

8907

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



С326  
Б-874

18/VI-75

P4 - 8907

И.Г.Бранков, Н.С.Тончев

2992/2-75

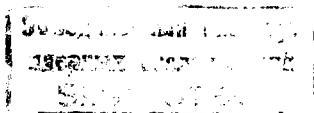
МОДЕЛЬ СВЕРХПРОВОДНИКА  
С УЧЕТОМ СТРУКТУРНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
ТИПА УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА

**1975**

Р4 - 8907

Й.Г.Бранков, Н.С.Тончев

**МОДЕЛЬ СВЕРХПРОВОДНИКА  
С УЧЕТОМ СТРУКТУРНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
ТИПА УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА**



## §I. Введение

В последние годы значительно возрос интерес к теоретическому исследованию систем, в которых возможны два типа фазовых переходов: структурный (металл-диэлектрик) и сверхпроводящий<sup>/1-7/</sup>. Этот интерес вызван, в первую очередь, тем, что у ряда высокотемпературных сверхпроводников обнаружено структурное изменение электронного спектра при температурах  $T_d$ , превышающих температуру сверхпроводящего фазового перехода  $T_s$ . Это наталкивает на мысль, что, по-видимому, повышение  $T_s$  в этих соединениях обусловлено наличием структурного фазового перехода.

Отметим, что на принципиальную возможность повышения  $T_s$  за счет электрон-дырочного спаривания было указано в работах<sup>/1,2/</sup>. Далее этот вопрос исследовался в работах<sup>/5,6,7/</sup>.

Как известно, в теории БКШ величина критической температуры  $T_s$  сильно зависит от концентрации электронов, которая входит в соответствующее выражение экспоненциально. Поэтому увеличение  $T_s$  можно понять, принимая во внимание тот факт, что при образовании диэлектрической щели плотность электронных состояний вблизи нее резко увеличивается. С другой стороны, более детальный анализ показал<sup>/5-7/</sup>, что имеется и противоположное влияние электрон-дырочного спаривания на  $T_s$  - эффективное уменьшение числа электронов, участвующих в образовании куперовских пар. Это, в свою очередь, приводит к уменьшению предэкспоненциального множителя в выражении для  $T_s$ . Отсюда следует вывод о том, что электрон-дырочное спаривание не всегда может привести к повышению  $T_s$ <sup>/6,7/</sup>.

В работе<sup>/7/</sup> в рамках модели двухзонного изотропного полуметалла было показано, что при некоторых ограничениях на константы взаимодействия и при наличии легирования возможно сосу-

существование сверхпроводящего и диэлектрического параметров порядка и повышение температуры  $T_s$ .

## §2. Модельная система

Здесь мы продолжим начатое нами в работе /8/ исследование точно решаемой модели сверхпроводника со структурной неустойчивостью типа удвоения периода.

В рассматриваемой модели однозонного металла со спектром  $\epsilon_{\vec{k}}$ , обладающим свойством  $\epsilon_{\vec{k}+\vec{Q}} = -\epsilon_{\vec{k}}$ , учтено как взаимодействие Фрелиха с выделенной модой  $\vec{Q} = \frac{\pi}{a}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , ответственной за структурный фазовый переход /1,9/, так и эффективное электрон-электронное притяжение типа БКШ /10-12/. Гамильтониан системы имеет следующий вид:

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}, \sigma} (\epsilon_{\vec{k}} - \mu) a_{\vec{k}, \sigma}^{\dagger} a_{\vec{k}, \sigma} + \hbar \omega(\vec{Q}) b_{\vec{Q}}^{\dagger} b_{\vec{Q}} + \frac{g(\vec{Q})}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}, \sigma} (a_{\vec{k}+\vec{Q}, \sigma}^{\dagger} a_{\vec{k}, \sigma} b_{\vec{Q}} + \text{с.с.}) - \frac{g_s^2}{2V} \sum_{\vec{k}, \sigma} \lambda(|\epsilon_{\vec{k}} - \mu_0|) \lambda(|\epsilon_{\vec{k}'} - \mu_0|) \text{sign}(\sigma - \sigma') a_{\vec{k}, \sigma}^{\dagger} a_{-\vec{k}', \sigma'}^{\dagger} a_{-\vec{k}', \sigma'} a_{\vec{k}, \sigma}, \quad (I)$$

где  $\mu$  - химический потенциал. В выражении (I) введены функции (см. также /11, 12/)  $\lambda(|\epsilon_{\vec{k}} - \mu_0|)$ , обрезакющие куперовское спаривание электронов в слое  $2\omega_D$  вблизи поверхности Ферми  $\epsilon_{\vec{k}} = \mu_0$ :  $\lambda(|\epsilon_{\vec{k}} - \mu_0|) = 0$ ,  $|\epsilon_{\vec{k}} - \mu_0| > \omega_D$ .

Здесь  $\mu_0$  - энергия Ферми для невзаимодействующих электронов в зоне, определяемая средним числом электронов  $\bar{n}$ , согласно равенству

$$\int_{-w}^{\mu_0} \rho(\epsilon) d\epsilon = \bar{n},$$

где  $\rho(\epsilon)$  - плотность состояний (с учетом спина), а  $w$  - ширина зоны.

Наличие обрезакющих  $\lambda$ -функций в гамильтониане (I) позволяет последовательно, на каждом этапе вычисления, учитывать тот факт, что куперовское притяжение (в отличие от электрон-дырочного спаривания) проявляется только в узком энергетическом слое порядка  $2\omega_D$  около уровня Ферми.

В работе /8/  $\lambda(|\epsilon_{\vec{k}} - \mu_0|)$  выбиралась в виде ступенчатой функции. Как известно, в теории БКШ такой выбор приводит к нефизическим разрывам спектра квазичастиц при энергиях  $\epsilon_{\vec{k}} = \mu_0 \pm \omega_D$ . Так как относительная величина скачков очень мала (порядка  $\frac{S^2}{\omega_D^2} \ll 1$ ) и они возникают вдали от поверхности Ферми, эффекты, связанные с ними, пренебрежимо малы. Но имея ввиду, что в рассматриваемой здесь модели взаимодействие электронов с выделенной модой  $\vec{Q} = \vec{Q}$  приводит к появлению диэлектрической щели при  $\epsilon_{\vec{k}} = \epsilon_{\vec{k}+\vec{Q}} = 0$ , следует отметить, что возможно искажение физических результатов, вызванное этими разрывами, если  $\mu_0 - \omega_D \approx 0$ . Поэтому, вообще говоря, необходимо считать функцию  $\lambda(|x|)$  гладкой, убывающей до нуля в окрестности точки  $|x| = \omega_D$ . Отметим, что для общего анализа системы (I) конкретный вид  $\lambda(|x|)$  не существенен, а в случаях, когда  $|\mu_0| \ll \omega_D$  или  $|\mu_0| \gg \omega_D$ , аппроксимация ступенчатой функцией является вполне удовлетворительной.

В предыдущей работе /8/ мы показали, что гамильтониан (I) термодинамически эквивалентен квадратичному по Ферми операторам гамильтониану  $\mathcal{H}_0(\Delta, S, \mu)$ :

$$|f_V[\mathcal{H}] - f_V[\mathcal{H}_0(\Delta, S, \mu)]| \leq O(N^{-1/4}) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

где

$$\mathcal{H}_0(\Delta, S, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{p, \sigma} \Psi_{p, \sigma}^+ \hat{A}_{p, \sigma} \Psi_{p, \sigma} + \frac{1}{2} V \left( \frac{\Delta^2}{g_d^2} + \frac{S^2}{g_s^2} - 2\mu \right) \quad (2)$$

$$f_V[H] \equiv -\frac{kT}{V} \ln \text{Sp} \exp \{-\beta H\}, \quad \beta = \frac{1}{kT}.$$

Здесь использованы обозначения работы /8/:

$$\Psi_{p, \sigma}^+ = (a_{p, \sigma}^+, a_{p+q, \sigma}^+, a_{-p, -\sigma}, a_{-p+q, -\sigma})$$

$$\hat{A}_{p, \sigma} = \begin{pmatrix} \epsilon_p - \mu & -\Delta & -S\lambda(p, \sigma) & 0 \\ \Delta & -\epsilon_p - \mu & 0 & -S\lambda(p+q, \sigma) \\ -S\lambda(p, \sigma) & 0 & -\epsilon_p + \mu & \Delta \\ 0 & -S\lambda(p+q, \sigma) & \Delta & \epsilon_p + \mu \end{pmatrix}$$

$$\lambda(p, \sigma) \equiv \text{sign} \sigma \cdot \lambda(|\epsilon_p - \mu|).$$

В правой части равенства (2) суммирование по квазиимпульсам  $p$  проводится по половине первоначальной зоны Бриллюэна, определяемой неравенством  $\epsilon_p > 0$  (в этом случае  $p+q$  пробегает вторую половину зоны Бриллюэна  $\epsilon_{p+q} < 0$ ).

Параметры  $\Delta$  и  $S$ , имеющие смысл, соответственно, диэлектрического и сверхпроводящего параметров порядка, определяются из следующего условия /8/:

$$f_V[\mathcal{H}_0(\Delta, S, \mu)] = \min_{(\eta_d, \eta_s)} f_V[\mathcal{H}_0(\eta_d, \eta_s, \mu)]. \quad (3)$$

### §3. Вычисление плотности свободной энергии

Для вычисления плотности свободной энергии обычно сначала находят явный вид канонических преобразований ферми-операторов, диагонализующих гамильтониан /12/. Эта процедура, однако, в нашем случае связана хотя и с простыми, но очень громоздкими выкладками. Поэтому, зная спектр матрицы  $\hat{A}_{p, \sigma}$ , мы вычислим функцию  $f_V[\mathcal{H}_0(\Delta, S, \mu)]$ , не используя явные выражения для канонических преобразований. Заметим, что  $C$ -числовая матрица  $\hat{A}_{p, \sigma}$  эрмитова и поэтому она может быть приведена к диагональному виду путем некоторого поворота в четырехмерном пространстве состояний  $\{(p, \sigma), (p+q, \sigma), (-p, -\sigma), (-p+q, -\sigma)\}$ , который определяет также некоторое линейное преобразование соответствующих ферми-операторов. Но поскольку  $\Psi_{p, \sigma}$  ( $\Psi_{p, \sigma}^+$ ) представляет собой столбец (строку), построенный из операторов  $a_{p, \sigma}^+, a_{p+q, \sigma}^+, a_{-p, -\sigma}, a_{-p+q, -\sigma}$ , то среди членов суммы по  $(p, \sigma)$  в выражении (2) есть такие, которые содержат одинаковый набор операторов, например,  $\Psi_{p, \sigma}^+ \hat{A}_{p, \sigma} \Psi_{p, \sigma}$  и  $\Psi_{-p, -\sigma}^+ \hat{A}_{-p, -\sigma} \Psi_{-p, -\sigma}$ , т.е. они не могут быть диагонализированы независимо друг от друга. Чтобы избежать эту трудность, приведем (с помощью несложных преобразований) гамильтониан (2) к виду:

$$\mathcal{H}_0(\Delta, S, \mu) = \sum_p \Psi_{p, \uparrow}^+ \hat{A}_{p, \uparrow} \Psi_{p, \uparrow} + \frac{1}{2} V \left( \frac{\Delta^2}{g_d^2} + \frac{S^2}{g_s^2} - 2\mu \right). \quad (4)$$

Теперь в каждом члене суммы\* (4) можно совершать независимые канонические преобразования ферми-операторов, которые при

\* Число состояний в первоначальной зоне Бриллюэна равно  $\sum_{k, \sigma} 2N$ . Теперь в этой сумме число членов в четыре раза меньше:  $\sum_p N/2$ , но каждое слагаемое действует в подпространстве чисел заполнения четырех одноэлектронных состояний:  $\{(p, \uparrow), (p+q, \uparrow), (-p, \downarrow), (-p+q, \downarrow)\}$

водят матрицу  $\hat{A}_{p,t}$ , а следовательно и гамильтониан (4), к диагональному виду.

Действительно, пусть эрмитова матрица  $\hat{A}_{p,t}$  унитарно эквивалентна диагональной матрице  $\hat{E}_p = \{E_p^{(1)}, E_p^{(2)}, E_p^{(3)}, E_p^{(4)}\}$ , где  $E_p^{(i)}$  ( $i=1, \dots, 4$ ) – собственные значения матрицы  $\hat{A}_{p,t}$ .

Тогда:

$$\hat{A}_{p,t} = \hat{U}_p^{-1} \hat{E}_p \hat{U}_p, \quad \hat{U}_p^+ = \hat{U}_p^{-1}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{H}_{p,t} = \Psi_{p,t}^+ \hat{A}_{p,t} \Psi_{p,t} = \Psi_{p,t}^+ \hat{U}_p^{-1} \hat{E}_p \hat{U}_p \Psi_{p,t}.$$

Покажем, что преобразование

$$\tilde{\Psi}_{p,t}^+ = \Psi_{p,t}^+ \hat{U}_p^{-1},$$

где

$$\tilde{\Psi}_{p,t}^+ = (\tilde{\alpha}_p^{(1)}, \tilde{\alpha}_p^{(2)}, \tilde{\alpha}_p^{(3)}, \tilde{\alpha}_p^{(4)}),$$

является каноническим преобразованием операторов  $\alpha_{p,t}^+$ ,

$\alpha_{p+q,t}^+$ ,  $\alpha_{-p,t}$ ,  $\alpha_{-p+q,t}$  к новым ферми-операторам квазичастиц  $\alpha_p^{(1)}$ ,  $\alpha_p^{(2)}$ ,  $\alpha_p^{(3)}$ ,  $\alpha_p^{(4)}$ . Действительно:

$$[\tilde{\Psi}_{p,t}^{(i)}, \tilde{\Psi}_{p,t}^{(j)}]_+ = \sum_{k,l} (\hat{U}_p)_{i,k} (\hat{U}_p^{-1})_{l,j} [\Psi_{p,t}^{(k)}, \Psi_{p,t}^{(l)}]_+ = \delta_{i,j}$$

$$[\tilde{\Psi}_{p,t}^{(i)}, \tilde{\Psi}_{p,t}^{(j)}]_+ = \sum_{k,l} (\hat{U}_p)_{i,k} (\hat{U}_p)_{j,l} [\Psi_{p,t}^{(k)}, \Psi_{p,t}^{(l)}]_+ = 0.$$

Здесь через  $\Psi_{p,t}^{(i)}$  ( $\tilde{\Psi}_{p,t}^{(i)}$ ) обозначен  $i$ -ый элемент столбца (строки)  $\Psi_{p,t}$  ( $\Psi_{p,t}^+$ ).

Аналогично можно проверить, что если  $\alpha_p^{(i)}$  ( $i=1, \dots, 4$ ) – ферми-операторы, то обратное преобразование  $\Psi_{p,t}^+ = \tilde{\Psi}_{p,t}^+ \hat{U}_p$  является каноническим.

Теперь, используя свойство инвариантности следа по отношению к каноническим преобразованиям операторов, получим, что:

$$\begin{aligned} \text{Sp} \exp \left\{ -\beta \sum_p \mathcal{H}_{p,t} \right\} &= \prod_p \text{Sp}_{(p)} \exp \left\{ -\beta \mathcal{H}_{p,t} \right\} = \\ &= \prod_p \text{Sp}_{(\beta)} \exp \left\{ -\beta \sum_{i=1}^4 E_p^{(i)} \alpha_p^{(i)\dagger} \alpha_p^{(i)} \right\} = \prod_p \prod_{i=1}^4 [1 + \exp(-\beta E_p^{(i)})], \end{aligned} \quad (5)$$

где через  $\text{Sp}_{(p)}$  обозначен след оператора, действующего в подпространстве одноэлектронных состояний  $\{(p,t), (p+q,t), (-p,t), (-p+q,t)\}$ , а  $\text{Sp}_{(\beta)}$  – след в соответствующем подпространстве квазичастичных состояний.

Таким образом, для плотности свободной энергии аппроксимирующей системы (2) находим выражение:

$$f_V[\mathcal{H}_0(\Delta, S, \mu)] = -\frac{kT}{V} \sum_p \sum_{i=1}^4 \ln[1 + e^{-\beta E_p^{(i)}}] + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta^2}{g_d^2} + \frac{S^2}{g_s^2} - 2\mu \right). \quad (6)$$

Здесь  $E_p^{(i)}$  ( $i=1, \dots, 4$ ) – собственные значения матрицы  $\hat{A}_{p,t}$ :

$$E_p^{(4,2)} = \left\{ \epsilon_p^2 + \mu^2 + \Delta^2 + S^2 [\lambda_+^2(\epsilon_p, \mu_0) + \lambda_-^2(\epsilon_p, \mu_0)] \pm \right. \\ \left. \pm 2\sqrt{[\mu\epsilon_p - S^2\lambda_+(\epsilon_p, \mu_0)\lambda_-(\epsilon_p, \mu_0)]^2 + \Delta^2[\mu^2 + S^2\lambda_-^2(\epsilon_p, \mu_0)]} \right\}^{1/2} \quad (7)$$

$$E_p^{(3,4)} = -E_p^{(4,2)};$$

где введено обозначение

$$\lambda_{\pm}(\epsilon_p, \mu_0) = \frac{1}{2} [\lambda(|\epsilon_p - \mu_0|) \pm \lambda(|\epsilon_p + \mu_0|)]. \quad (8)$$

§4. Уравнения самосогласования

Диэлектрический и сверхпроводящий параметры порядка  $\Delta$  и  $S$  определяются согласно условиям (3), из уравнений\*

$$\frac{\partial}{\partial \Delta} f_v[\mathcal{H}_0(\Delta, S, \mu)] = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} f_v[\mathcal{H}_0(\Delta, S, \mu)] = 0, \quad (10)$$

которые совместно с уравнением для химического потенциала

$$-\frac{\partial}{\partial \mu} f_v[\mathcal{H}_0(\Delta, S, \mu)] = \bar{n} \quad (11)$$

образуют замкнутую систему уравнений.

Вычислив соответствующие производные и перейдя от суммирования по квазиимпульсам к интегрированию по спектру ( $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \rightarrow \int_0^{\omega} \rho(\epsilon) d\epsilon$ ), находим явный вид уравнений самосогласования:

$$\frac{\Delta}{2} \int_0^{\omega} \rho(\epsilon) d\epsilon \left\{ \frac{\chi_1(\epsilon)}{E^{(1)}(\epsilon)} \text{th} \frac{E^{(1)}(\epsilon)}{2kT} + \frac{\chi_2(\epsilon)}{E^{(2)}(\epsilon)} \text{th} \frac{E^{(2)}(\epsilon)}{2kT} \right\} = \frac{\Delta}{g_1^2} \quad (12)$$

$$\frac{S}{2} \int_0^{\omega} \rho(\epsilon) d\epsilon \left\{ \frac{\nu_1(\epsilon)}{E^{(1)}(\epsilon)} \text{th} \frac{E^{(1)}(\epsilon)}{2kT} + \frac{\nu_2(\epsilon)}{E^{(2)}(\epsilon)} \text{th} \frac{E^{(2)}(\epsilon)}{2kT} \right\} = \frac{S}{g_2^2} \quad (13)$$

$$\frac{\mu}{2} \int_0^{\omega} \rho(\epsilon) d\epsilon \left\{ \frac{\tau_1(\epsilon)}{E^{(1)}(\epsilon)} \text{th} \frac{E^{(1)}(\epsilon)}{2kT} + \frac{\tau_2(\epsilon)}{E^{(2)}(\epsilon)} \text{th} \frac{E^{(2)}(\epsilon)}{2kT} \right\} = \bar{n} - 1, \quad (14)$$

где

$$\chi_{1,2}(\epsilon) = 1 \pm \frac{\mu^2 + S^2 \lambda_{\pm}^2(\epsilon, \mu_0)}{4[(E^{(1)})^2 - (E^{(2)})^2]} \quad (15)$$

\* Там, где это не вызывает недоразумения, мы будем вместо вариационных параметров  $\eta_{\Delta}$  и  $\eta_S$  (см.(3)) писать  $\Delta$  и  $S$ .

$$\nu_{1,2}(\epsilon) = \lambda_{\pm}^2(\epsilon, \mu_0) + \lambda_{\pm}^2(\epsilon, \mu_0) \pm \frac{[2S^2 \lambda_{\pm}^2(\epsilon, \mu_0) + \Delta^2] \lambda_{\pm}^2(\epsilon, \mu_0) - 2\mu \lambda_{\pm}(\epsilon, \mu_0) \lambda_{\pm}(\epsilon, \mu_0) \cdot \epsilon}{4[(E^{(1)}(\epsilon))^2 - (E^{(2)}(\epsilon))^2]} \quad (16)$$

$$\tau_{1,2}(\epsilon) = 1 \pm \frac{\mu(\epsilon^2 + \Delta^2) - S^2 \lambda_{\pm}(\epsilon, \mu_0) \lambda_{\pm}(\epsilon, \mu_0) \cdot \epsilon}{4[(E^{(1)}(\epsilon))^2 - (E^{(2)}(\epsilon))^2]} \quad (17)$$

Очевидно, анализ системы уравнений (12–14) в общем виде представляет собой весьма сложную задачу. Поэтому мы сделаем некоторые естественные для рассматриваемой задачи упрощения, например, рассмотрение проведем в приближении постоянной плотности состояний  $\rho(\epsilon) = \frac{1}{\omega}$  и выберем функцию  $\lambda(|x|)$  в виде

$$\lambda(|x|) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \omega_D \\ 0, & |x| > \omega_D \end{cases} \quad (18)$$

Кроме того, в некоторых случаях мы будем вынуждены использовать вместо точного спектра (7) некоторую аппроксимацию, упрощающую дальнейшее исследование. Последняя будет необходима также и для выяснения физической картины перенормировки термодинамических щелей в спектре системы, вызванной взаимным влиянием куперовского и электрон-дырочного спариваний. В связи с этим перейдем теперь к исследованию спектра (7).

§5. Спектр элементарных возбуждений

Напомним, что ранее мы определили четыре типа независимых квазичастиц  $\alpha_p^{(i)}$  ( $i=1, \dots, 4$ ) с законами дисперсии  $E_p^{(i)}$  ( $i=1, \dots, 4$ ), соответственно, представляющие собой смесь одноэлектронных состояний  $(p, \uparrow), (p+q, \uparrow), (-p, \downarrow), (-p+q, \downarrow)$ . Спектр возбуждений

с учетом (18) дается следующим выражением<sup>\*</sup>:

$$E^{(1,2)}(\epsilon) = \begin{cases} [(\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} \pm \mu)^2 + S^2 \theta(\omega_D - \mu_0)]^{1/2}, & |\epsilon| \leq \alpha \\ [\epsilon^2 + \Delta^2 + \mu^2 + \frac{1}{2} S^2 \pm 2\sqrt{(\mu|\epsilon| - \frac{1}{4} S^2)^2 + \Delta^2(\mu^2 + \frac{1}{4} S^2)}]^{1/2}, & \alpha < |\epsilon| \leq \beta \\ |\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} \pm \mu|, & \beta < |\epsilon| \leq \omega \end{cases}$$

$$E^{(3,4)}(\epsilon) = -E^{(1,2)}(\epsilon)$$

(19)

$$\alpha = |\mu_0 - \omega_D|, \quad \beta = \mu_0 + \omega_D,$$

где мы учли, что

$$\lambda_{\pm}(\epsilon, \mu_0) = \begin{cases} 0 & , |\epsilon| \leq \alpha \\ \frac{1}{2} \text{sign} \epsilon & , \alpha < |\epsilon| \leq \beta \\ 0 & , \beta < |\epsilon| \leq \omega \end{cases}$$

$$\lambda_{\pm}(\epsilon, \mu_0) = \begin{cases} \theta(\omega_D - \mu_0), & |\epsilon| \leq \alpha \\ \frac{1}{2} & , \alpha < |\epsilon| \leq \beta \\ 0 & , \beta < |\epsilon| \leq \omega, \end{cases} \quad (20)$$

и ввели ступенчатую функцию:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Рассмотрим сначала предельные случаи  $\Delta \rightarrow 0$ ,  $S \neq 0$  и  $\Delta \neq 0$ ,  $S \rightarrow 0$ .

А. При  $\Delta \rightarrow 0$  выражение (19) удобно записать с помощью функции  $E^S(\epsilon)$ :

$$E^S(\epsilon) = \text{sign}(\epsilon - \mu) \sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + S^2 \lambda^2 (|\epsilon - \mu_0|)}, \quad -\omega \leq \epsilon \leq \omega, \quad (21)$$

соответствующей спектру возбуждения в чистом сверхпроводнике.

Тогда, если  $S^2/4\mu < |\mu_0 - \omega_D|$ , то

$$E_s^{(1)}(\epsilon) = |E^S(-\epsilon)|$$

$$E_s^{(2)}(\epsilon) = |E^S(\epsilon)|$$

$$\left. \vphantom{\begin{matrix} E_s^{(1)}(\epsilon) \\ E_s^{(2)}(\epsilon) \end{matrix}} \right\} 0 \leq \epsilon \leq \omega$$

и если  $S^2/4\mu > |\mu_0 - \omega_D|$ , то

$$E_s^{(1)}(\epsilon) = \begin{cases} |E^S(-\epsilon)| \\ |E^S(\epsilon)| \\ |E^S(-\epsilon)| \end{cases}, \quad E_s^{(2)}(\epsilon) = \begin{cases} |E^S(\epsilon)|, & 0 \leq \epsilon < \alpha \\ |E^S(-\epsilon)|, & \alpha < \epsilon \leq \min(\frac{S^2}{4\mu}, \beta) \\ |E^S(\epsilon)|, & \min(\frac{S^2}{4\mu}, \beta) < \epsilon \leq \omega. \end{cases}$$

Поведение функций  $E_s^{(i)}(\epsilon)$  ( $i=1, \dots, 4$ ) и  $E^S(\epsilon)$  показано на рис. (I, II).

Как нетрудно заметить, в этом случае ( $\Delta=0$ ) физически более естественным является описание возбуждений системы посредством одного типа квазичастиц, которые вводятся с помощью известных  $(u, v)$ -преобразований Боголюбова. Параметр  $2S$  играет роль сверхпроводящей щели в спектре возбуждений, возникающей при энергиях, равных энергии ферми  $\epsilon = \mu$ . При  $\Delta=0$  можно показать, что из уравнения для химического потенциала следует равенство  $\mu = \mu_0$ .

Б. В другом предельном случае  $S \rightarrow 0$  имеем

$$E_{\Delta}^{(1,2)}(\epsilon) = |\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} \pm \mu|$$

<sup>\*</sup> Для определенности мы будем рассматривать случай более чем наполовину заполненной зоны, т.е. будем считать, что  $\mu_0 > 0$  и  $\mu > 0$ .



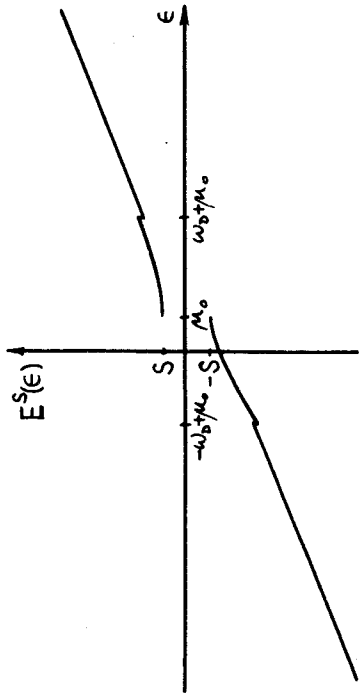


Рис. I. Спектр квазичастиц при  $\Delta=0$ ,  $S \neq 0$  и  $\omega_D > 2\mu_0$ .

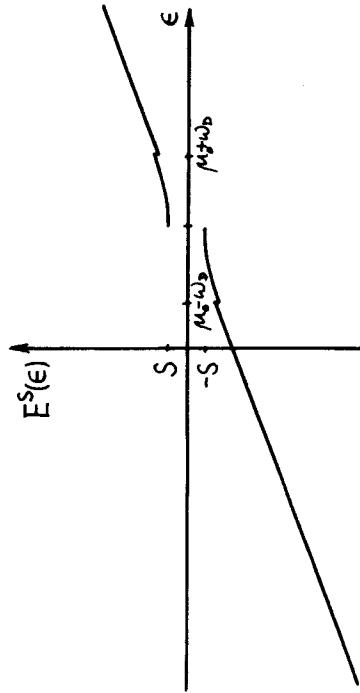
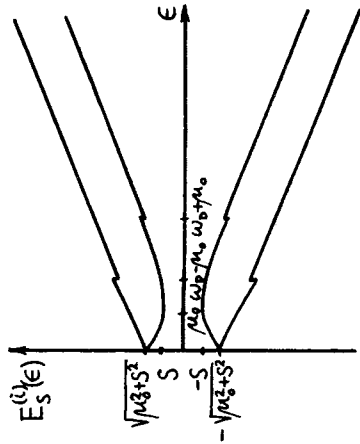
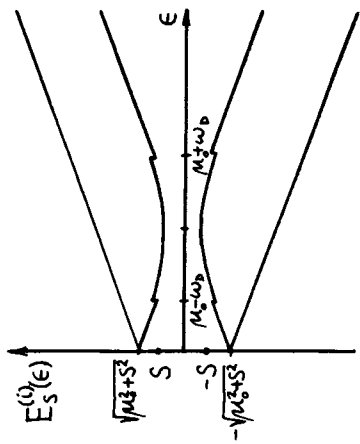


Рис. II. Спектр квазичастиц при  $\Delta=0$ ,  $S \neq 0$  и  $\omega_D < 2\mu_0$ .



или

$$\left. \begin{aligned} E_{\Delta}^{(1)}(\epsilon) &= |E^{\Delta}(-\epsilon)| \\ E_{\Delta}^{(2)}(\epsilon) &= |E^{\Delta}(\epsilon)| \end{aligned} \right\} 0 \leq \epsilon \leq w,$$

где  $E^{\Delta}(\epsilon) = \text{sign} \epsilon \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} - \mu$ ,  $|\epsilon| \leq w$  (22)

и  $\mu = \sqrt{\mu_0^2 + \Delta^2}$ .

Функции  $E_{\Delta}^{(i)}(\epsilon)$  ( $i=1, \dots, 4$ ) и  $E^{\Delta}(\epsilon)$  изображены на рис. (III).

В этом случае также легко найти канонические преобразования, вводящие один тип квазичастиц /I/.

В. Перейдем теперь к исследованию общего случая  $\Delta \neq 0$ ,  $S \neq 0$ . Не представляет труда показать, что в области  $|\omega_D - \mu_0| \leq \epsilon \leq \omega_D + \mu_0$  имеют место неравенства:

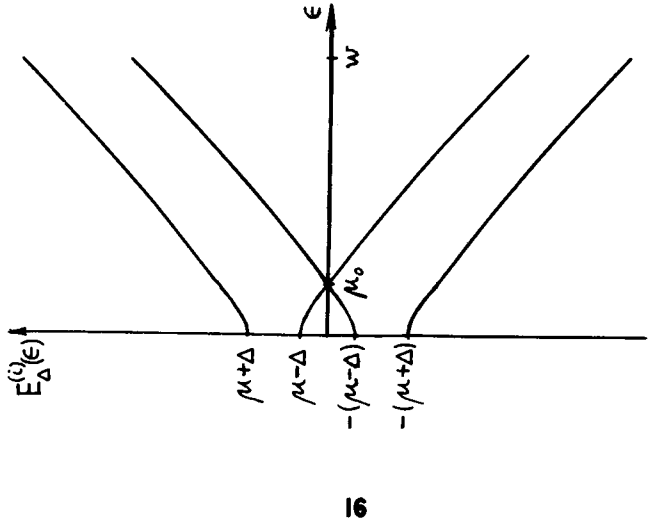
$$|\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} \pm \mu| \leq E^{(i,2)}(\epsilon) \leq \sqrt{(\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} \pm \mu)^2 + S^2}. \quad (23)$$

Качественное поведение спектра (I9) представлено на рис. (IV-V), где по аналогии с выше рассмотренными предельными случаями построен единый спектр возбуждений  $E^{\Delta, S}(\epsilon)$  в расширенной (первоначальной) зоне Бриллюэна:  $\epsilon \in [-w, w]$ .

Отметим, что одновременный учет  $\Delta$  и  $S$  спариваний приводит к существенно различной перенормировке диэлектрической и сверхпроводящей щелей в спектре системы в случаях  $\omega_D - \mu_0 > \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}$  и  $\omega_D - \mu_0 < \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}$  (см. рис. IV, V).

Так, например, если  $\omega_D - \mu_0 > \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}$ , то роль диэлектрической щели играет величина (см. рис. IV)

$$2\tilde{\Delta} = \sqrt{(\mu + \Delta)^2 + S^2} - \sqrt{(\mu - \Delta)^2 + S^2}$$



16

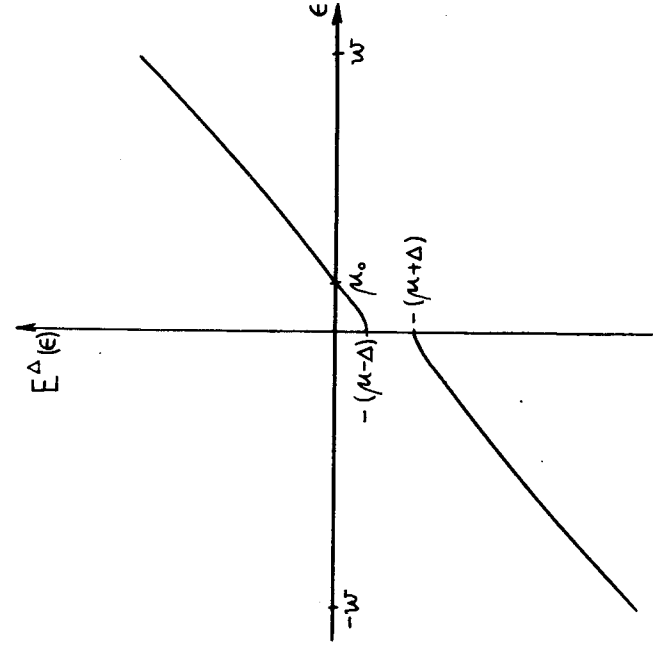


Рис. III. Спектр квазичастиц при  $\Delta \neq 0, S = 0$ .

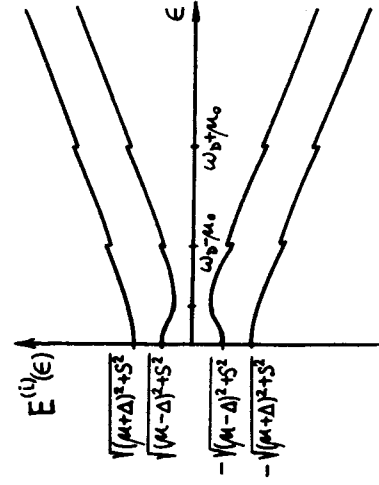


Рис. IV. Спектр квазичастиц при  $\Delta \neq 0$  и  $S \neq 0$ . Случай  $\omega_D > \mu_0 + \sqrt{(\mu - \Delta)^2 + S^2}$ .

17

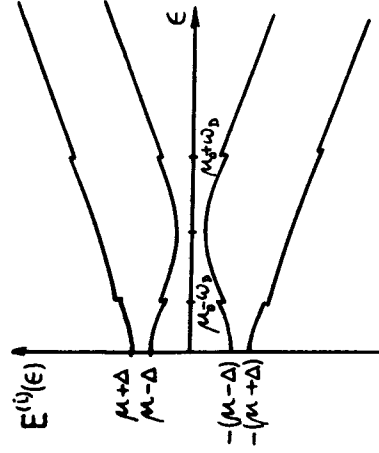
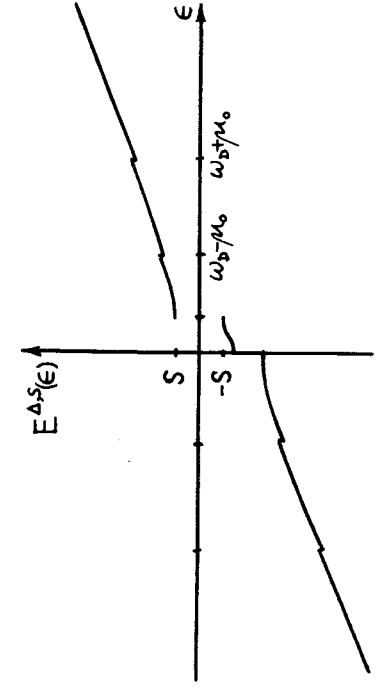
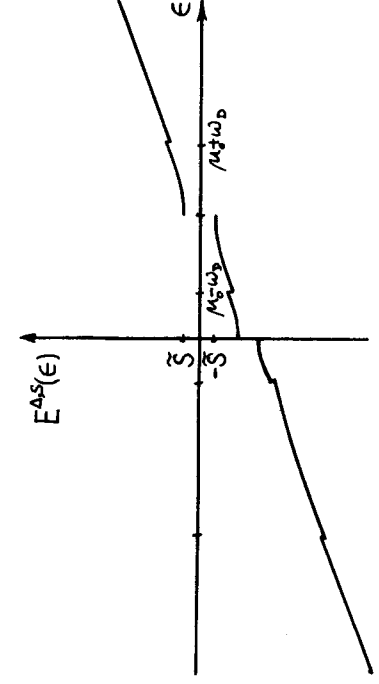


Рис. V. Спектр квазичастиц при  $\Delta \neq 0$  и  $S \neq 0$ . Случай  $\omega_D < \mu_0$ .



или

$$2\tilde{\Delta} \approx 2\Delta \left(1 - \frac{1}{2} \frac{S^2}{\mu^2 - \Delta^2}\right), \quad \frac{S^2}{(\mu \pm \Delta)^2} \ll 1$$

при

$$\frac{S^2}{\mu^2 - \Delta^2} \ll 1. \quad (24)$$

Сверхпроводящая щель при этом, как и в чистом сверхпроводнике (см. рис. I), равна удвоенному параметру порядка  $S$ .

В случае слабой связи /7/

$$\frac{S\Delta}{4\mu_0^2} \ll 1, \quad \mu_0 = \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}, \quad (24 \text{ а})$$

который будет рассматриваться в этой работе, влиянием  $S$  - спаривания на диэлектрическую щель  $2\tilde{\Delta}$  можно пренебречь, считая  $\tilde{\Delta} \approx \Delta$ .

При  $\omega_D - \mu_0 < \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}$  диэлектрический параметр порядка  $\Delta$  приводит к эффективному уменьшению сверхпроводящей щели (см. рис. У и неравенство (23)), причем диэлектрическая щель, как и в отсутствии  $S$  - спаривания, равна  $2\Delta$ .

При условии (24) для эффективной сверхпроводящей щели получаем (см. Приложение) выражение

$$2\tilde{S} = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}}{\mu} S < 2S. \quad (25)$$

Заметим, что в области  $B_0 = \{\vec{k} : |\epsilon_{\vec{k}}| \leq |\omega_D - \mu_0|\}$  можно перейти от квазичастиц  $\alpha_p^{(i)}$  ( $i=1, \dots, 4$ ) к новым квазичастицам  $\alpha_{k,\sigma}$ :

$$\sum_{\epsilon_p > 0} \sum_{i=1}^4 E_p^{(i)+} \alpha_p^{(i)} \alpha_p^{(i)} = \sum_{\vec{k} \in B_0} \sum_{\sigma} E(\vec{k}) \alpha_{k,\sigma}^+ \alpha_{k,\sigma} \quad (26)$$

со спектром:

$$E(\vec{k}) = \text{sign}(\text{sign} \epsilon_{\vec{k}} \sqrt{\epsilon_{\vec{k}}^2 + \Delta^2} - \mu) \sqrt{(\text{sign} \epsilon_{\vec{k}} \sqrt{\epsilon_{\vec{k}}^2 + \Delta^2} - \mu)^2 + S^2 \theta(\omega_D - \mu_0)} \quad (27)$$

Аналогично, в области  $B_2 = \{\vec{k} : \omega_D + \mu_0 < |\epsilon_{\vec{k}}| \leq \omega\}$  имеем

$$\sum_{\epsilon_p > 0} \sum_{i=1}^4 E_p^{(i)+} \alpha_p^{(i)} \alpha_p^{(i)} = \sum_{\vec{k} \in B_2} \sum_{\sigma} E^A(\vec{k}) \alpha_{k,\sigma}^+ \alpha_{k,\sigma}, \quad (28)$$

где (ср. (22))

$$E^A(\vec{k}) = E(\vec{k} \in B_2) = \text{sign} \epsilon_{\vec{k}} \sqrt{\epsilon_{\vec{k}}^2 + \Delta^2} - \mu. \quad (29)$$

Каноническое преобразование, которое вводит квазичастицы

$\alpha_{k,\sigma}$  в областях  $B_0$  и  $B_2$  может быть представлено в виде произведения двух  $(u, v)$ -преобразований:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{k,\sigma} \\ \alpha_{k+q,\sigma} \\ \alpha_{-k,-\sigma}^+ \\ \alpha_{-k+q,-\sigma}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k & -v_k & 0 & 0 \\ v_k & u_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_k & -v_k \\ 0 & 0 & v_k & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k & 0 & -V_{k,\sigma} & 0 \\ 0 & U_{k+q} & 0 & -V_{k+q,\sigma} \\ V_{k,\sigma} & 0 & U_k & 0 \\ 0 & V_{k+q,\sigma} & 0 & U_{k+q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k,\sigma} \\ \alpha_{k+q,\sigma} \\ \alpha_{-k,-\sigma}^+ \\ \alpha_{-k+q,-\sigma}^+ \end{pmatrix}, \quad (30)$$

где  $\vec{k} \in B_0$  или  $\vec{k} \in B_2$  и

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{|\epsilon_k|}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}}}, \quad v_k = -\text{sign} \epsilon_k \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{|\epsilon_k|}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}}}$$

$$U_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{|\text{sign} \epsilon_k \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2} - \mu|}{|\epsilon(\vec{k})|}}$$

$$V_{k,\sigma} = -\text{sign} \sigma \cdot \text{sign} E(\vec{k}) \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{|\text{sign} \epsilon_k \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2} - \mu|}{|\epsilon(\vec{k})|}}$$

Существенно отличной оказывается ситуация в области  $B_1 = \{ \vec{k} : |\omega_D - \mu_0| < |\epsilon_k| \leq \omega_D + \mu_0 \}$ . Здесь спектр имеет гораздо более сложный вид (см. (19) и рис. IУи У), а каноническое преобразование, диагонализующее соответствующую часть гамильтониана (2), вследствие "когерентности" сверхпроводящего и диэлектрического спариваний нельзя представить в виде произведения двух последовательных  $(u, v)$  - преобразований. Тем не менее, в случае слабого  $S$  - спаривания (см. Приложение) спектр элементарных возбуждений в этой области удастся интерпретировать терминах появления эффективного (зависящего от квазиимпульса и параметра  $\Delta$ ) сверхпроводящего параметра порядка  $\tilde{S}(k, \Delta)$  :

$$E(k) \simeq \text{sign}(\text{sign} \epsilon_k \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2} - \mu) \sqrt{(\text{sign} \epsilon_k \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2} - \mu)^2 + \tilde{S}^2(k, \Delta)} \quad (31)$$

$\vec{k} \in B_1$  ,

где

$$S^2(k, \Delta) = \frac{1}{2} S^2 \left[ 1 + \text{sign} \epsilon_k \frac{2\mu |\epsilon_k| - \Delta^2}{2\sqrt{\mu^2(\epsilon_k^2 + \Delta^2)}} \right] , \quad \vec{k} \in B_1 .$$

Очевидно, что если  $\mu_0 = \mu = 0$  /8/ или если  $\mu_0 \neq 0$ , но обрезание куперовского взаимодействия производится симметрично по отношению к центру зоны  $\epsilon_k = 0$  /5,7/ (а не по отношению к поверхности Ферми, как в настоящей работе), то указанных трудностей, связанных с диагонализацией гамильтониана и с интерпретацией перенормировок физических параметров в спектре квазичастиц, не возникает.

Напомним, что использованная нами обрезающая функция (18) привела к появлению разрывов в спектре элементарных возбуждений. С помощью неравенства (23) легко получить оценку сверху для величины скачков в точках  $\epsilon_k = |\omega_D \pm \mu_0|$ :

$$\left| \frac{E^{(1,2)}(|\omega_D \pm \mu_0| + 0) - E^{(1,2)}(|\omega_D \pm \mu_0| - 0)}{E^{(1,2)}(|\omega_D \pm \mu_0| - 0)} \right| \leq \frac{S^2}{2\sqrt{(|\omega_D \pm \mu_0|^2 + \Delta^2) - \mu^2}} \ll 1 . \quad (32)$$

Вообще говоря, следует предполагать, что неравенства (32) выполнены, и тогда пренебрежение величинами порядка скачков обеспечит независимость полученных результатов от детального вида обрезающей функции.

### §6. Обсуждение

В настоящей работе мы нашли спектр квазичастичных возбуждений аппроксимирующей системы (2). Анализ этого спектра позволил выявить наличие некоторого эффекта "когерентности" куперовского и электрон-дырочного спариваний в области  $|\omega_D - \mu_0| < |\epsilon_k| \leq \omega_D + \mu_0$ , который проявляется во взаимной "перенормировке" сверхпроводящего:  $S_{k,\sigma} = g_s^2 \langle a_{k,\sigma} a_{-k,-\sigma} \rangle_{\mathcal{H}(\Delta, S, \mu)}$  и диэлектрического:  $\Delta_{k,\sigma} = g_d^2 \langle a_{k,\sigma}^+ a_{k,\sigma} \rangle_{\mathcal{H}(\Delta, S, \mu)}$  аномальных средних. При слабом  $S$  - спаривании (см. Приложение) этот эффект можно учесть введением эффективного сверхпроводящего параметра  $\tilde{S}(k, \Delta)$  .

Исследованием уравнений самосогласования (I2), (I3) и (I4) мы займемся в следующей работе.

В заключение отметим, что гамильтониан (I) имеет модельный характер, обусловленный аддитивным включением в нем двух типов взаимодействий: взаимодействие с выделенной модой  $\vec{Q} = \frac{\pi}{\alpha} (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , ответственное за структурный фазовый переход, и электрон-электронное притяжение Бардина-Купера-Шриффера (БКШ), ответственное за сверхпроводящий переход.

Как известно, взаимодействие БКШ получается из гамильтониана Фрелиха путем обычной процедуры исключения фоновых переменных<sup>/13,14/</sup> и редуцирования возникающего эффективного электрон-электронного притяжения вблизи поверхности Ферми. При такой процедуре, однако, не предполагается наличие "конденсирующейся" моды, которая приводит к перестройке как фононного, так и электронного спектра и, в частности, к сдвигу уровня Ферми. Учет этих эффектов может привести к появлению явной зависимости "константы" взаимодействия БКШ от диэлектрического параметра порядка (см.<sup>/1/</sup>). Поэтому вопрос о применимости гамильтониана (I) для описания конкретных физических систем требует дальнейшего исследования.

Тем не менее, "аддитивные" модели вида (I) отражают существенные черты систем, претерпевающих два типа фазовых переходов и широко используются при изучении вопроса о сосуществовании и взаимном влиянии сверхпроводящей и диэлектрической фаз<sup>/5-7,15/</sup>.

Авторы весьма благодарны проф. Л.В.Келдышу и проф. Н.Н.Боголюбову (мл.) за интерес к работе и ценные замечания, а также В.А.Загребнову, Ю.В.Копяеву, А.И.Русинову, Р.Х.Тимерову и А.С.Шумовскому за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычислим сначала величину эффективной щели  $2\tilde{S}$  в предположении, что выполнено неравенство (24). Из условия для экстремумов функции

$$E^{(2)}(\epsilon) = \left[ \epsilon^2 + \Delta^2 + \mu^2 + \frac{1}{2}S^2 - 2\sqrt{(\mu|\epsilon| - \frac{1}{4}S^2)^2 + \Delta^2(\mu^2 + \frac{1}{4}S^2)} \right]^{1/2}$$

в первом порядке по  $\frac{S^2}{\mu^2 - \Delta^2}$  находим:

$$\min_{\epsilon \geq 0} E^{(2)}(\epsilon) = E^{(2)}(\epsilon) \Big|_{\epsilon = \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}(1 - \delta)} \approx \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}}{2\mu} S, \quad (\text{П.1})$$

где

$$\delta \approx \frac{1}{4} \frac{S^2}{\mu^2 - \Delta^2} \frac{\Delta^2}{\mu\sqrt{\mu^2 - \Delta^2}} \left( 1 + \frac{\sqrt{\mu^2 - \Delta^2}}{2\mu} \right) \ll 1, \quad (\text{П.2})$$

и, кроме того,

$$\max_{\epsilon \geq 0} E^{(2)}(\epsilon) = E^{(2)}(\epsilon) \Big|_{\epsilon = \frac{S^2}{4\mu}(1 + \tau)} \approx \mu - \Delta + \frac{1}{4} \frac{S^2}{(\mu - \Delta)^2} \left( 1 - \frac{\Delta}{2\mu} \right),$$

где

$$\tau \approx \frac{\Delta}{\mu - \Delta}. \quad (\text{П.3})$$

Поэтому, в случае, когда имеет место условие (П.2) и

$$\mu_0 - \omega_D \gg \frac{S^2}{4\mu}(1 + \tau), \quad (\text{П.4})$$

спектр элементарных возбуждений в области

$$\mu_0 - \omega_D < \epsilon \leq \mu_0 + \omega_D$$

с хорошей точностью аппроксимируется функцией

$$\tilde{E}^{(2)}(\epsilon) = \sqrt{(\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} - \mu)^2 + \tilde{S}^2}$$

где введена эффективная сверхпроводящая щель:

$$2\tilde{S} = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}}{\mu} S < 2S. \quad (\text{П.5})$$

Рассмотрим теперь более общий случай. Перепишем выражение для спектра элементарных возбуждений (I9) в области

$|\mu_0 - \omega_D| < |\epsilon_p| \leq \mu_0 + \omega_D, \epsilon_p > 0$  в следующем виде:

$$E^{(4,2)}(\epsilon_p) = \left\{ \epsilon_p^2 + \Delta^2 + \mu^2 + \frac{1}{2} S^2 \pm 2 \sqrt{\mu^2 (\epsilon_p^2 + \Delta^2) - \frac{1}{4} S^2 [2\mu |\epsilon_p| - \Delta^2 - \frac{1}{4} S^2]} \right\}^{1/2}$$

Считая, что

$$\frac{1}{4} S^2 \ll \mu \sqrt{\epsilon_p^2 + \Delta^2}, \quad |\epsilon_p| > |\mu_0 - \omega_D|$$

или

$$S^2 / 4\mu \sqrt{(\mu_0 - \omega_D)^2 + \Delta^2} \ll 1, \quad (\text{П.6})$$

в первом порядке по малому параметру (П.6) находим:

$$E^{(4,2)}(\epsilon_p) \approx \left\{ (\sqrt{\epsilon_p^2 + \Delta^2} \pm \mu)^2 + \frac{1}{2} S^2 \left[ 1 \mp \frac{2\mu |\epsilon_p| - \Delta^2}{2\mu \sqrt{\epsilon_p^2 + \Delta^2}} \right] \right\}^{1/2}. \quad (\text{П.7})$$

Спектр (П.7), в соответствии с (27) и (29) (см. также рис. IV, V), можно переопределить в области  $|\mu_0 - \omega_D| < |\epsilon_k| \leq \mu_0 + \omega_D$  (где  $\epsilon_k$  принимает как отрицательные, так и положительные значения), полагая

$$|E(k)| = \sqrt{(\text{sign} \epsilon_k \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2} - \mu)^2 + \tilde{S}^2(k, \Delta)}, \quad (\text{П.8})$$

причем

$$\tilde{S}^2(k, \Delta) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \text{sign} \epsilon_k \frac{2\mu |\epsilon_k| - \Delta^2}{2\mu \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} \right] S^2. \quad (\text{П.9})$$

Далее, определяя (П.8), (П.9) для  $|\epsilon_k| \leq |\mu_0 - \omega_D|$  и  $\mu_0 + \omega_D < |\epsilon_k| \leq \omega$  с помощью (27) и (29), имеем для всех  $|\epsilon_k| \leq \omega$ :

$$\tilde{S}^2(k, \Delta) = \begin{cases} S^2 \theta(\omega_D - \mu_0), & |\epsilon_k| \leq |\mu_0 - \omega_D| \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \text{sign} \epsilon_k \frac{2\mu |\epsilon_k| - \Delta^2}{2\mu \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} \right] S^2, & |\mu_0 - \omega_D| < |\epsilon_k| \leq \mu_0 + \omega_D \\ 0, & \mu_0 + \omega_D < |\epsilon_k| \leq \omega. \end{cases} \quad (\text{П.10})$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. D.C.Mattis, W.D.Langer. Phys.Rev.Lett, 25, 376 (1970)
2. Ю.В.Копаев. ЖЭТФ, 58, 1012. (1970).
3. Б.А.Волков, Ю.В.Копаев. ЖЭТФ, 64, 2184 (1973).
4. S.C.Lo, K.W.Wong. Nuovo Cim. 10B, 361, 383 (1972)
5. Ю.В.Копаев, Р.Х.Тимеров. ЖЭТФ 63, 290 (1972).
6. Ю.В.Копаев, Р.Х.Тимеров. ФТТ, 14, 86 (1972).
7. А.И.Русинов, До Чан Кат, Ю.В.Копаев. ЖЭТФ 65, 1984 (1973).
8. И.Г.Бранков, Н.С.Тончев. Сообщения ОИИ, P4-8150, Дубна, 1974.
9. И.Г.Бранков, В.А.Загребнов, Н.С.Тончев. Препринт ОИИ, P4-7917, Дубна, 1974.
10. J.Bardeen, L.N.Cooper, J.R.Schrieffer, Phys.Rev. 106, 162 (1957); 108, 1175 (1957).
11. N.N.Bogolubov, Physica, 26, S1 (1960)
12. Н.Н.Боголюбов (мл). Метод исследования модельных гамильтонианов, М., Наука, 1974.
13. H.Frohlich, Proc.Roy.Soc., A215, 291 (1952)
14. J.Bardeen, D.Pines. Phys.Rev. 99, 1140 (1955).
15. K.Levin, D.L.Mills, S.L.Cunningham. Phys.Rev. 10B, 3821 (1974).

Рукопись поступила в издательский отдел  
22 мая 1975 г.