

8940

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



С326
Б-874

8/ix-75 e

P4 - 8940

Й.Г.Бранков, Н.С.Тончев

3317/2-75

О ВЛИЯНИИ СТРУКТУРНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ТИПА УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА
НА СВЕРХПРОВОДЯЩИЙ ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД

1975

P4 - 8940

Й.Г.Бранков, Н.С.Тончев

О ВЛИЯНИИ СТРУКТУРНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ТИПА УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА
НА СВЕРХПРОВОДЯЩИЙ ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

§1. Постановка задачи

Здесь мы продолжим начатое в работе /1/ (цитируемой далее как I) исследование модели однозонного металла со спектром, обладающим свойством $\epsilon_k = -\epsilon_{k+Q}$, в которой одновременно учтено как электрон-электронное притяжение типа БКШ, так и электрон-фононное взаимодействие с модой $Q = \frac{\pi}{a} (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, приводящее к структурному фазовому переходу /2,3/. В обозначениях работы /1/ рассматриваемый гамильтониан имеет вид:

$$\mathcal{H} = \sum_{k,\sigma} (\epsilon_k - \mu) a_{k,\sigma}^+ a_{k,\sigma} + \hbar\omega(Q) b_Q^+ b_Q + \frac{g(Q)}{\sqrt{V}} \sum_{k,\sigma} (a_{k+Q,\sigma}^+ a_{k,\sigma} b_Q + \text{с.с.}) - \frac{g_s^2}{2V} \sum_{k,\sigma} \sum_{k',\sigma'} \lambda(|\epsilon_k - \mu_0|) \lambda(|\epsilon_{k'} - \mu_0|) \text{sign}(\sigma\sigma') a_{k,\sigma}^+ a_{-k,-\sigma}^+ a_{-k',-\sigma'} a_{k',\sigma'}. \quad (I)$$

Напомним, что нами был построен квадратичный по ферми-операторам гамильтониан $\mathcal{H}_0(\Delta, S, \mu)$, термодинамически эквивалентный гамильтониану (I), и вычислено асимптотически точное выражение для плотности свободной энергии системы (I).

Уравнения самосогласования, определяющие нетривиальные значения диэлектрического Δ и сверхпроводящего S параметров порядка, а также химический потенциал системы μ , в приближении постоянной плотности электронных состояний $\rho(\epsilon) = \frac{1}{W}$ имеют вид:

$$\frac{1}{2} \int_0^W d\epsilon \left\{ \frac{x_1(\epsilon)}{E^{(1)}(\epsilon)} \text{th} \frac{E^{(1)}(\epsilon)}{2kT} + \frac{x_2(\epsilon)}{E^{(2)}(\epsilon)} \text{th} \frac{E^{(2)}(\epsilon)}{2kT} \right\} = A \tau \text{sh} \frac{W}{\Delta_0}, \quad (2a)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^W d\epsilon \left\{ \frac{y_1(\epsilon)}{E^{(1)}(\epsilon)} \text{th} \frac{E^{(1)}(\epsilon)}{2kT} + \frac{y_2(\epsilon)}{E^{(2)}(\epsilon)} \text{th} \frac{E^{(2)}(\epsilon)}{2kT} \right\} = A \tau \text{sh} \frac{\omega_D}{S_0}, \quad (2б)$$

$$\frac{1}{2} \mu \int_0^W d\epsilon \left\{ \frac{z_1(\epsilon)}{E^{(1)}(\epsilon)} \text{th} \frac{E^{(1)}(\epsilon)}{2kT} + \frac{z_2(\epsilon)}{E^{(2)}(\epsilon)} \text{th} \frac{E^{(2)}(\epsilon)}{2kT} \right\} = \mu_0. \quad (2в)$$

Здесь, рассматривая для определенности случай более чем наполовину заполненной зоны (т.е. $\mu_0 > 0$), для функций, входящих в уравнения (2), имеем выражения

$$\chi_{1,2}(\epsilon) = \begin{cases} 1 \pm \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}}, & 0 \leq \epsilon \leq a, \quad b < \epsilon \leq w; \\ 1 \pm \frac{\mu^2 + \frac{1}{4} S^2}{\sqrt{(\mu\epsilon - \frac{1}{4} S^2)^2 + \Delta^2(\mu^2 + \frac{1}{4} S^2)}}, & a < \epsilon \leq b; \end{cases}$$

$$\chi_{1,2}(\epsilon) = \begin{cases} \theta(\omega_D - \mu_0), & 0 \leq \epsilon \leq a; \\ \frac{1}{2} \left[1 \mp \frac{\mu\epsilon - \frac{1}{4} S^2 - \frac{1}{2} \Delta^2}{\sqrt{(\mu\epsilon - \frac{1}{4} S^2)^2 + \Delta^2(\mu^2 + \frac{1}{4} S^2)}} \right], & a < \epsilon \leq b; \\ 0, & b < \epsilon \leq w; \end{cases}$$

$$\tau_{1,2}(\epsilon) = \begin{cases} 1 \pm \frac{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}}{\mu}, & 0 \leq \epsilon \leq a, \quad b < \epsilon \leq w; \\ 1 \pm \frac{\epsilon^2 + \Delta^2 - \frac{1}{4} S^2 \cdot \epsilon}{\sqrt{(\mu\epsilon - \frac{1}{4} S^2)^2 + \Delta^2(\mu^2 + \frac{1}{4} S^2)}}, & a < \epsilon \leq b; \end{cases}$$

$$a = |\mu_0 - \omega_D|, \quad b = \mu_0 + \omega_D.$$

Для спектра квазичастичных возбуждений в работе I было получено следующее выражение:

$$E^{(1,2)}(\epsilon) = \begin{cases} \sqrt{(\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} \pm \mu)^2 + S^2 \theta(\omega_D - \mu_0)}, & 0 \leq \epsilon \leq a; \\ \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2 + \mu^2 + \frac{1}{2} S^2 \pm 2\sqrt{(\mu\epsilon - \frac{1}{4} S^2)^2 + \Delta^2(\mu^2 + \frac{1}{4} S^2)}}, & a < \epsilon \leq b; \\ |\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} \pm \mu|, & b < \epsilon \leq w. \end{cases}$$

В уравнениях (2) для удобства введены величины ^{/4/}

$$\Delta_0 = \frac{w}{\text{sh} \frac{w}{g_d^2}} \approx 2w \exp\left\{-\frac{w}{g_d^2}\right\} \quad \left(\frac{w}{g_d^2} \gg 1\right),$$

$$S_0 = \frac{\omega_D}{\text{sh} \frac{w}{g_s^2}} \approx 2\omega_D \exp\left\{-\frac{w}{g_s^2}\right\} \quad \left(\frac{w}{g_s^2} \gg 1\right),$$

совпадающие со значениями параметров порядка соответственно в чистых сверхпроводящей и диэлектрической фазах при нулевом значении химического потенциала невзаимодействующих электронов в зоне ($\mu_0 = 0$) и при $T = 0$.

§2. Область сосуществования фаз

Перейдем теперь к исследованию основного состояния рассматриваемой системы. Определим сначала область значений констант Δ_0, S_0, μ_0 , при которых существует совместное нетривиальное решение уравнений (2) при $T = 0$. Как нетрудно заметить, уравнение (2б) при $T = 0$ имеет нетривиальное решение $S \neq 0$ при любых $\mu^2 > \Delta^2$ (что соответствует $\mu_0 \neq 0$ *) и любых S_0 . Это обстоятельство отражает тот факт, что основное состояние системы с "избыточными" электронами в отщепившейся верхней зоне ($\mu > \Delta$ при $\mu_0 > 0$) или с незаполненной нижней зоной ($\mu < -\Delta$ при $\mu_0 < 0$) неустойчиво относительно сколь угодно слабого притяжения между электронами. Таким образом, наша задача состоит в отыскании области значений констант связи и химического потенциала, при которых сверхпроводящее состояние реализуется при $\Delta \neq 0$. Линию раздела чистой (S) и "смешанной" ($S\Delta$) фаз найдем, переходя в уравнениях самосогласования к пределу $\Delta \rightarrow 0$.

Для определения химического потенциала на границе "S\Delta" области воспользуемся соответствующим уравнением при общем виде функции обрезания $\lambda(|x|)$ (см. I), подставляя в нем $\Delta = 0$:

* В случае $\mu_0 = 0$ это уравнение имеет решение ^{/4,5/} $S^2 = S_0^2 - \Delta^2$, если Δ , определяемое из уравнения (2а), удовлетворяет условию $0 < \Delta^2 < S_0^2$.

$$\frac{1}{2} \int_0^w d\epsilon \left\{ \frac{\mu + \epsilon}{\sqrt{(\epsilon + \mu)^2 + \lambda(\epsilon + \mu_0)S^2}} + \frac{\mu - \epsilon}{\sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + \lambda(\epsilon - \mu_0)S^2}} \right\} = \mu_0. \quad (3)$$

Отсюда, учитывая, что $\lambda(|x|) \equiv 0$ при $|x| > \omega_D$, и произведя несложные преобразования, получаем эквивалентную запись уравнения (3):

$$\mu + \frac{1}{2} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} dx \left\{ \text{sign}(x + \mu_0 - \mu) - \frac{x + \mu_0 - \mu}{\sqrt{(x + \mu_0 - \mu)^2 + \lambda^2(|x|)S^2}} \right\} = \mu_0.$$

Последнее, как легко проверить, имеет единственное решение $\mu = \mu_0$.

Далее, при $\Delta = 0$, $\mu = \mu_0$ и $T = 0$ уравнение (2б) принимает вид:

$$\frac{1}{2} \theta(\omega_D - \mu_0) \int_0^a d\epsilon \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\epsilon + \mu_0)^2 + S^2 \theta(\omega_D - \mu_0)}} + \frac{1}{\sqrt{(\epsilon - \mu_0)^2 + S^2 (\omega_D - \mu_0)}} \right\} + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d\epsilon}{\sqrt{(\epsilon - \mu_0)^2 + S^2}} = \text{Arzsh} \frac{\omega_D}{S_0},$$

откуда получаем $S = S_0$.

Уравнение (2а) при $T=0$ и $\Delta \rightarrow 0$ удобно исследовать для случаев $\omega_D > \mu_0$ и $\omega_D < \mu_0$ поотдельности.

А. При $\omega_D > \mu_0$, после вычисления соответствующих интегралов, находим:

$$\text{Arzsh} \frac{\omega_D}{S_0} - \text{Arzsh} \frac{w}{\Delta_0} + \ln \frac{w}{\omega_D + \mu_0} - \frac{1}{\sqrt{1 + S_0^2/\mu_0^2}} \text{Arzsh} \frac{\mu_0}{S_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + S_0^2/\mu_0^2}} \ln \frac{[\alpha + \sqrt{(\alpha + \mu_0)^2 + S_0^2} - \sqrt{\mu_0^2 + S_0^2}][\alpha + \sqrt{(\alpha - \mu_0)^2 + S_0^2} + \sqrt{\mu_0^2 + S_0^2}]}{[\alpha + \sqrt{(\alpha - \mu_0)^2 + S_0^2} - \sqrt{\mu_0^2 + S_0^2}][\alpha + \sqrt{(\alpha + \mu_0)^2 + S_0^2} + \sqrt{\mu_0^2 + S_0^2}]} +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln \frac{[\beta + \mu_0 + \sqrt{(\beta - \mu_0)^2 + S_0^2}][\alpha - \mu_0 + \sqrt{(\alpha - \mu_0)^2 + S_0^2} + S_0^2/2\mu_0]}{[\alpha + \mu_0 + \sqrt{(\alpha - \mu_0)^2 + S_0^2}][\beta - \mu_0 + \sqrt{(\beta - \mu_0)^2 + S_0^2} + S_0^2/2\mu_0]} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{(\beta - \mu_0)^2 + S_0^2} + \mu_0 + S_0^2/4\mu_0}{\sqrt{(\alpha - \mu_0)^2 + S_0^2} + \mu_0 + S_0^2/4\mu_0} = 0, \quad (5)$$

где $\alpha = |\mu_0 - \omega_D|$, $\beta = \mu_0 + \omega_D$.

Когда $\omega_D \gg \mu_0$, пренебрегая величиной порядка $\frac{\Delta_0^2}{w^2} \ll 1$ и $\frac{S_0^2}{\omega_D^2} \ll 1$ в верхнем выражении, получим следующее простое уравнение для границы раздела S и $S\Delta$ фаз:

$$\ln \frac{\Delta_0}{S_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + S_0^2/\mu_0^2}} \text{Arzsh} \frac{\mu_0}{S_0}. \quad (6)$$

Уравнение (6) было получено в работе /4/. Область сосуществования фаз приведена на рис. (I).

Ометим, что при $\mu_0 = 0$ из (5) находим соответствующую границу раздела для случая наполовину заполненной зоны*):

$$\text{Arzsh} \frac{\omega_D}{S_0} - \text{Arzsh} \frac{w}{\Delta_0} + \ln \frac{w}{\omega_D} = 0$$

или /5/

$$\frac{\Delta_0}{S_0} = \left[\frac{1 + \epsilon^2}{2} + \frac{1 - \epsilon^2}{2} \sqrt{1 + S_0^2/\omega_D^2} \right]^{-1}, \quad \epsilon = \frac{\omega_D}{w},$$

что с точностью до членов порядка S_0^2/ω_D^2 совпадает с прямой $\Delta_0 = S_0$ /4/.

* Этот случай подробно рассматривался в работах /5,6/.

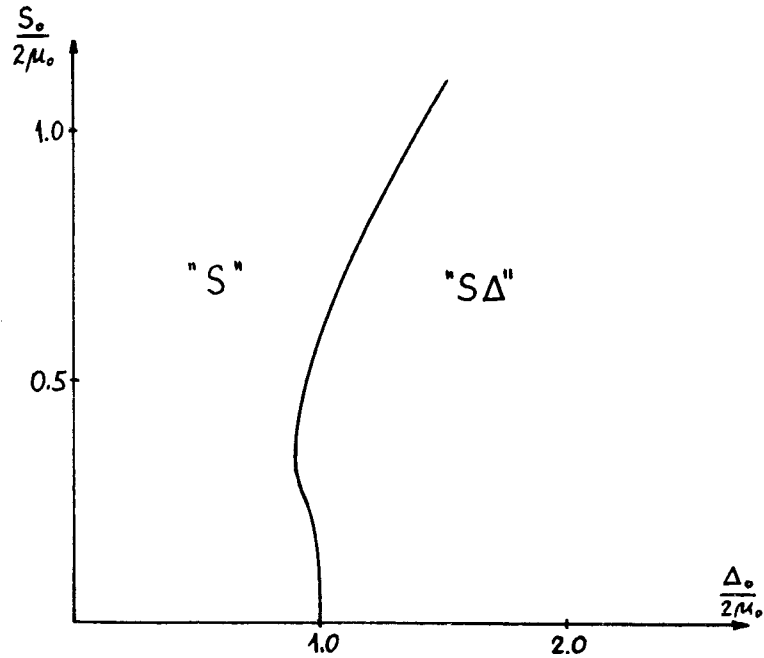


Рис. I. Фазовая диаграмма при $T = 0$.

В. При $\omega_D < \mu_0$ имеем уравнение:

$$\operatorname{Arsh} \frac{\omega_D}{S_0} - \operatorname{Arsh} \frac{\omega}{\Delta_0} + \ln \frac{\omega}{\omega_D + \mu_0} + \frac{1}{2} \ln \frac{b + \mu_0 + \sqrt{(b - \mu_0)^2 + S_0^2}}{a + \mu_0 + \sqrt{(a - \mu_0)^2 + S_0^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{[a - \mu_0 + \sqrt{(a - \mu_0)^2 + S_0^2} + S_0^2/2\mu_0][\sqrt{(b - \mu_0)^2 + S_0^2} + \mu_0 + S_0^2/4\mu_0]}{[b - \mu_0 + \sqrt{(b - \mu_0)^2 + S_0^2} + S_0^2/2\mu_0][\sqrt{(a - \mu_0)^2 + S_0^2} + \mu_0 + S_0^2/4\mu_0]} = 0. \quad (7)$$

Пренебрегая, как и в предыдущем случае, членами порядка $\frac{\Delta_0^2}{\omega^2}$ и $\frac{S_0^2}{\omega^2}$, получаем

$$\frac{\Delta_0}{2\mu_0} = 1. \quad (8)$$

Заметим, что выражение (6), справедливое при $\omega_D \gg \mu_0$, принимает вид (8) в пределе $\frac{S_0^2}{\mu_0^2} \ll 1$.

§3. Влияние диэлектрического спаривания на сверхпроводящую щель при $T = 0$

В работе (I), на основе анализа спектра квазичастичных возбуждений в рассматриваемой системе, нами было показано, что при

$$\frac{S^2}{\mu^2 - \Delta^2} \ll 1 \quad (9)$$

эффективная диэлектрическая щель $2\tilde{\Delta}$ совпадает в нулевом приближении с параметром 2Δ , а роль эффективной сверхпроводящей щели играет величина $2S_{\text{eff}}$, где

$$S_{\text{eff}} = \begin{cases} S & , \omega_D - \mu_0 > \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}, \\ \tilde{S} \equiv \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}}{2\mu} S & , 0 < \mu_0 - \omega_D < \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}. \end{cases} \quad (10)$$

В связи с существенными упрощениями, возникающими в этом случае, который соответствует так называемому приближению слабой связи^{/4/},

мы перейдем теперь к исследованию решения системы уравнений (2) при $T=0$, предполагая наличие сильного неравенства (9). В нулевом порядке по малому параметру $\frac{S^2}{\mu^2 - \Delta^2}$ система уравнений (2) распадается на три независимых уравнения. Для химического потенциала μ и диэлектрической щели Δ сразу получаем:

$$\mu = \sqrt{\mu_0^2 + \Delta^2}, \quad (II)$$

$$\Delta = \sqrt{\Delta_0(\Delta_0 - 2\mu_0)}, \quad \mu_0 \leq \frac{1}{2} \Delta_0. \quad (I2)$$

В уравнении для определения сверхпроводящей щели согласно принятому приближению удержим параметр S только в логарифмически расходящихся при $S \rightarrow 0$ интегралах, полагая $S=0$ в остальных членах. Рассмотрим возникающие при этом существенно разные случаи $\omega_D > 2\mu_0$ и $\omega_D < \mu_0$ (см. (I0) и (II)) поотдельности. Напомним, что из-за разрывности спектра и сделанных приближений необходимо соблюдать осторожность при $\omega_D \approx 2\mu_0$, требуя выполнения условия малости "скачков" (см. (I.29)):

$$\frac{S^2}{(\sqrt{(\omega_D \pm \mu_0)^2 + \Delta^2} - \mu)^2} \ll 1. \quad (I3)$$

A. Случай $\omega_D > 2\mu_0$.

С учетом сделанных выше предположений уравнение для сверхпроводящей щели принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^a d\epsilon \left\{ \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} + \mu} + \frac{1}{\sqrt{(\epsilon^2 + \Delta^2 - \mu)^2 + S^2}} \right\} + \\ & + \frac{1}{4} \int_a^b d\epsilon \left\{ \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} + \mu} \left(1 - \frac{\mu\epsilon - \frac{1}{2}\Delta^2}{\mu\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} \right) + \frac{1}{|\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} - \mu|} \left(1 + \frac{\mu\epsilon - \frac{1}{2}\Delta^2}{\mu\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} \right) \right\} = \\ & = \ln \frac{2\omega_D}{S_0}, \end{aligned} \quad (I4)$$

или после интегрирования и удержания в эллиптических интегралах только ведущей по S асимптотики имеем

$$\begin{aligned} & \ln \frac{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + \Delta^2}} \sqrt{b + \sqrt{b^2 + \Delta^2}}}{\mu + \mu_0} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\omega_D + 2\mu_0}}{\omega_D - 2\mu_0} \frac{\mu + \sqrt{a^2 + \Delta^2}}{\mu + \sqrt{b^2 + \Delta^2}} + \\ & + \frac{\mu}{\mu_0} \ln \frac{4\mu_0 \sqrt{a^2 - \mu_0^2}}{S(\mu a + \mu_0 \sqrt{a^2 + \Delta^2})} + \frac{1}{2\mu_0} \left(1 - \frac{\Delta^2}{2\mu^2} \right) \ln \frac{\sqrt{\omega_D + 2\mu_0}}{\omega_D - 2\mu_0} \frac{\mu a + \mu_0 \sqrt{a^2 + \Delta^2}}{\mu b + \mu_0 \sqrt{b^2 + \Delta^2}} = \\ & = \ln \frac{2\omega_D}{S_0}, \end{aligned} \quad (I5)$$

где по-прежнему $\alpha = |\omega_D - \mu_0|$, $\beta = \omega_D + \mu_0$.

Пренебрегая членами порядка

$$\frac{\mu_0^2}{\omega_D^2} \ll 1, \quad \frac{\Delta^2}{\omega_D^2} \ll 1, \quad (I6)$$

с учетом (II), (I2) получаем:

$$S = \frac{4\mu^2}{\Delta_0} \left(\frac{S_0}{\Delta_0} \right)^{\frac{\mu_0}{\Delta_0 - \mu_0}}. \quad (I7)$$

Результат (I7) был получен и подробно исследован в работе А.Н.Русинова, До Чан Кат и Д.В.Копаева /4/. Ими было показано, что величина S в зависимости от Δ_0 или μ_0 обладает максимумом, расположенным внутри $S\Delta$ -фазы при $\Delta_0 \geq eS_0$, и что величина сверхпроводящей щели в максимуме превышает значение щели S_0 в S -фазе. Отметим, что, с нашей точки зрения, область применимости результатов работы /4/ ограничивается неравенствами (I6). Остановимся более подробно на следующем случае.

B. Случай $\omega_D < \mu_0$.

Для сверхпроводящей щели имеем теперь уравнение:

$$\frac{1}{4} \int_a^b d\epsilon \left\{ \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} + \mu} \left(1 - \frac{\mu\epsilon - \frac{1}{2}\Delta^2}{\mu\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} - \mu)^2 + \tilde{S}^2}} \left(1 + \frac{\mu\epsilon - \frac{1}{2}\Delta^2}{\mu\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} \right) \right\} = \ln \frac{2\omega_D}{S_0}, \quad (18)$$

или, оставляя с учетом (13) главные по \tilde{S} члены, получаем:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{4\mu_0^2 - \omega_D^2} (\beta + \sqrt{\beta^2 + \Delta^2})}{(\mu + \mu_0)(\mu + \sqrt{\beta^2 + \Delta^2})} \frac{2\omega_D}{\tilde{S}} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_0} \left(1 - \frac{\Delta^2}{2\mu^2} \right) \ln \sqrt{\frac{2\mu_0 + \omega_D}{2\mu_0 - \omega_D}} \frac{2\mu_0^2}{\mu\beta + \mu_0\sqrt{\beta^2 + \Delta^2}} \frac{2\omega_D}{\tilde{S}} = \ln \frac{2\omega_D}{S_0}. \quad (19)$$

Выражение (19) принимает более простой вид в случае

$$\frac{\omega_D^2}{\mu_0^2} \ll 1. \quad (20)$$

Тогда, пренебрегая величинами порядка (20), находим

$$\frac{\tilde{S}}{2\omega_D} = \frac{\mu_0}{\mu} \left(\frac{S_0}{2\omega_D} \right)^{\frac{4\mu\mu_0}{(\mu+\mu_0)^2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_D}{\mu} \right) \left[1 - \left(\frac{\mu+\mu_0}{2\mu} \right)^2 \right] \frac{4\mu\mu_0}{(\mu+\mu_0)^2} + O\left(\frac{\omega_D^2}{\mu^2} \right) \right\}, \quad (21)$$

или, используя (II) и (12), имеем:

$$\frac{\tilde{S}}{2\omega_D} = \frac{\mu_0}{\Delta_0 - \mu_0} \left(\frac{S_0}{2\omega_D} \right)^{\frac{4\mu_0(\Delta_0 - \mu_0)}{\Delta_0^2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_D}{\Delta_0 - \mu_0} \right) \left[1 - \frac{\Delta_0^2}{4(\Delta_0 - \mu_0)} \right] \frac{4\mu_0(\Delta_0 - \mu_0)}{\Delta_0^2} + \dots \right\}. \quad (22)$$

Отметим сразу, что показатель степенной зависимости эффективной сверхпроводящей щели \tilde{S} от константы S_0 и в этом случае (ср. (17)) оказывается при $\Delta \neq 0$ меньше единицы:

$$\frac{4\mu_0(\Delta_0 - \mu_0)}{\Delta_0^2} = 1 - \left(\frac{\Delta_0 - 2\mu_0}{\Delta_0} \right)^2 < 1. \quad (23)$$

Отсюда следует, что относительное увеличение сверхпроводящей щели

$$\frac{\tilde{S}}{S_0} = \frac{\mu_0}{\Delta_0 - \mu_0} \left(\frac{S_0}{2\omega_D} \right)^{-\left(\frac{\Delta_0 - 2\mu_0}{\Delta_0} \right)^2} \left[1 + O\left(\frac{\omega_D}{\mu} \right) \right], \quad \Delta_0 \geq 2\mu_0. \quad (24)$$

может принимать сколь угодно большие значения при достаточно малых $\frac{S_0}{2\omega_D}$. Разумеется, в такой ситуации больший интерес представляет зависимость $\frac{\tilde{S}}{2\omega_D}$ от параметров Δ_0 и μ_0 при фиксированном $\frac{S_0}{2\omega_D} \ll 1$. Перейдем к исследованию этой зависимости.

Пренебрегая в (22) линейной по $\frac{\omega_D}{\mu}$ поправкой, действующей в сторону увеличения \tilde{S} , рассмотрим функцию

$$\ln \frac{\tilde{S}}{2\omega_D} = \ln \frac{\mu_0}{\Delta_0 - \mu_0} + \frac{4\mu_0(\Delta_0 - \mu_0)}{\Delta_0^2} \ln \frac{S_0}{2\omega_D}, \quad (25)$$

или, вводя соответствующие обозначения

$$x = \frac{\Delta_0}{\mu_0} \geq 2, \quad c_0 = \ln \frac{2\omega_D}{S_0} \gg 1,$$

имеем

$$\ln \frac{\tilde{S}}{2\omega_D} = -\ln(x-1) - c_0 \frac{4(x-1)}{x^2}. \quad (26)$$

Дифференцируя равенство (26) по x , находим:

$$\frac{1}{\tilde{S}} \frac{d\tilde{S}}{dx} = \frac{1}{x^3(x-1)} [4\alpha_0(x-2)(x-1) - x^3] \quad (x \geq 2). \quad (27)$$

Из выражения (27) следует, что при

$$c_0 = \ln \frac{2\omega_D}{S_0} > \frac{3}{2} \sqrt{3} \approx 2.6,$$

т.е. при $\frac{S_0}{2\omega_0} < 0,074$, величина \tilde{S} как функция параметра $X = \frac{\Delta_0}{\mu_0}$ в физической области $X \geq 2$ сначала убывает от первоначального значения S_0 на границе области " $S\Delta$ " фазы ($\frac{\Delta_0}{\mu_0} = 2$) до некоторого минимального значения, достигаемого в точке:

$$X_{\min} = \frac{4}{3}c_0 \left[2\sqrt{1 - \frac{g}{4c_0}} \cdot \cos \frac{\varphi - 2\pi}{3} + 1 \right], \quad (28)$$

где φ есть наименьший положительный корень уравнения

$$\cos \varphi = \left[1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{c_0} \left(1 - \frac{1}{2c_0} \right) \right] \left[1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{2}{2}} \frac{1}{c_0} \right]^{-\frac{3}{2}}. \quad (29)$$

Потом $\tilde{S}(X)$ начинает возрастать, сравнивается с величиной S_0 в точке X_0 , где $X_0 > 2$ определяется из уравнения

$$\ln(X_0 - 1) = c_0 \left(1 - \frac{2}{X_0} \right)^2, \quad (30)$$

далее достигает максимума при

$$X_{\max} = \frac{4}{3}c_0 \left[2\sqrt{1 - \frac{g}{4c_0}} \cdot \cos \frac{\varphi}{3} + 1 \right] \quad (31)$$

и потом снова начинает убывать с дальнейшим ростом величины $X = \frac{\Delta_0}{\mu_0}$.

Это поведение $\tilde{S}(X)$ изображено на рис. (II).

Заметим, что при $c_0 \gg 1$ из (29) имеем

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{27}{64} \right) \frac{1}{c_0^2}, \quad \sin \varphi \approx \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{1}{c_0},$$

и выражения (28), (31) значительно упрощаются, принимая вид

$$X_{\min} \approx 2 + \frac{5}{16c_0} + O\left(\frac{1}{c_0^2}\right), \quad (32)$$

$$X_{\max} \approx 4c_0 - 3 - \frac{7}{8} \frac{1}{c_0} + O\left(\frac{1}{c_0^2}\right). \quad (33)$$

В качестве примера укажем, что при $\frac{S_0}{2\omega_0} = 0,01$ максимальное значение \tilde{S} превышает S_0 более чем в два раза:

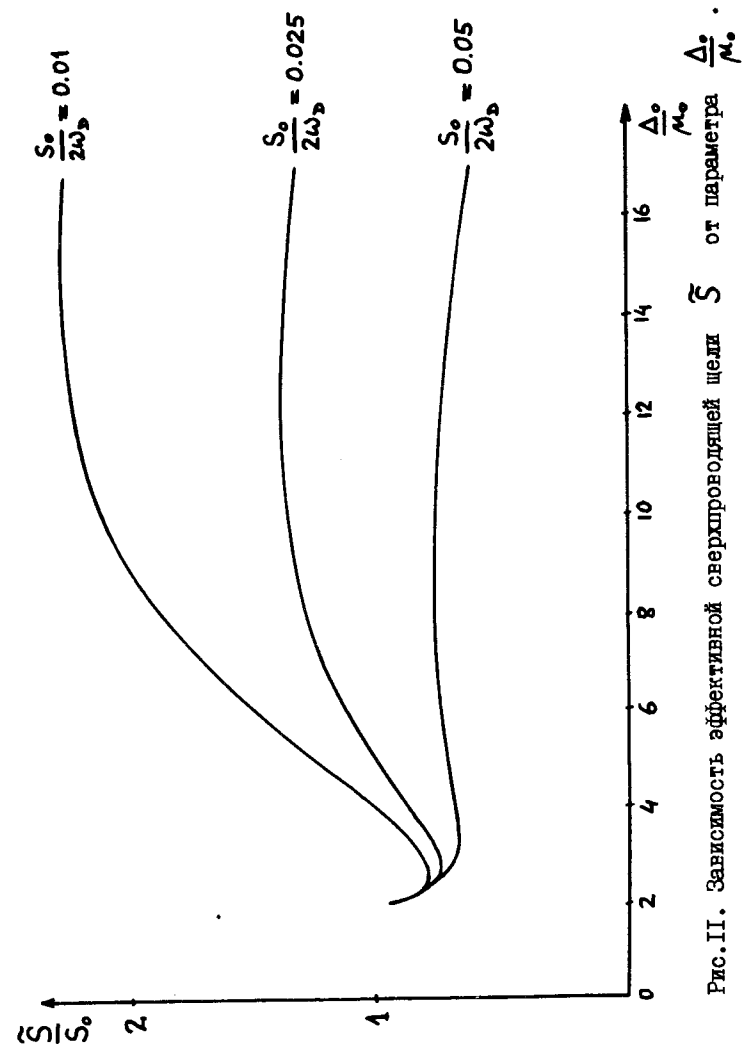


Рис. II. Зависимость эффективной сверхпроводящей щели \tilde{S} от параметра $\frac{\Delta_0}{\mu_0}$.

$$\frac{\tilde{S}}{S_0} \Big|_{\Delta_0 = 15\mu_0} \approx 2.27. \quad (34)$$

§4. Критическая температура сверхпроводящего перехода

Как известно, обычная теория БКШ приводит к прямо пропорциональной зависимости критической температуры чистого сверхпроводника T_{S0} от величины щели в основном состоянии /7/:

$$k T_{S0} = \frac{\gamma}{\pi} S_0 \quad \left(\frac{\gamma}{\pi} \approx 0.57 \right). \quad (35)$$

Вопрос о применимости соотношения вида (35) в смешанной "SΔ" фазе, однако, требует своего обоснования. Для случая $\omega_D \gg \mu_0$ это было сделано в работе /4/. Поэтому мы здесь рассмотрим главным образом противоположный предельный случай $\omega_D \ll \mu_0$.

Температура T_S , при которой исчезает сверхпроводящая щель в "SΔ" фазе, определяется из системы уравнений самосогласования (2) после перехода в них к пределу $T \rightarrow T_S, S \rightarrow 0$. В результате (совершая дополнительно замену переменной интегрирования $\epsilon \rightarrow E = \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}$) получаем уравнения вида:

$$\frac{1}{2} \int_{\Delta}^{\sqrt{\omega_D^2 + \Delta^2}} \frac{dE}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \left\{ \text{th} \frac{E+\mu}{2kT_S} + \text{th} \frac{E-\mu}{2kT_S} \right\} = \text{Arzsh} \frac{\omega}{\Delta_0}, \quad (36a)$$

$$\theta(\omega_D/\mu_0) \frac{1}{2} \int_{\Delta}^{\sqrt{\omega_D^2 + \Delta^2}} \frac{EdE}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \left\{ \frac{1}{E+\mu} \text{th} \frac{E+\mu}{2kT_S} + \frac{1}{E-\mu} \text{th} \frac{E-\mu}{2kT_S} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_{\Delta}^{\sqrt{\omega_D^2 + \Delta^2}} \frac{EdE}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \left\{ \left[1 - \frac{\mu \sqrt{E^2 - \Delta^2} - \frac{1}{2} \Delta^2}{\mu E} \right] \frac{1}{E+\mu} \text{th} \frac{E+\mu}{2kT_S} + \right. \\ \left. + \left[1 + \frac{\mu \sqrt{E^2 - \Delta^2} - \frac{1}{2} \Delta^2}{\mu E} \right] \frac{1}{E-\mu} \text{th} \frac{E-\mu}{2kT_S} \right\} = \text{Arzsh} \frac{\omega_D}{S_0}, \quad (36б)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Delta}^{\sqrt{\omega_D^2 + \Delta^2}} \frac{EdE}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \left\{ \text{th} \frac{E+\mu}{2kT_S} - \text{th} \frac{E-\mu}{2kT_S} \right\} = \mu_0. \quad (36в)$$

Исследование системы (36) проведем, используя следующую простейшую аппроксимацию:

$$\text{th} x \rightarrow \begin{cases} -1, & x \leq -1; \\ x, & |x| < 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases} \quad (37)$$

Учитывая (37) и вводя для удобства безразмерные параметры

$$\Delta^* = \frac{\Delta}{2kT_S}, \mu_0^* = \frac{\mu_0}{2kT_S}, \omega^* = \frac{\omega}{2kT_S}, \omega_D^* = \frac{\omega_D}{2kT_S}, \mu^* = \frac{\mu}{2kT_S}, \quad (38)$$

при $\mu^* - \Delta^* > 1$ и $\omega \gg \Delta_0$ получаем:

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{1}{2} \left(\text{Arzch} \frac{\mu^* - 1}{\Delta^*} + \text{Arzch} \frac{\mu^* + 1}{\Delta^*} \right) + \frac{1}{2} \mu^* \left(\text{Arzch} \frac{\mu^* - 1}{\Delta^*} - \text{Arzch} \frac{\mu^* + 1}{\Delta^*} \right) - \\ - \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\mu^* + 1)^2 - \Delta^{*2}} - \sqrt{(\mu^* - 1)^2 - \Delta^{*2}} \right), \quad (39)$$

или, считая $2kT_S \ll \mu_0$, т.е. $\mu^{*2} - \Delta^{*2} \gg 1$, находим

$$\mu(T_S) + \sqrt{\mu^2(T_S) - \Delta^2(T_S)} = \Delta_0. \quad (40)$$

Аналогично уравнение для химического потенциала (36в) приводит к соотношению

$$\sqrt{\mu^2(T_s) - \Delta^2(T_s)} = \mu_0. \quad (41)$$

Таким образом, комбинируя (40) и (41), получаем

$$\begin{aligned} \mu(T_s) &\approx \mu(0) = \Delta_0 - \mu_0, \\ \Delta(T_s) &\approx \Delta(0) = \sqrt{\Delta_0(\Delta_0 - 2\mu_0)} \quad (2kT_s \ll \mu_0). \end{aligned} \quad (42)$$

В этом приближении уравнение (36) при $\omega_D \ll \mu_0$ принимает вид

$$\frac{M + \mu_0}{4\mu_0\mu} \left[\ln \frac{M_0 \omega_D}{M 2kT_s} + 1 \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega_D}{M} \left[1 - \left(\frac{M + \mu_0}{2\mu} \right)^2 \right] = \ln \frac{2\omega_D}{S_0}, \quad (43)$$

откуда с учетом (21) имеем:

$$kT_s = \frac{e}{\pi} \tilde{S} \quad (kT_s \ll \omega_D \ll \mu_0). \quad (44)$$

Отметим, что отличие коэффициента пропорциональности между kT_s и \tilde{S} от γ/π связано с грубостью аппроксимации (37). Для нашего исследования, однако, было существенно установить справедливость соотношения

$$T_s / T_{s0} = \tilde{S} / S_0,$$

дающего возможность связать увеличение эффективной сверхпроводящей щели \tilde{S} с увеличением критической температуры сверхпроводящего фазового перехода T_s (см. §3).

Обсуждение результатов

В настоящей работе мы исходим из модели однозонного металла со спектром $\epsilon_k = -\epsilon_{k+Q}$, в которой притяжение между электронами типа БКШ включено в слой шириной $2\omega_D$:

$$D = \{k : |\epsilon_k - \mu_0| \leq \omega_D\}, \quad (45)$$

расположенный симметрично относительно поверхности Ферми невзаимодействующих электронов в зоне ($\epsilon_k = \mu_0$). При наличии только этого взаимодействия мы имели бы над сверхпроводящим основным состоянием хорошо известный спектр квазичастичных возбуждений

$$E_k^S = \text{sign}(\epsilon_k - \mu_0) \sqrt{(\epsilon_k - \mu_0)^2 + S_0^2}, \quad k \in D \quad (46)$$

с обычной зависимостью сверхпроводящей щели от константы взаимодействия

$$S_0 \approx 2\omega_D \exp \left\{ -\frac{1}{\rho(\mu_0)g_s^2} \right\}, \quad (47)$$

где $\rho(\mu_0) \approx \frac{1}{\omega}$ — плотность состояний на уровне Ферми.

Как было показано в [2,8], исходная электронная система со спектром ϵ_k неустойчива также относительно взаимодействия с фононной модой $Q = \frac{\pi}{a}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. В результате структурного фазового перехода происходит перестройка электронных состояний:

$$\epsilon_k \rightarrow E_k^A = \text{sign} \epsilon_k \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}, \quad (48)$$

при которой исходная зона расщепляется на две подзоны, разделенные щелью 2Δ :

$$E_k^A \in [-\sqrt{w^2 + \Delta^2}, -\Delta] \cup [\Delta, \sqrt{w^2 + \Delta^2}], \epsilon_k \in [-w, w],$$

т.е. область значений функции E_k^A совпадает с объединением интервалов $[-\sqrt{w^2 + \Delta^2}, -\Delta]$ и $[\Delta, \sqrt{w^2 + \Delta^2}]$.

Это расщепление зоны сопровождается соответствующим сдвигом уровня Ферми $\mu_0 \rightarrow \mu = \sqrt{\mu_0^2 + \Delta^2}$.

Одновременный учет как куперовского, так и электрон-дырочного спаривания приводит к появлению области смешанной "S Δ " фазы. Несмотря на сложный вид спектра элементарных возбуждений в этой фазе, анализ, проведенный в работе I, и результаты настоящего исследования указывают на то, что в некоторых случаях его можно интерпретировать в терминах появления эффективного, зависящего от квазиимпульса (энергии) электронов сверхпроводящего параметра порядка в новых электронных зонах:

$$E_k^{A,S} = \text{sign}(E_k^A - \mu) \sqrt{(E_k^A - \mu)^2 + \tilde{S}^2(k)}. \quad (49)$$

Таким образом, полученные результаты о свойствах асимптотически точно решаемой модели (I) позволяют выделить следующие основные факторы влияния структурного фазового перехода на сверхпроводящую щель и температуру сверхпроводящего фазового перехода.

I. Повышение плотности электронных состояний вблизи уровня Ферми. В рассмотренной здесь модели для новой плотности состояний $\rho_\Delta(E)$ имеем соотношение

$$\rho_\Delta(E) = \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \rho(\epsilon), \quad \epsilon = \sqrt{E^2 - \Delta^2}, \quad (50)$$

что соответствует повышению плотности у поверхности Ферми $E = \mu$ в $\frac{\mu}{\mu_0}$ раз. Это изменяет показатель экспоненциальной зависимости

щели S от константы взаимодействия в сторону увеличения (см. (17,22)).

2. Сужение области значений энергии электронов, для которых имеет место электрон-электронное притяжение, связанное с повышением плотности состояний при сохранении общего числа этих состояний. Так, например, при $\omega_D \ll \mu_0$ первоначальный энергетический слой толщиной $2\omega_D$, в котором включено взаимодействие типа БКШ, сужается примерно в μ_0/μ раз:

$$\sqrt{(\mu_0 + \omega_D)^2 + \Delta^2} - \sqrt{(\mu_0 - \omega_D)^2 + \Delta^2} \simeq 2\omega_D \frac{\mu_0}{\mu}, \quad \frac{\omega_D}{\mu_0} \ll 1. \quad (51)$$

Этот эффект уменьшает предэкспоненциальный коэффициент в зависимости (47). Он существен при узкой области S - спаривания.

3. Уменьшение (при $\omega_D > \mu_0$) доли электронов, эффективно участвующих в образовании куперовских пар, вследствие того, что часть электронов из области D попадает в нижнюю зону и таким образом оказывается отделенной щелью 2Δ от прилежащих к уровню Ферми состояний в верхней зоне.

Этот фактор, играющий роль только при $\omega_D > \mu_0$, приводит также к уменьшению предэкспоненциального коэффициента (при $\omega_D \gg \mu_0$ в $\left(\frac{\mu_0}{\omega_D}\right)^{\frac{\mu - \mu_0}{\mu}} \left(\frac{2\mu_0}{\mu + \mu_0}\right)^{\frac{\mu + \mu_0}{\mu}}$ раз).

4. Эффекты, связанные с перемешиванием пар электронных состояний $(k, -k)$ и $(k+q, -k-q)$ вследствие рассеяния электронов на сконденсировавшейся моде с волновым вектором Q . При этом часть электронов из состояний, принадлежащих области электрон-электронного притяжения, а именно $(k, -k) \in D_1$, где D_1 принадлежит D :

$$D_1 = \{k: |\omega_D - \mu_0| \leq \epsilon_k \leq \omega_D + \mu_0\} \subset D, \quad (52)$$

переходит в состояния $(k+q, -k-q)$ нижней зоны, лежащие вне области притяжения :

$$D_2 = \{k+q : |\omega_D - \mu_0| \leq \epsilon_{k+q} \leq |\omega_D + \mu_0|\} =$$

$$= \{k : -|\omega_D + \mu_0| \leq \epsilon_k \leq -|\omega_D - \mu_0|\} \notin D, \quad (53)$$

и наоборот. По-видимому, в некоторых случаях роль этих процессов можно свести к уменьшению величины S - спаривания в области D_1 и появлению отличного от нуля эффективного S - спаривания в области D_2 .

Заметим, что в случае $\omega_D > \mu_0$ существует также область $D_0 \subset D$, которая расположена симметрично относительно уровня $\epsilon_k = 0$:

$$D_0 = \{k : |\epsilon_k| \leq \omega_D - \mu_0\} \subset D \quad (\omega_D > \mu_0),$$

и поэтому указанные переходы не выводят электронов из нее, оставляя без изменения величину S - спаривания: $\tilde{S}(k) = S, k \in D_0$.

Эта картина согласуется с результатом исследования точных уравнений самосогласования, если в случае $\omega_D \ll \mu_0$ принять, что

$$\tilde{S}^2(k) = \begin{cases} \left(\frac{\mu + \mu_0}{2\mu}\right)^2 S^2 & , k \in D_1, \\ \left[1 - \left(\frac{\mu + \mu_0}{2\mu}\right)^2\right] S^2 & , k \in D_2. \end{cases} \quad (\omega_D \ll \mu_0)$$

Подчеркнем, однако, что для окончательного выяснения природы физических процессов, связанных с перенормировкой S - спаривания, необходим более тщательный анализ, основанный на явном виде канонических преобразований, приводящих аппроксимирующий гамильтониан к диагональному виду.

Описанный выше фактор перемешивания изменяет показатель экспоненциальной зависимости в сторону уменьшения эффективной сверх-

проводящей щели. В случае, когда $\omega_D \gg \mu_0$, ввиду малости вклада областей D_1 и D_2 (по сравнению с D_0), этим изменением можно пренебречь. В случае же $\omega_D < \mu_0$ оно является весьма существенным, но не настолько сильным (по крайней мере при $\omega_D \ll \mu_0$), чтобы подавить эффект повышения плотности состояний (см. (21)):

$$\tilde{S} \sim \exp\left\{-\frac{W}{\left(\frac{\mu + \mu_0}{2\mu}\right)^2 \frac{\mu}{\mu_0} g^2}\right\}, \quad \left(\frac{\mu + \mu_0}{2\mu}\right)^2 \frac{\mu}{\mu_0} > 1 \quad (\omega_D \ll \mu_0).$$

Отметим, что полученные нами уравнения (18) и (19) для сверхпроводящей щели поддаются достаточно простому анализу только в предельных случаях $\omega_D \ll \mu_0$ и $\omega_D \gg \mu_0$, которые, по-видимому, не являются самыми благоприятными как с точки зрения повышения критической температуры T_S вследствие структурного фазового перехода, так и с точки зрения соответствия реальным значениям этих констант. Поэтому представляет несомненный интерес детальный численный анализ уравнений самосогласования при более общих предположениях.

Авторы весьма признательны В.А.Загребнову, Ю.В.Копаеву, А.И.Русинову и Р.Х.Тимерову за многочисленные плодотворные обсуждения, а также профессору Л.В.Келдышу и профессору Н.Н.Боголюбову (мл.) за интерес к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.Г.Бранков, Н.С.Тончев. Сообщение ОИЯИ, Р4-8907, Дубна, 1975.
2. D.C.Mattis, W.D.Langer. *Phys.Rev.Lett.*, 25, 376 (1970).
3. И.Г.Бранков, В.А.Загребнов, Н.С.Тончев. Препринт ОИЯИ, Р4-7917, Дубна, 1974.
4. А.И.Русинов, До Чан Кат, Ю.В.Копаев. *ЖЭТФ*, 65, 1984 (1973).
5. И.Г.Бранков, Н.С.Тончев. Сообщение ОИЯИ, Р4-8150, Дубна, 1974.
6. K.Levin, D.L.Mills, S.L.Cunningham. *Phys.Rev.*, 10B, 3821 (1974).
7. А.А.Абрикосов, Л.П.Горьков, И.Е.Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике, Физматгиз, 1962.
8. Ю.В.Копаев, Р.Х.Тимеров. *ЖЭТФ*, 63, 290, 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 июня 1975 г.