суперматрицей" как по индексам связанных состояний λ , так и по индексам каналов α . Впервые такую запись мы использовали в работе [16], посвященной аналитическому решению в K^2 -матричной постановке обратной задачи (см. также [17]).

В соотношении (34) $\hat{F}^0(x)$ – вектор-столбец, $\hat{F}(x)$ – строка, составленные из N элементов $\hat{F}(i\lambda, x)$, каждый из которых есть матри-

^{*} В работе [3] в отличие от данной используются другие обозначения.

ца $m \times m$ по числу каналов; M - диагональная матрица $N \times N$ нормировочных коэффициентов, элементы которой также матрицы $m \times m$. Аналогично записано соотношение (34¹) для $Q^{\Gamma A}(x, x')$. Здесь $\Phi(x)$ - вектор-столбец, $\Phi^{\circ \Gamma}(x)$ - строка по индексам связанных состояний λ , отдельные элементы которых матрицы $m \times m$ регулярных решений по канальным состояниям. Транспонированные матрицы по канальным числам n мы обозначили $\tilde{\Phi}$ и \tilde{F} , в отличие от Φ^T и F^T по индексам λ . Матричные уравнения Гельфанда-Левитана отличаются от основных уравнений Марченко лишь знаком в (21), (31) и пределами интегрирования в (20), (22), (32):

$$V^S(x) = V^T(x) + 2 \tilde{Q}^{\Gamma}(x) \frac{d}{dx} K^{\Gamma A}(x, x) Q(x), \quad (31')$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, p) &= Q^{\Gamma}(x) \Phi^{\circ \Gamma}(x, p) = \\ &= Q^{\Gamma}(x) \left[\tilde{\Phi}^{\circ \Gamma}(x, p) + \int_x^{\infty} K^{\Gamma A}(x, t) \tilde{\Phi}^{\circ \Gamma}(t, p) dt \right], \end{aligned} \quad (32')$$

где $K^{\Gamma A}(x, y)$ - матричное интегральное ядро уравнения Гельфанда-Левитана:

$$K^{\Gamma A}(x, x') \neq Q^{\Gamma A}(x, x') + \int_0^x K^{\Gamma A}(x, t) Q^{\Gamma A}(t, x') dt = 0, \quad (20')$$

определяемое по заданным $Q^{\Gamma A}(x, x')$:

$$\tilde{Q}^{\Gamma A}(x, x') = \int \tilde{\Phi}^{\circ \Gamma}(x, p) d(p^{\circ \Gamma}(p) - \tilde{p}^{\circ \Gamma}(p)) \tilde{\Phi}^{\Gamma}(x, p). \quad (35)$$

Здесь $p^{\circ \Gamma}(p)$ и $\tilde{p}^{\circ \Gamma}(p)$ - спектральные матрицы, отвечающие системе (14):

$$\frac{dp^{\circ \Gamma}(p)}{dE} = \begin{cases} \frac{p}{\pi} |F^{\circ \Gamma}(p)|^{-2}, & E > 0, \\ \sum_{\lambda} \delta(E - E_{\lambda}) Q_{\lambda}^{\circ \Gamma}, & E < 0. \end{cases} \quad (36)$$

Нормировочная матрица O_{λ} определяется соотношением

$$O_{\lambda}^{\circ \Gamma} = \left[\int_0^{\infty} dx |\Phi^{\circ \Gamma}(x, p)|^2 dx \right]^{-1},$$

а матричные решения $\Phi(x, p)$ системы уравнений (5) - граничными условиями

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x, p) x^{-K} = 1$$

(K - гипермомент).

Отметим, что $p^{\circ \Gamma}(p) = p^{\circ}(p)$ в силу того, что $F^{\circ \Gamma}(p) = F^{\circ}(p)$ и $O_{\lambda}^{\circ \Gamma} = O_{\lambda}$.

Более внимательно изучим вопрос, касающийся свойств нормировочных матриц связанных состояний.

Поскольку система (I4) - обыкновенная с эрмитово сопряженной потенциальной матрицей, то ее матричные физические решения удовлетворяют соотношению полноты

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{\prime}(x, p) \chi^{\prime}(x', p) + \sum_{\lambda} \chi^{\prime}(i\alpha_{\lambda}, x) \chi^{\prime}(i\alpha_{\lambda}, x') = \delta(x-x'). \quad (37)$$

Благодаря сведению системы (5) к (I4) и стала возможной формулировка обратной задачи.

Векторы решений, отвечающие связанным состояниям $E_{\lambda} = (i\alpha_{\lambda})^2$, могут быть ортонормированы

$$\langle \chi^{\prime}(i\alpha_{\lambda}, x) | \chi^{\prime}(i\alpha_{\lambda'}, x) \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} = \int_0^{\infty} dx \tilde{\chi}^{\prime}(i\alpha_{\lambda}, x) \chi^{\prime}(i\alpha_{\lambda'}, x), \quad (38)$$

или в развернутой записи:

$$\sum_j \int_0^{\infty} dx \chi_j^{\prime}(i\alpha_{\lambda}, x) \chi_j^{\prime}(i\alpha_{\lambda'}, x) = \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Каждый элемент по индексам каналов вектора $|\chi^{\prime}(i\alpha_{\lambda}, x)\rangle$ получается как линейная комбинация элементов матрицы решений Йоста:

$$|\chi^{\prime}(i\alpha_{\lambda}, x)\rangle = F^{\prime}(i\alpha_{\lambda}, x) |\Gamma_{\lambda}\rangle, \quad (39)$$

или

$$\chi_i^{\prime}(i\alpha_{\lambda}, x) = \sum_j F_j^{\prime}(i\alpha_{\lambda}, x) \delta_j^{(i)}.$$

Тогда

$$\langle \chi^{\prime}(i\alpha_{\lambda}, x) | \chi^{\prime}(i\alpha_{\lambda}, x) \rangle = \langle \Gamma_{\lambda} | \int_0^{\infty} \tilde{F}^{\prime}(i\alpha_{\lambda}, x) F^{\prime}(i\alpha_{\lambda}, x) dx | \Gamma_{\lambda} \rangle = 1.$$

Отсюда

$$\left[\int_0^{\infty} dx \tilde{F}^{\prime}(i\alpha_{\lambda}, x) F^{\prime}(i\alpha_{\lambda}, x) \right]^{-1} = |\Gamma_{\lambda}\rangle \langle \Gamma_{\lambda}| = M_{\lambda}^{\prime}. \quad (40)$$

Т.е. нормировочные матрицы состояний дискретного спектра представляются в факторизованном по индексам каналов виде (впервые такая запись применялась в работе Коха [I8]).

Аналогична факторизация нормировочных матриц регулярных решений:

$$O_{\lambda} = |\zeta_{\lambda}\rangle \langle \zeta_{\lambda}|. \quad (40^I)$$

Применение (40) в (34) позволяло в работе [I5] записать матричное ядро $Q(x, y)$ в виде суммы N слагаемых, факторизованных как по коор-

динамам, так и по индексам каналов, и благодаря этому дать простые аналитические выражения для потенциальных матриц баргмановского типа и соответствующих решений. В подходе Марченко ядро $Q^M(x, t)$ (34) имеет вид

$$Q^M(x, t) = \sum_{\lambda} F^{\circ}(\lambda, x) | \Gamma_{\lambda} \rangle \langle \Gamma_{\lambda} | \tilde{F}^{\circ}(\lambda, t) = \sum_{\lambda} | \tilde{X}^{\circ}(\lambda, x) \rangle \langle X^{\circ}(\lambda, t) | = \tilde{X}^{\circ T}(x) \tilde{X}^{\circ}(t). \quad (41)$$

Здесь используется обозначение

$$| \tilde{X}^{\circ}(\lambda, x) \rangle = F^{\circ}(\lambda, x) | \Gamma_{\lambda} \rangle, \quad (42)$$

или в покомпонентной записи:

$$\tilde{X}_i^{\circ}(\lambda, x) = \sum_j F_{ij}^{\circ}(\lambda, x) \tilde{\chi}_j^{\circ}(\lambda).$$

Так же, как (41), можно записать ядро $Q^{\Gamma A}$, где $\tilde{X}^{\circ}(\lambda, x)$ комбинируется из регулярных решений $\tilde{\chi}^{\circ}$:

$$| \tilde{X}^{\circ \Gamma A}(\lambda, x) \rangle = \langle \tilde{\chi}^{\circ}(\lambda, x) | C_{\lambda} \rangle.$$

В факторизованном виде записываются ядра Q^M и $Q^{\Gamma A}$ при сдвиге уровней, осуществляемом в задачах с разными потенциальными матрицами. Соотношения (41) в этом случае записываются с вычитанием еще одной суммы факторизованных слагаемых, определяемых спектральными характеристиками $\{\tilde{\chi}_\mu^{\circ}, \tilde{\chi}_\mu^{\circ}\}$ исходной потенциальной матрицы $\tilde{U}(x)$:

$$Q^M(x, t) = \sum_{\lambda} F^{\circ}(\lambda, x) | \Gamma_{\lambda} \rangle \langle \Gamma_{\lambda} | \tilde{F}^{\circ}(\lambda, t) - \sum_{\mu} F^{\circ}(\mu, x) | \Gamma_{\mu} \rangle \langle \Gamma_{\mu} | \tilde{F}^{\circ}(\mu, t).$$

Для полноты изложения приведем алгебраические соотношения для матричного ядра обобщенного сдвига $K(x, t)$, потенциальных матриц и решений (15), получающиеся теперь из основных уравнений обратной задачи (20)-(22) не сложнее, чем в одноканальном случае. Матрица $K(x, t)$ так же, как и $Q(x, t)$, представима в виде суммы факторизованных членов:

$$K^M(x, t) = - \sum_{\lambda} | \tilde{X}^{\circ}(\lambda, x) \rangle \langle X^{\circ}(\lambda, t) | = - \tilde{X}^{\circ}(x) \tilde{X}^{\circ}(t), \quad (43)$$

где каждый элемент вектора решений (39) определяется после подстановки (41) и (43) в (20):

$$\tilde{X}_i^{\circ}(\lambda, x) = \sum_j \tilde{X}_j^{\circ}(\lambda, x) P_{ij}^{\circ}(x). \quad (44)$$

Причем матричные элементы $P_{\nu\lambda}(x)$ не зависят от индексов каналов:

$$P_{\nu\lambda}(x) = \delta_{\nu\lambda} + \frac{m}{g} \int_x^{\infty} \tilde{\chi}_\nu^{\circ'}(i\tilde{x}_\nu, t) \tilde{\chi}_\lambda^{\circ'}(i\tilde{x}_\lambda, y) dy. \quad (45)$$

Тогда

$$K(x, y) = - \sum_{\nu\lambda}^N \tilde{\chi}_\nu^{\circ'}(i\tilde{x}_\nu, x) P_{\nu\lambda}^{-1}(x) \tilde{\chi}_\lambda^{\circ'}(i\tilde{x}_\lambda, y), \quad (46)$$

или в матричной записи

$$K_{ij}(x, y) = - \sum_{\nu\lambda}^N \tilde{\chi}_i^{\circ'}(i\tilde{x}_\nu, x) P_{\nu\lambda}^{-1}(x) \tilde{\chi}_j^{\circ'}(i\tilde{x}_\lambda, y).$$

Тогда, как следует из соотношений (21)-(22), баргмановская потенциальная матрица и решения Йоста при любых импульсах p записываются в виде

$$U_j^{\circ'}(x) = \tilde{U}_j^{\circ'}(x) + 2 \frac{d}{dx} \sum_{\nu\lambda} \tilde{\chi}_\nu^{\circ'}(i\tilde{x}_\nu, x) P_{\nu\lambda}^{-1}(x) \tilde{\chi}_\lambda^{\circ'}(i\tilde{x}_\lambda, x), \quad (47)$$

или $(U^{\circ'}(x) \equiv U^{\circ'}(x))$,

$$F_{\pm ij}^{\circ'}(p, x) = F_{\pm ij}^{\circ'}(p, x) - \sum_{\nu\lambda} \tilde{\chi}_\nu^{\circ'}(i\tilde{x}_\nu, x) P_{\nu\lambda}^{-1}(x) \sum_{j' i' x'}^m \tilde{\chi}_{j'}^{\circ'}(i\tilde{x}_{\lambda'}, x') F_{\pm j' i'}^{\circ'}(p, x', x'). \quad (48)$$

Аналогичен вывод соотношений (47), (48) при сдвиге уровней с учетом дополнительной суммы в ядрах $Q(x, x')$ и, соответственно, $K(x, x')$ К алгебраической процедуре сводятся также случаи с дробно рациональной матрицей Йоста. Подобным же образом получаются потенциальные матрицы и решения в подходе Гельфанда-Левитана и R -матричной обратной задаче рассеяния. После определения потенциальной матрицы $U_j^{\circ'}(x)$ находим по формулам (31), (32) потенциальную матрицу $U(x)$ системы (14) и соответствующую ей матрицу решений. Поскольку функции параметрического базиса $\tilde{\chi}_i^{\circ'}(x, \hat{x})$ известны и образуют полный набор (9), можем определить и многомерный потенциал $(V(x, \hat{x}) = \int \delta(x - \hat{x}') V(x, \hat{x}, \hat{x}') d\hat{x}')$:

$$V^S(x, \hat{x}) = V(x, \hat{x}) - V^{\pm}(x, \hat{x}) = \quad (49)$$

$$- 2 \sum_j \tilde{\chi}_j(x, \hat{x}) \cdot \sum_{\nu\lambda} P_{\nu\lambda}^{-1}(x) \frac{d}{dx} \sum_{\nu\lambda} \tilde{\chi}_\nu^{\circ'}(i\tilde{x}_\nu, x) P_{\nu\lambda}^{-1}(x) \sum_{j'} \tilde{\chi}_{j'}^{\circ'}(i\tilde{x}_{\lambda'}, x) \tilde{\chi}_{j'}^{\circ'}(x, \hat{x}')$$

в общем случае нелокальный по углам

$$V^S(x, \hat{x}, \hat{x}') = \sum_j \tilde{\chi}_j(x, \hat{x}) U_j^{\circ'}(x) \tilde{\chi}_j^{\circ'}(x, \hat{x}').$$

Рассмотрим теперь более сложную задачу восстановления как $V^S(x, \hat{x})$ так и $V^{\pm}(x, \hat{x})$ по известным данным рассеяния или спект-

ральным характеристикам исходной многомерной задачи. Вначале исследуем задачу по восстановлению $V^f(\vec{x})$, впоследствии, используя обобщенные формулы обратной задачи (20)-(22), можно реконструировать также и $V^s(\vec{x})$.

Восстановление матрицы взаимодействия, характеризующего быструю динамику

По набору данных рассеяния $\{\hat{S}(p), \alpha_2, M_2\}$ восстанавливаем потенциальную матрицу $V^f(x) = \mathcal{U}^{-1}(x) \mathcal{U}^f$ и находим решения χ' системы (14) по обычным или обобщенным многоканальным формулам Гельфанда-Левитана-Марченко (20)-(22).

Теперь можно найти билокальный оператор переноса $\mathcal{U}(x)$ и термы $\xi_i(x)$ в результате решения алгебраической задачи на собственные значения /3/:

$$V^f(x) \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(x) V^f(x) = \mathcal{U}(x) [\xi_i(x) - \xi_i(\infty)]. \quad (50)$$

Это способ нахождения термов из решения многоканальной обратной задачи, а не прямой для реперного уравнения (3^I), как в предыдущем случае. Знание $\mathcal{U}(x)$ позволяет восстановить и матрицу эффективного вектор-потенциала (6):

$$A(x) = -i \mathcal{U}^{-1}(x) \frac{d}{dx} \mathcal{U}(x), \quad (6^I)$$

ответственного за появление потенциала, зависящего от скорости.

Пользуясь изложенной выше техникой вырожденных ядер, дадим пример точно решаемой модели для системы уравнений по медленным переменным (14). Для максимального упрощения в качестве опорного потенциала при восстановлении $V^f(x)$ можно взять $V(x) = 0$. Тогда алгебраические формулы многоканальной обратной задачи (41)-(48) еще более упростятся. Для безотражательных потенциалов по медленной переменной в $Q^M(x, x')$ остается лишь сумма по связанным состояниям. Ограничимся рассмотрением простого случая с одним связанным состоянием $E_2 = -\alpha_j^2 + \xi_j$ для системы (14):

$$\begin{aligned} F'_{ij}(i\alpha, x) &= \exp(-\alpha_i x) \delta_{ij}, \\ \chi'_j(i\alpha, x) &= \exp(-\alpha_i x) \Gamma'_j, \end{aligned} \quad (51)$$

$$K_{jj'}(x, x') = - \frac{\exp(-\alpha_j x) \Gamma_j \Gamma_{j'} \exp(-\alpha_{j'} x')}{1 + \sum_{i=1}^m \Gamma_i^2 \int_x^{\infty} dx' \exp(2\alpha_i x')}, \quad (52)$$

$$-U_{jj'}^{\pm}(x) = 2 \Gamma_j \Gamma_{j'} \frac{d}{dx} \left[\frac{\exp[-(\alpha_j + \alpha_{j'})x]}{1 + \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_i^2}{2\alpha_i} \exp(-2\alpha_i x)} \right], \quad (53)$$

$$\alpha = \text{diag}(\alpha_j), \quad \alpha_j = \sqrt{E_x - \xi_j(\omega)}.$$

Отметим, что суммирование проводится по числу m термов $\xi_j(x)$, которые можно найти, осуществляя процедуру диагонализации (50) потенциальной матрицы (53). При этом найдем и матрицу $\mathcal{P}(x)$. Для восстановления многомерного потенциала $V^{\pm}(x)$ необходимо на втором этапе по спектральным данным $\{S(x, k) \xi_j(x) \dot{\xi}_j(x)\}$ являющимся функциями медленной переменной x , сформулировать параметрическую обратную задачу по восстановлению $V^{\pm}(x, \cdot)$ и $\Psi_{\pm}(x, \cdot)$ для быстрого динамического уравнения (3) при каждом фиксированном значении x . Причем для параметрического семейства обратных задач, так же как и для обычных, можно разработать технику баргмановских потенциалов, которая позволяет в явном аналитическом виде конструировать решения $\Psi_{\pm}(x, \cdot)$ и потенциал $V^{\pm}(x, \cdot)$.

3. Параметрическое семейство обратных задач для быстрого динамического уравнения

Рассмотрим параметрическую постановку обратной задачи на примере восстановления двумерного потенциала $V^{\pm}(x, y)$. В декартовых координатах уравнение (3) по быстрой переменной y при каждом фиксированном значении медленной переменной x **запишем в виде**

$$\left[-\frac{d^2}{dy^2} + V^{\pm}(y) + V^{\pm}(x, y) \right] \Psi(x, y) = \xi(x) \mathcal{U}(x, y). \quad (3^{\pm})$$

Поскольку существенным при формулировке обратной задачи является свойство полноты набора собственных функций, используем (9) для физических нормированных собственных функций уравнения (3), параметрически зависящих от x :

$$\Psi(x; k_{\pm}, y) = f_{-}(x; k_{\pm}, y) - S'(x, k) f_{+}(x; k_{\pm}, y), \quad (54)$$

$$\mathcal{U}(ix_n(x), y) = \delta_n(x) f_{+}(ix_n(x), y), \quad (55)$$

и для регулярных решений:

$$\varphi(x, k, y) = \frac{1}{2ik} [f_-(x; k) f_+(x; k, y) - f_+(x, k) f_-(x; k, y)]. \quad (56)$$

Матрица рассеяния

$$S'(x; k) = f_-(x; k) / f_+(x; k) \quad (57)$$

определяется функциями Йоста $f_{\pm}(x; k)$, зависящими от x , как от параметра

$$f_{\pm}(x, k) = \lim_{y \rightarrow 0} f_{\pm}(x, k, y).$$

Нормировку $f_{\pm}^2(x)$ термов $e_{\pm}^n(x)$, как обычно, определяем через решения Йоста при $k = i\epsilon_n(x)$. С учетом (10) получим

$$\bar{f}_{\pm}^2(x) = \int_0^{\infty} dy |f(\pm x, x, y)|^2 = \frac{\pi}{\epsilon_n} \mathcal{M}_{\pm}(x) \int_0^{\infty} dy |e_{\pm}^n(y)|^2 \mathcal{M}_{\pm}(x) \quad (58)$$

или

$$\bar{f}_{\pm}^2(x) = \frac{\pi}{\epsilon_n} \mathcal{M}_{\pm}(x) \bar{M}_{\pm}^{-2}(x); \quad \bar{M}_{\pm}^{-2} = \int_0^{\infty} dy |e_{\pm}^n(y)|^2.$$

Осуществляя стандартный вывод уравнений обратной задачи [12, 9, 8], получим следующие параметрические формулы:

$$K(x; y, y') + Q(x; y, y') + \int_{y'(0)}^{y(0)} K(x, y, y'') Q(x, y'', y') dy'' = 0, \quad (59)$$

$$V^{\pm}(x, y) = \dot{V}^{\pm}(y) \mp 2 \frac{d}{dx} K(x, y, y), \quad (60)$$

$$\psi(x; k, y) = \dot{\psi}(k, y) + \int_{y'(0)}^{y(0)} K(x, y, y') \dot{\psi}(k, y') dy'. \quad (61)$$

Пределы интегрирования в (59), (61) и знаки в (60) зависят от конкретного подхода обратной задачи. Пределы от y до ∞ (от y до α) в (59), (61) и знак "-" в (60) отвечают формулировке Марченко (K - матричной ОЗР [16]). Пределы $[0, y]$ в (59), (61) и знак "+" в (60) отвечают подходу Гельфанда-Левитана.

В рамках обобщенного подхода Марченко [12, 20] интегральные ядра $Q(x, y, y')$, зависящие параметрически от x :

$$Q^M(x, y, y') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{S}(k) - S(x, k)] f^{\circ}(k, y) f^{\circ}(k, y') + \quad (62)$$

$$+ \sum_n^m \delta_n^2(x) f^{\circ}(i\alpha_n(x), y) f^{\circ}(i\alpha_n(x), y') - \sum_n^m \delta_n^2 f^{\circ}(i\alpha_n, y) f^{\circ}(i\alpha_n, y'),$$

строим по двум наборам данных рассеяния: $\{\tilde{S}(x, k), \xi_n^{\circ}(x), \delta_n^2(x)\}$, отвечающим уравнению (3^I), при каждом значении параметра x и обычным данным рассеяния $\{S(k), \xi_n^{\circ}, \delta_n^2\}$, отвечающим (3^I) с

$$V^{\circ}(x; y) = 0, \quad (3^{\text{II}})$$

$$\left[-\frac{d^2}{dy^2} + V^{\circ}(y) \right] \psi^{\circ}(k, y) = \xi^{\circ} \psi^{\circ}(k, y).$$

Функции $f^{\circ}(k, y)$ — обычные решения Йоста уравнения (3^{II}) с известным потенциалом $V^{\circ}(y)$.

По интегральным ядрам $K^M(x; y, y')$, относительно которых при каждом фиксированном значении x решается линейное интегральное уравнение (59), определяются потенциалы (60) и решения Йоста (6I). Аналогично строится параметрическое семейство ядер $Q^M(x; y, y')$ интегрального уравнения типа Гельфанда-Левитана:

$$Q^M(x, y, y') = \int_0^{\infty} \tilde{\psi}^{\circ}(k, y) \tilde{\psi}^{\circ}(k, y') d[\tilde{\rho}(x; k) - \tilde{\rho}(k)] + \quad (63)$$

$$+ \sum_n^m c_n^2(x) \tilde{\psi}^{\circ}(i\alpha_n(x), y) \tilde{\psi}^{\circ}(i\alpha_n(x), y') - \sum_n^m c_n^2 \tilde{\psi}^{\circ}(i\alpha_n, y) \tilde{\psi}^{\circ}(i\alpha_n, y').$$

Спектральная функция $\rho(x, k)$ определяется функциями Йоста $f_{\pm}(x; k)$:

$$\rho(x; k) = \frac{2k}{\pi f_-(x, k) f_+(x; k)}, \quad (64)$$

а нормировка c_n^2 — регулярными решениями $\psi^{\circ}(x; k, y)$ при $k = i\alpha_n(x)$:

$$c_n^2(x) = \left\{ \int_0^{\infty} dy [\psi^{\circ}(i\alpha_n(x), y)]^2 \right\}^{-1}. \quad (65)$$

Связь с обычными нормировочными коэффициентами легко устанавливается после подстановки соотношения связи подвижного с фиксированным репером (10) в (65):

$$c_n^2(x) = \sum_j^m c_{j, y}^2(x) N_{j, y}^{-2} \mathcal{P}_{j, y}^2(x); \quad N_{j, y}^{-2} = \left| \int dy |e^{i\eta_j(y)}|^2.$$

Спектральные характеристики $\{\tilde{\rho}(k), c_n^2, \xi_n^{\circ}\}$ и регулярные решения $\psi^{\circ}(k, y)$ отвечают уравнению (3^{II}). После того, как решено уравнение (59)

относительно $K^{\text{гл}}(x, y, y')$ по формулам (60) (нижний знак) и (61) (пределы $[0, x]$), находим потенциал и регулярные решения уравнения (3^I). Аналогично можно выписать соотношения параметрического семейства обратных задач в R - матричной теории рассеяния. Из приведенных формул обратных задач следует, что при одномерном быстром движении можно восстановить двумерный потенциал с параметрической зависимостью от медленной переменной и как функцию быстрой переменной. При этом используются непривычные данные рассеяния с параметрической зависимостью от координатной переменной. При полной постановке обратной задачи, когда в качестве исходных данных выступает многомерная амплитуда, зависимость спектральных параметров от медленных переменных определяется из (50) после восстановления потенциальной матрицы $V^{\text{гл}}(x)$ при решении обратной задачи для системы (14), описывающей медленную динамику. Можно рассмотреть модельные задачи, задавая функциональную зависимость спектральных параметров, с целью изучения геометрических аспектов многомерной и многочастичной квантовой теории рассеяния. На основе этой работы можно исследовать обе возможности. Аналогичная ситуация имеет место и для большей размерности уравнений (3^{II}), описывающих быструю динамику. Таким образом, используя представленную здесь технику адиабатического представления, можно увеличить размерность пространства, для которого возможна формулировка обратной задачи. Применим разработанную технику баргмановских потенциалов [8, 19, 21] к параметрическому семейству обратных задач для уравнений (3^{II}).

4. Потенциалы Баргмана с параметрической зависимостью от медленной переменной

Потенциалам Баргмана для обычного одномерного уравнения Шредингера отвечают дробно-рациональные функции Йоста

$$f(k) = \tilde{f}(k) \prod \frac{k - i\alpha}{k + i\beta}. \quad (66)$$

Тогда ядра интегральных уравнений обратных задач сепараблизуются:

$$Q(y, y') = \sum_{i=1}^N Q_i(y) Q_i(y'), \quad (67)$$

а сами уравнения сводятся к системам алгебраических и решаются в явном виде, если опорные потенциалы $V(y)$ допускают аналитические решения.

Построим теперь широкий класс потенциалов, для которых можно найти в замкнутом аналитическом виде решения параметрического уравнения Шредингера (3^{II}). По аналогии с (66) выберем функцию Йоста в дробно-рациональном виде, однако теперь она параметрически зависит от динамической модельной переменной через зависимость от неё спектральных параметров:

$$f(x; k) = \overset{\circ}{f}(k) \prod \frac{k - i\alpha(x)}{k + i\beta(x)}. \quad (68)$$

Параметрическая функция Йоста (68) имеет N простых полюсов в точках $k = -i\beta_j(x)$ и N' простых нулей при $k = i\alpha_j(x)$. Причем в $\alpha(x)$ содержится не только нули на мнимой полуоси, отвечающие связанным состояниям $\text{Re } \alpha_j(x) = 0, \text{Im } \alpha_j(x) > 0$, но и нули в нижней полуплоскости с $\text{Im } \alpha_j(x) < 0$ (число простых полюсов β_j равно числу значений α_j и γ_j , вместе взятых). Тогда матрица рассеяния и спектральная функция приобретают вид

$$S(x; k) = \overset{\circ}{S}(k) \prod \frac{(k + i\alpha(x))(k + i\beta(x))}{(k - i\beta(x))(k - i\alpha(x))}, \quad (69)$$

$$p(x; k) = \overset{\circ}{p}(k) \prod \frac{(k + i\beta(x))(k - i\beta(x))}{(k - i\alpha(x))(k + i\alpha(x))}. \quad (70)$$

Функции $\overset{\circ}{S}(k)$ и $\overset{\circ}{p}(k)$ известны, поскольку известен потенциал $V(x, y)$, в частном случае $V(y) = 0$. Для таких $S(x, k)$, как (69, 70), ядра $G(x, y, y')$ интегральных уравнений обратных задач вырождаются и представляются в виде суммы нескольких членов с факторизованной координатной зависимостью по быстрой переменной

$$G(x, y, y') = \sum_{i=1}^N G_i(x, y) G_i(x, y'). \quad (71)$$

После подстановки такого ядра G в основное параметрическое уравнение обратной задачи (57) очевидно, что ядра обобщенного сдвига $K(x, y, y')$ также становятся вырожденными:

$$K(x, y, y') = \sum_{i=1}^n K_i(x; y) G_i(x, y'). \quad (72)$$

Как следствие этого, интегральные уравнения становятся алгебраическими, сферически-несимметричный потенциал и отвечающие ему решения выражаются в замкнутом виде через известные решения непараметрической задачи (\mathcal{S}^I) с потенциалом $\dot{V}(y)$ и через спектральные характеристики двух задач (\mathcal{S}^I): непараметрической с потенциалом $\dot{V}(y)$ и параметрической с потенциалом $\dot{V}(y) + V(x, y)$.

Пример в подходе Гельфанда-Левитана

Пусть в подходе Гельфанда-Левитана $\rho(x, k) = \rho^0(k)$ и имеется лишь одно связанное состояние $\mathcal{E}(x) = -\mathcal{E}^2(x)$ и $\dot{V}^0(y) = 0$. В том, что это возможно, легко убедиться. Действительно, этому случаю отвечает функция Йоста:

$$f(x; k) = \frac{k - i\mathcal{E}(x)}{k + i\mathcal{E}(x)}. \quad (73)$$

Отсюда, как следует из (61), $\rho(x; k) = \frac{2k}{\pi} \rho^0(k)$. Тогда из соотношения (60) получаем

$$G^{II}(x, y, y') = C^2(x) \exp[-\mathcal{E}(x)(y + y')], \quad (74)$$

$$K^{II}(x, y, y') = -C^2(x) \varphi(i\mathcal{E}(x), y) \frac{\text{sh}(\mathcal{E}(x)y')}{\mathcal{E}(x)}, \quad (75)$$

$$\varphi(i\mathcal{E}(x), y) = \frac{\mathcal{E}(x) \text{sh}(\mathcal{E}(x)y)}{x^2(x) + \frac{1}{2}C^2(x) \left(\frac{\text{sh} \mathcal{E}(x)y}{2\mathcal{E}(x)} - y \right)}, \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x; k, y) &= \frac{\sin ky}{k} - c^2(x) \varphi(x; k, y) \int_0^y \frac{\operatorname{sh}(\alpha(x)y') \sin ky' dy'}{\alpha(x)k} = \\ &= \frac{\sin ky}{k} - \frac{c^2(x) \operatorname{sh}(\alpha(x)y) [\alpha(x) \operatorname{ch}(\alpha(x)y) \sin ky - k \operatorname{sh}(\alpha(x)y) \cos ky]}{k(\alpha^2(x) + k^2)(\alpha^2(x) + \frac{c^2(x)}{2}(\frac{\operatorname{sh} 2\alpha(x)y}{2\alpha(x)} - y))}, \end{aligned} \quad (71)$$

$$V(x; y) = \frac{2\alpha(x)[y/2 - \bar{c}^2(x)\alpha^2(x)] - 2\operatorname{sh}^2(\alpha(x)y)}{[\bar{c}^2(x)\alpha^2(x) + \frac{1}{2}(\frac{\operatorname{sh} 2\alpha(x)y}{2\alpha(x)} - y)]^2}. \quad (78)$$

Можно проверить метод построения следующим образом. Переходя в (67) к асимптотике при $y \rightarrow \infty$ и выделяя слагаемые с $\exp \pm iky$, находим коэффициенты при них. Это и есть функции Лоста $f_{\pm}(x; k)$, которые совпадают с (77). По ним, используя определение (54), строим S -матрицу:

$$S'(x; k) = \frac{f_-(x; k)}{f_+(x; k)} = \frac{(k + i\alpha(x))^2}{(k - i\alpha(x))^2}. \quad (79)$$

Легко записать случай N -связанных состояний, которому соответствует

$$f_+(x; k) = \prod_n \frac{k - i\alpha_n(x)}{k + i\alpha_n(x)}, \quad (80)$$

где $\alpha_n(x) = -\alpha_n^2(x)$ определяются при решении многоканальной системы уравнений по медленным переменным и последующей диагонализации (50). Исследования легко провести в сферических координатах, выбрав в качестве быстрой переменной угол, медленных - координату, и наоборот.

Пример в подходе Марченко

Безотражательным (прозрачным) потенциалам вдоль быстрой переменной^{x)} отвечает одномерная обратная задача на всей оси $-\infty < y < \infty$ с равным нулю коэффициентом отражения $S^{0T} = 0$. Коэффициент прохождения S^{T0x} , равный по модулю 1, имеет вид рациональной дроби

$$S^{T0x}(x; k) = \prod_n \frac{k + i\mathcal{E}_n(x)}{k - i\mathcal{E}_n(x)}. \quad (81)$$

Обратная задача на всей оси очень похожа на двухканальную с двумя расцепленными основными интегральными уравнениями. Однако, поскольку $V(x; y)$ выражается как через ядро $K_1(x; y, y')$ одного интегрального уравнения, так и через ядро $K_2(x; y, y')$ другого уравнения, достаточно найти одно из $K_i(x; y, y')$ по формуле, совпадающей с (51). Тогда в $Q^M(x; y, y')$, определяемом в данном случае при $v(y) \equiv 0$ по формуле

$$Q^M(x; y, y') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^{0T}(x; k) \exp i k (y + y') dk + \sum_n^m \delta_n^2(x) \exp(-\mathcal{E}_n(x)(y + y')), \quad (82)$$

остается лишь вклад от состояний дискретного спектра

$$Q^M(x; y, y') = \sum_n^m \delta_n^2(x) \exp(-\mathcal{E}_n(x)(y + y')). \quad (82^1)$$

Аналогично для $K^M(x; y, y')$ имеем

$$K^M(x; y, y') = -\sum_n^m \delta_n^2(x) f(i\mathcal{E}_n(x), y) \exp(-\mathcal{E}_n(x)y). \quad (83)$$

x) Возможны разные варианты: прозрачные потенциалы как вдоль медленной, так и вдоль быстрой переменных, прозрачные вдоль одной из них, запирающие вдоль одной из координат либо обеих и тому подобные рассмотрения.

Для решений носта при $k = i\alpha_n(x)$ получаем из (51) систему алгебраических уравнений

$$f(i\alpha_n(x), y) = \sum_j^m \exp(-\alpha_j(x)y) \bar{P}_{jn}^{-1}(x) \quad (84)$$

с матрицей коэффициентов $\bar{P}_{nj}(x)$, параметрически (через спектральные параметры) зависящих от X :

$$P_{nj}(x; y) = \delta_{nj} + \frac{\delta_n^2(x) \exp[-(\alpha_n(x) + \alpha_j(x))y]}{\alpha_n(x) + \alpha_j(x)} \quad (85)$$

Подставляя $f(i\alpha_n(x), y)$ в $K^M(x; y, y)$ (53) и используя (57), (58), получаем

$$V(x; y) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det \| P_{nj}(x, y) \|, \quad (86)$$

$$f_{\pm}(x; k, y) = \exp(\pmiky) + \sum_{nj} \exp(-\alpha_n(x)y) \delta_n^2(x) P_{nj}^{-1}(x) \exp(-\alpha_j(x) \pm ik)(\alpha_j(x) \pm ik)^{-1} \quad (87)$$

В случае одного связанного состояния получаем потенциал типа Экарта

$$V(x; y) = - \frac{2\alpha(x) \delta^2(x) \exp(-2\alpha(x)y)}{\left[1 + \frac{\delta^2(x)}{2\alpha(x)} \exp(-2\alpha(x)y)\right]^2}, \quad (88)$$

который преобразуется к более простому виду, при использовании подстановки $\exp 2\alpha(x)y = \delta^2(x)/2\alpha(x)$ и преобразования

$$\{1 + \exp[-2\alpha(x)(y - \tilde{y}(x))]\}^2 = 4 \operatorname{ch}^2 [\alpha(x)(y - \tilde{y}(x))] \exp[2\alpha(x)y - \tilde{y}(x)]$$

$$V(x; y) = - \frac{\alpha^2(x)}{ch^2 [x(x)(y - j^0(x))]} \quad (89)$$

$$f(ix(x), y) = \exp(-x(x)y) \left\{ 1 + \exp[-2x(x)(y - j^0(x))] \right\}^{-1} \quad (90)$$

$$f_{\pm}(x; k, y) = \exp(\pm iky) \left\{ 1 + \frac{\exp[-2x(x)(y - j^0(x))]}{1 + \exp[-2x(x)(y - j^0(x))]} (\alpha(x) \mp k) \right\} \quad (91)$$

Заключение

Мы продемонстрировали некоторые примеры точно решаемых моделей, с тем, чтобы показать, как переносится техника баргмановских потенциалов на параметрическое семейство обратных задач.

Используя приведенные формулы, можно изучать некоторые геометрические аспекты квантовой механики. Например, задавая функциональную зависимость термов, можно увидеть, как ведут себя матричные элементы оператора индуцированной связности и скалярного потенциала при сближении уровней вплоть до их квазипересечений. В последовательном подходе параметрическая зависимость термов от медленных переменных должна определяться после решения обратной задачи для медленной системы уравнений (раздел 2). В плане приложений параметрическая формулировка обратной задачи в рамках адiabатического подхода позволяет эффективно решать вопрос о выборе того или иного класса парных потенциалов, применяемых в расчетах различных ядерных систем. При фиксированном классе парных потенциалов решение обратной задачи для системы квазирадикальных уравнений позволяет восстановить трехчастичные потенциалы.

Литература

1. B. Zygelman. Phys. Lett., 1987, A125, p. 476.
2. С. И. Виноцкий, В. М. Дубовик, М. Б. Кадомцев, Б. Л. Марковски, А. А. Сузько. Препринт ОИЯИ Р4-88-532, Дубна, 1988, Topological Phases in quantum Theory, Dubna, September, 1988, World Scientific.
3. С. И. Виноцкий, В. М. Дубовик, Б. Л. Марковски, А. А. Сузько. Препринт ОИЯИ Р2-89-228, Дубна, 1989.
4. A. A. Suzko, S. I. Vinitzky. Inter. Conf. on Few-Body System, Van-Couver, 1989.
5. V. M. Dubovik, M. B. Kadomtsev, B. L. Markovski, A. A. Suzko, S. I. Vinitzky. In: Proc. Conf. "Schroedinger Operator Standart and Nonstandart", Dubna, 1988, World Scientific, 1989; Материалы Международного семинара "Микроскопические методы в теории систем нескольких частиц", Калинин, изд-во Калининского университета, 1988, т. I, с. 4-10.
6. Moser J. Adv. Math., 1975, v. 15, p. 197.
7. P. Kurasov, Yu. V. Melnikov. Topological Phases in quantum Theory, Dubna, September, 1988, World Scientific, 1989.
8. Б. Н. Захарьев, А. А. Сузько. Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. Энергоатомиздат, М., 1985, 2-е издание, Springer-Verlag, New-York, 1989.
9. К. Шадан, П. Сабатьев. Обратная задача в квантовой теории рассеяния. Пер. с англ. М., Мир, 1980. (second edition, 1989, Springer-Verlag).
10. Р. Г. Новиков, Г. М. Хенкин. $\bar{\delta}$ -уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния. Успехи мат. наук, 1987, т. 42, вып. 3, с. 94-151.
11. M. V. Berry. Proc. R. Soc., 1984, A252, 45.
12. В. И. Пивоварчик, А. А. Сузько. В сб. трудов "Эволюционные методы в неоднородных средах". Минск, изд-во ИТМО АН БССР, 1982, с. 168-177.
13. С. И. Виноцкий, М. Б. Кадомцев, А. А. Сузько. Препринт ОИЯИ Р4-89-268, Дубна, 1989; Ядерная физика, ЯЗ, 1990.
14. В. А. Марченко. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев, Наукова Думка, 1977, с. 330.

15. E.V.Plechanov, A.A.Suzko, B.N.Zakhariev. Ann. der Phys., 1982, B.39, s.313.
16. Б.Н.Захарьев, Е.Б.Плеханов, А.А.Сузько. Изв. АН СССР, сер. физ., 1980, т.44, № 5, с.949.
17. I.V.Amirkhanov, I.V.Puzynin, T.P.Puzynina, B.N.Zakhariev. Proc.Intern. Workshop Schrödinger Operator, Standart and Nonstandart, Dubna, September, 1988, World Scientific, 1989.
18. J.R.Cox. J.Math. Phys., 1964, v.5, p.1065.
19. Б.Н.Захарьев, С.А.Ниязгулов, А.А.Сузько. Ядерная физика, 1974, т.20, с.1273,
В.П.Жигунов, Б.Н.Захарьев, С.А.Ниязгулов, А.А.Сузько.
Препринт ОИЯИ Р4-7815, Дубна, 1974.
20. K.L.Moses. J.Math. Phys., 1979, v.20, p.2047.
21. Б.Н.Захарьев, В.Н.Пивоварчик, Е.Б.Плеханов, А.А.Сузько. ЭЧАЯ, 1982, т.13, вып.6, с.1285-1335.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 февраля 1990 года.