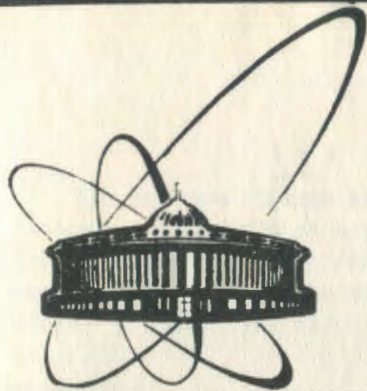


89-96



объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P4-89-96

Г.Н.Афанасьев

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ
ПОЛЕ СОЛЕНОИДОВ
С ПЕРЕМЕННЫМ ТОКОМ

Направлено в журнал "Nuovo Cimento A"

1989

§ I . Введение

При изучении эффекта Ааронова - Бома (АБ) часто приходится рассматривать меняющийся во времени магнитный поток внутри соленоида. Это приводит к тому, что вне соленоида возникает вихревое электрическое поле. Воздействуя на заряженную частицу, оно меняет ее угловой момент ^{/1/}. При этом обычно бездоказательно принимается (см., напр. ^{/2/}), что вне соленоида магнитное поле равно нулю. Наше внимание привлекли работы ^{/3-5/}, в которых этот факт ставится под сомнение. В первой ^{/3/} из них отмечается, что если вне соленоида $\vec{E} \neq 0$, то с необходимостью $\vec{H} \neq 0$, что приводит к рассеянию заряженных частиц на этом магнитном поле. Во второй работе ^{/4/} доказывается, что отсутствие магнитного поля вне соленоида совместно с уравнениями Максвелла только в том случае, если магнитный поток не зависит от времени или зависит линейно. Наконец, в работе ^{/5/} утверждается, что мгновенное включение тока в обмотке цилиндрического соленоида должно привести к возникновению вне соленоида расходящейся со скоростью света цилиндрической волны. Все эти работы носят чисто качественный характер, конкретные выражения для полей отсутствуют. Магнитные поля соленоидов ранее изучались не только в связи с рассмотрением АБ-эффекта. Упомянем две интересные работы М.А.Миллера ^{/6/}, в которых предсказывается правильная временная зависимость возбуждаемых вне соленоида электромагнитных полей.

Данная работа ставит себе целью реализовать качественные соображения работ ^{/3-6/} непосредственным решением уравнений Пуассона для векторного потенциала. Для нескольких конкретных случаев временной зависимости тока в цилиндрическом или тороидальном соленоидах найдены вектор-потенциалы, напряженности электрического и магнитного полей, вектор потока электромагнитной энергии. Обсуждаются возникающие парадоксальные ситуации, связанные с переносом энергии электромагнитного поля вне соленоида, указываются возможные пути их разрешения.

§ 2. Электромагнитные поля цилиндрического соленоида

2.1. Рассмотрим бесконечный цилиндрический соленоид радиуса R с осью симметрии, направленной вдоль оси z . Пусть по его обмотке протекает ток
$$\vec{j}(\vec{r}, t) = S(\rho - R) \cdot \vec{n}_\varphi \cdot j(t),$$

причем $j(t) = 0$ при $t < 0$. Тогда согласно /7/ имеем для вектор-потенциала при $t > 0$ следующее выражение:

$$\vec{A} = A_y \cdot \vec{e}_y, \quad A_y = \frac{2R}{c} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^{t-\frac{d}{c}} \frac{j(\tau) d\tau}{[(t-\tau)^2 - d^2/c^2]^{1/2}}.$$

Здесь $d^2 = \rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos \varphi$, c - скорость света. Рассмотрим простейшие зависимости $j(t)$ при $t > 0$.

а) $j(t) = j_0 \Theta(t)$ ($\Theta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\Theta(x) = 1$ при $x > 0$).

Тогда

$$A_y = j_0 \cdot t \int_0^R \frac{R}{2\rho} F(\rho, t). \quad (2.1)$$

функция $F(\rho, t)$ равна нулю при $|\rho - R| > ct$. Физически это означает, что до точки P , находящейся на расстоянии ρ от оси соленоида, еще не дошло воздействие от ближайшей точки соленоида. На фронте волны (который мы условно определим условием $|\rho - R| < ct < \rho + R$, что означает, что в точку P пришло действие от ближайшей точки соленоида, но еще не достигло действия от наиболее удаленной точки соленоида, лежащей в той же плоскости, перпендикулярной оси Z , что и P)

$$F(\rho, t) = 2 \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(\cos \varphi - \cos \varphi_1)^{1/2} (ch \mu - \cos \varphi)}$$

$$(\cos \varphi_1 = \frac{\rho^2 + R^2 - c^2 t^2}{2\rho R}, \quad ch \mu = \frac{\rho^2 + R^2}{2\rho R}, \quad 0 < \varphi_1 < \pi).$$

Наконец, в области за фронтом волны ($\rho + R < ct$)

$$F(\rho, t) = -2\sqrt{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-\mu n) \cdot [Q_{n-\frac{1}{2}}(ch \mu_1) - Q_{n+\frac{1}{2}}(ch \mu_1)], \quad ch \mu_1 = \frac{c^2 t^2 - \rho^2 - R^2}{2\rho R}$$

($Q_n(x)$ - функция Лежандра второго рода). В дальнейшем мы будем интересоваться исключительно областью за фронтом. При $ct \gg R$ и $ct \gg \rho$ из (2.1) получаем обычный статический вектор-потенциал цилиндрического соленоида:

$$A_{\varphi} = \frac{2\pi j_0}{c} \cdot \begin{cases} R^2/\rho & - \text{вне соленоида,} \\ \rho & - \text{внутри соленоида.} \end{cases}$$

Рассмотрим случай тонкого соленоида ($R \ll \rho$). Тогда

$$A_{\varphi} = 2 j_0 t \cdot \left(\frac{R}{\rho}\right)^{3/2} Q_{-1/2} \left(\frac{c^2 t^2 - R^2 - \rho^2}{2 \rho R}\right).$$

Если к тому же $c^2 t^2 - \rho^2 \gg \rho R$, то вне соленоида

$$A_{\varphi} = \frac{2\pi j_0 R^2}{\rho c} \gamma, \quad \gamma = \left(1 - \frac{\rho^2}{c^2 t^2}\right)^{-1/2}.$$

Неисчезающие компоненты напряженностей электрического и магнитного поля равны

$$E_{\varphi} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial t} = \frac{2\pi j_0 R^2 \rho}{c^2 t^3} \gamma^3,$$

$$H_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot A_{\varphi}) = \frac{2\pi j_0 R^2}{c^2 t^2} \gamma^3.$$

Поток энергии электромагнитного поля направлен по радиусу от соленоида:

$$\int_{\rho} = \frac{E_{\varphi} \cdot H_z}{4\pi c} = \frac{\pi j_0^2 R^4 \rho}{c^8 t^5} \gamma^6.$$

Таким образом, имеем следующую физическую картину. После включения тока (при $t=0$) в обмотке соленоида все поля в точке P равны нулю до тех пор, пока до нее не дойдет действие от ближайшей к P точки соленоида. После прохождения фронта волны напряженности E , H убывают со временем сравнительно медленно ($E_{\varphi} \sim t^{-3}$, $H_z \sim t^{-2}$), что является следствием двумерности рассматриваемой задачи. Поток энергии поля направлен по радиусу от соленоида и убывает как t^{-5} .

б) Пусть $j(t) = 0$ при $t < 0$ и линейно растет при $t > 0$:
 $j(t) = j_0 \cdot t \cdot \theta(t)$. Тогда при $t > \frac{R+\rho}{c}$ имеем вне тонкого соленоида

$$A_{\varphi} = \frac{2\pi R^2 j_0 \cdot t}{\rho c} \cdot \gamma^{-1}, \quad E_{\varphi} = -\frac{2\pi R^2 j_0}{\rho c^2} \cdot \gamma,$$

$$H_z = -\frac{2\pi R^2 \dot{j}_1}{c^3 t} \gamma,$$

$$S_p = \frac{\pi \dot{j}_1^2 R^4 \gamma^2}{\rho c^6 t}.$$

В итоге E_φ при $t > \frac{R+\rho}{c}$ стремится к постоянной величине, а H_z убывает пропорционально t^{-1} . Поток энергии вне соленоида убывает обратно пропорционально времени и направлен по радиусу от соленоида. Странным является то обстоятельство, что несмотря на линейный рост тока в обмотке соленоида поток, излучаемый соленоидом в окружающее пространство, убывает с течением времени. Посмотрим, что происходит внутри соленоида конечного радиуса R . При больших значениях t имеем

$$A_\varphi \approx \frac{2\pi \dot{j}_1 t}{c} \rho, \quad E_\varphi = -\frac{2\pi \dot{j}_1 \rho}{c^2}, \quad H_z = \frac{4\pi \dot{j}_1 t}{c},$$

$$S_p = -\frac{2\pi \dot{j}_1^2 t \rho}{c^4}.$$

Итак, при линейно растущем токе поток энергии внутри соленоида также линейно растет со временем. При этом он концентрируется вблизи его поверхности, направлен по радиусу к оси соленоида и стремится, таким образом, стянуть соленоид в направленную вдоль его оси нить.

в) Пусть $j(t) = 0$ при $t < 0$ и $j(t) = j_2 \cdot t^2$ при $t > 0$.

Тогда при $t > \frac{R+\rho}{c}$ получаем вне тонкого соленоида

$$A_\varphi = \frac{2\pi R^2 j_2}{c} \left(\frac{t^2}{\rho \gamma} - \frac{\rho}{c^2} \operatorname{arccch} \frac{ct}{\rho} \right), \quad H_z = -\frac{4\pi R^2 j_2}{c^3} \operatorname{arccch} \frac{ct}{\rho},$$

$$E_\varphi = -\frac{4\pi R^2 j_2 t}{c^2 \rho \gamma}, \quad S_p = \frac{4\pi R^4 j_2^2 t}{c^6 \rho \gamma} \operatorname{arccch} \frac{ct}{\rho}.$$

Заметим, что в этом случае магнитное поле вне соленоида не исчезает при $t \rightarrow \infty$. Более того, оно логарифмически растет:

$$H_z \approx -\frac{4\pi R^2 j_2}{c^3} \ln \frac{2ct}{\rho}.$$

Эти логарифмически расходящиеся со временем члены отсутствуют в качественном анализе работы /6/.

2.2. Пусть по обмотке соленоида радиуса R течет ток, являющийся периодической функцией времени:

$$\vec{j} = j \cdot \vec{n}_y \cdot S(p-R) \cdot \cos \omega t.$$

Тогда для вектор-потенциала находим следующее частное (синфазное) решение:

$$\vec{A} = \vec{n}_y \cdot A_y,$$

$$A_y = -\frac{2\pi^2 j R}{c} \cdot \cos \omega t \cdot \begin{cases} Y_1(kR) \cdot J_1(k\rho) & \text{при } \rho < R, \\ J_1(kR) \cdot Y_1(k\rho) & \text{при } \rho > R \end{cases}$$

($k = \omega/c$, J_ν и Y_ν - соответственно функции Бесселя и Неймана). Напряженности поля равны

$$E_y = -\frac{2\pi^2 j R \omega}{c^2} \cdot \sin \omega t \cdot \begin{cases} Y_1(kR) \cdot J_1(k\rho) & \text{при } \rho < R, \\ J_1(kR) \cdot Y_1(k\rho) & \text{при } \rho > R, \end{cases}$$

$$H_z = -\frac{2\pi^2 j R \omega}{c^2} \cos \omega t \cdot \begin{cases} Y_1(kR) \cdot J_0(k\rho) & \text{при } \rho < R, \\ J_1(kR) \cdot Y_0(k\rho) & \text{при } \rho > R. \end{cases}$$

Поток электромагнитного поля направлен по радиусу:

$$S_p = \frac{\pi^3 j^2 R^2 \omega^2}{2 c^5} \cdot \sin 2\omega t \cdot \begin{cases} Y_1^2(kR) \cdot J_0(k\rho) \cdot J_1(k\rho) & \text{при } \rho < R, \\ J_1^2(kR) \cdot Y_0(k\rho) \cdot Y_1(k\rho) & \text{при } \rho > R. \end{cases}$$

В рассматриваемом случае поток не является положительно определенной величиной. В самом деле, в данной точке пространства ($\rho = \text{const}$) S_p меняет знак с течением времени. С другой стороны, в данный момент времени S_p имеет различные знаки в различных областях пространства. Конечность радиуса соленоида приводит к любопытным следствиям. Если ω и R таковы, что $J_1(kR) = 0$, то векторный потенциал отличен от нуля только внутри соленоида. Отсюда следует, что трансформатор, вторичная обмотка которого находится поверх первичной (по которой протекает ток j), должен перестать работать при таких ω и R (поскольку равна нулю э.д.с., наводимая во вторичной обмотке). Если в качестве ω взять стандартную частоту ($\omega = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ сек}^{-1}$), то наименьшее значение R , при котором вектор-потенциал исчезает во внешней области, равно $R \approx 3700 \text{ км}$

(взяв первый нуль функции Бесселя J_1). Таким образом, в обычных условиях можно не беспокоиться о снижении эффективности трансформаторов. Если ω и R таковы, что $Y_1(kR) = 0$, то векторный потенциал отличен от нуля только вне соленоида. В этом случае, чтобы трансформатор работал, вторичная обмотка должна быть внешней.

2.3. Пусть ток в соленоиде экспоненциально нарастает или спадает со временем:

$$\vec{j} = \vec{n}_z \cdot S(j-R) \cdot \exp(\pm \omega t), \quad \omega > 0.$$

Неисчезающая компонента вектор-потенциала равна

$$A_z = \frac{4\pi j R}{c} \exp(\pm \omega t) \cdot \begin{cases} I_1(kR) \cdot K_1(k\rho) & \text{при } \rho > R, \\ K_1(kR) \cdot I_1(k\rho) & \text{при } \rho < R \end{cases}$$

($I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ - модифицированные функции Бесселя).

Приведем также напряженности поля и вектор Лойтинга:

$$E_z = \mp \frac{4\pi R j \omega}{c^2} \exp(\pm \omega t) \cdot \begin{cases} I_1(kR) \cdot K_1(k\rho) & \text{при } \rho > R, \\ K_1(kR) \cdot I_1(k\rho) & \text{при } \rho < R, \end{cases}$$

$$H_z = \frac{4\pi R j \omega}{c^2} \exp(\pm \omega t) \cdot \begin{cases} -I_1(kR) \cdot K_0(k\rho) & \text{при } \rho > R, \\ K_1(kR) \cdot I_0(k\rho) & \text{при } \rho < R, \end{cases}$$

$$S_p = \pm \frac{4\pi R^2 j^2 \omega^2}{c^5} \exp(\pm 2\omega t) \cdot \begin{cases} I_1^2(kR) \cdot K_0(k\rho) \cdot K_1(k\rho) & \text{при } \rho > R, \\ -K_1^2(kR) \cdot I_0(k\rho) \cdot I_1(k\rho) & \text{при } \rho < R. \end{cases}$$

Отметим, что энергия "вытекает" из соленоида, если ток растёт и "втекает" в него в противном случае.

§ 3. Электромагнитное поле тороидального соленоида

3.1. Пусть обмотка соленоида, состоящая из N витков, намотана на тор $(\rho-d)^2 + z^2 = R^2$. В стационарном случае напряжённость магнитного поля H вне соленоида равна нулю. Внутри соленоида отлична от нуля только одна компонента $H_y = g/\rho$. Константу g можно выразить либо через полное число витков N и силу тока I ($g = 2NI/c$, c - скорость света), либо через поток магнитного поля внутри соленоида ($g = \frac{c}{2\pi d} \cdot (d - \sqrt{d^2 - R^2})^{-1}$). При $I = \text{const}$ компоненты вектор-потенциала, полученные в явном виде в [8], были затем использованы для изучения рассеяния электронов на тороидальном соленоиде [9, 10]. Кратко опишем их свойства. Отличны от нуля две компоненты A_ρ и A_z . На больших расстояниях они убывают как r^{-3} :

$$A_z \approx \frac{\pi g d R^2}{8} \frac{1 + 3 \cos 2\theta}{r^3}, \quad A_\rho \approx \frac{3}{8} \pi g d R^2 \frac{\sin 2\theta}{r^3} \quad (\text{div } \vec{A} = 0).$$

Компонента A_ρ равна нулю в плоскости $z = 0$ и на оси z . Компонента A_z на оси z равна

$$A_z(\rho=0, z) = \frac{\sqrt{R} g d}{(d^2 + z^2)^{3/4}} \cdot Q_{\frac{1}{2}} \left(\frac{d^2 + z^2 + R^2}{2R \sqrt{d^2 + z^2}} \right).$$

В плоскости $z=0$ A_ρ растёт от $g \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{d}} Q_{\frac{1}{2}} \left(\frac{d^2 + R^2}{2dR} \right)$ в начале координат до значения $g \cdot P_{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{\rho} \right) \cdot Q_{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{\rho} \right)$ внутри соленоида (при $\rho = \sqrt{d^2 - R^2}$). При больших значениях ρ A_z отрицательно: $A_z = -\pi g d R^2 / 4\rho^3$. Далее, A_z и A_ρ являются соответственно четной и нечетной функциями z . Поведение A_z в плоскости $z=0$ более наглядно для тонкого ($R \ll d$) соленоида. Именно, A_z растёт от $\pi g R^2 / 2d^2$ в начале координат до $gR/2d$ на внутренней границе ($\rho = d - R$) соленоида. Внутри соленоида A_z обращается в нуль при $\rho = d$ и становится равной $-gR/2d$ на внешней границе ($\rho = d + R$) соленоида. При больших значениях ρ A_z , оставаясь отрицательной, стремится к нулю: $A_z \approx -\pi g d R^2 / 4\rho^3$. Рассмотрим теперь $A_z(\rho, z)$ как функцию z при фиксированном ρ . На оси z $A_z = \frac{1}{2} \pi g d R^2 / (d^2 + z^2)^{3/2}$. При $\rho < d$ $A_z > 0$

при всех z . При $\rho > d$ $A_z < 0$ при малых z и $A_z > 0$ при z больших. Нули A_z в плоскости (ρ, z) лежат на кривой, которая начинается в точке $(d, 0)$ и имеет асимптотами прямые $z = \pm \rho/\sqrt{2}$. Такое поведение A_z приводит к тому, что $\int_{-\infty}^{\infty} A_z(\rho, z) dz$ равен потоку магнитного поля Φ , если ось интегрирования проходит через дыру соленоида ($\rho < d$), и нулю в противном случае ($\rho > d$).

3.2. Пусть теперь ток в обмотке соленоида зависит от времени. Заметим, что в отличие от рассмотренного в §2 случая цилиндрического соленоида электромагнитное поле тороидального соленоида не обладает свойством последействия. Это означает, что в данной точке P переходные эффекты (обязанные включению в момент времени $t=0$ тока в соленоиде) кончатся, как только точки P достигнет действие от наиболее удаленной точки соленоида. Рассмотрим несколько конкретных зависимостей $g(t)$.

а) Пусть $g(t) = j_0 \cdot \theta(t)$. После момента времени $t_1 = \frac{\sqrt{(\rho+d)^2 + z^2} - R}{c}$ имеем в точке $P(\rho, z)$

$$A_z = j_0 \cdot A_z^{(0)}, \quad A_\rho = j_0 \cdot A_\rho^{(0)}, \quad \text{где}$$

$$A_z^{(0)} = \frac{\sqrt{R}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d - \rho \cos \varphi}{[(\rho \cos \varphi - d)^2 + z^2]^{3/4}} \cdot Q_{\frac{1}{2}}(ch \mu), \quad (3.1)$$

$$A_\rho^{(0)} = \frac{\sqrt{R}}{2\pi} z \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos \varphi}{[(\rho \cos \varphi - d)^2 + z^2]^{3/4}} \cdot Q_{\frac{1}{2}}(ch \mu)$$

$$(ch \mu = \frac{r^2 + d^2 + R^2 - 2d\rho \cos \varphi}{2R[(\rho \cos \varphi - d)^2 + z^2]^{1/2}}, \quad r^2 = \rho^2 + z^2).$$

Эти выражения совпадают с векторными потенциалами тороидального соленоида ^{18/}, по обмотке которого протекает постоянный ток ($g=1$). Для тонкого соленоида ($R \ll d$) эти интегралы берутся в квадратурах. Вне соленоида имеем

$$A_\rho^{(0)} = -\frac{R^2 z}{2(d\rho)^{3/2}} \frac{1}{sh \mu_1} \cdot Q_{\frac{1}{2}}^1(ch \mu_1),$$

$$A_z^{(0)} = \frac{R^2}{2(d\rho)^{3/2}} \frac{1}{sh \mu_1} \cdot [\rho Q_{\frac{1}{2}}^1(ch \mu_1) - d \cdot Q_{-\frac{1}{2}}^1(ch \mu_1)]$$

$$(ch \mu_1 = \frac{r^2 + d^2}{2d\rho}).$$

Свойства этих потенциалов обсуждены в § 3.1. Таким образом, имеем

следующую физическую картину. В заданный момент времени напряженности поля и вектор Пойнтинга отличны от нуля только внутри слоя:

$$[(ct-R)^2 - d^2 \cos^2 \theta]^{1/2} - d \sin \theta \leq r \leq [(ct+R)^2 - d^2 \cos^2 \theta]^{1/2} + d \sin \theta.$$

Толщина этого слоя равна $2R$ вдоль оси z и $2(d+R)$ вдоль оси x или y . Скорость его расширения равна скорости света. Перед этим слоем ($r > [(ct+R)^2 - d^2 \cos^2 \theta]^{1/2} + d \sin \theta$) все компоненты вектор-потенциала равны нулю. За слоем ($0 < r < [(ct-R)^2 - d^2 \cos^2 \theta]^{1/2} - d \sin \theta$) они определяются соотношениями (3.1).

б) Пусть $g(t) = 0$ при $t < 0$ и $g = j_1 \cdot t$ при $t > 0$. Тогда при $t > t_1$ имеем

$$A_\rho = j_1 \cdot t \cdot A_\rho^{(0)}, \quad A_z = j_1 \cdot t \cdot A_z^{(0)},$$

где $A_\rho^{(0)}$ и $A_z^{(0)}$ по-прежнему определяются соотношениями (3.1). Вне соленоида отличны от нуля только напряженности электрического поля:

$$E_\rho = -\frac{1}{c} j_1 \cdot A_\rho^{(0)}, \quad E_z = -\frac{1}{c} j_1 \cdot A_z^{(0)}.$$

Таким образом, при линейно растущем со временем токе поток электромагнитной энергии наружу отсутствует. Он концентрируется внутри соленоида, стремясь сжать его в нить $\rho = d, z = 0$. Ради простоты докажем это утверждение для тонкого соленоида. Внутри соленоида имеем ^{18/}

$$A_\rho \approx j_1 \cdot t \cdot \exp(-\mu) \cdot \sin \theta, \quad A_z \approx -j_1 \cdot t \cdot \exp(-\mu) \cdot \cos \theta. \quad (3.2)$$

Здесь μ, θ - тороидальные координаты ($\rho = \frac{a \sin \mu}{\cos \mu - \cos \theta}, z = \frac{a \sin \theta}{\cos \mu - \cos \theta}$).

При фиксированном μ точки $P(\rho, z, \theta)$ заполняют поверхности тора $(\rho-d)^2 + z^2 = R^2$ с параметрами $d = a \cdot \cot \mu, R = a / \sin \mu$.

При постоянных μ, θ и изменении θ ($-\pi/2 < \theta < \pi$) точка P пробегает вдоль окружности радиуса R с центром в $\rho=d, z=0$, лежащей в плоскости отдельного витка. Пусть соленоиду отвечает $\mu = \mu_0$.

Тогда при $\mu < \mu_0$ точка P лежит вне соленоида, а при $\mu > \mu_0$ - внутри него. Из (3.2) следует, что внутри тонкого соленоида отлична от нуля только θ -компонента A : $A_\theta = -j_1 \cdot t \cdot \exp(-\mu)$.

Неисчезающие компоненты напряженностей равны

$$E_\theta = \frac{1}{c} j_1 \cdot \exp(-\mu), \quad H_\varphi = \frac{j_1 \cdot t}{\rho}.$$

Вектор Пойнтинга направлен перпендикулярно осевой линии ($\rho = d, z = 0$)

соленоида: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, $S_{\mu} = \frac{d_1^2 t}{4\pi \rho c^2} \exp(-\mu)$
 ($\exp(-\mu) = [(d-\rho)^2 + z^2]^{1/2} / 2d$ для тонкого соленоида).

в) Пусть $\vec{g} = d_2 \cdot t^2 \Theta(t)$. Тогда

$$A_{\rho} = d_2 t^2 A_{\rho}^{(0)} + \frac{1}{c^2} d_1 A_{\rho}^{(1)}, \quad A_z = d_2 t^2 A_z^{(0)} + \frac{1}{c^2} d_1 A_z^{(1)}$$

Здесь $A_{\rho}^{(0)}$, $A_z^{(0)}$ определены соотношениями (3.1), а $A_{\rho}^{(1)}$ и $A_z^{(1)}$ равны

$$A_z^{(1)} = \frac{R^{3/2}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{d - \rho \cos \vartheta}{[(\rho \cos \vartheta - d)^2 + z^2]^{1/4}} \cdot [Q_{3/2}(ch \mu) - Q_{1/2}(ch \mu)],$$

$$A_{\rho}^{(1)} = \frac{R^{3/2}}{4\pi} z \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\cos \vartheta}{[(\rho \cos \vartheta - d)^2 + z^2]^{1/4}} \cdot [Q_{3/2}(ch \mu) - Q_{1/2}(ch \mu)].$$

На больших расстояниях $A_z^{(1)}$ и $A_{\rho}^{(1)}$ убывают как z^{-1} :

$$A_z^{(1)} \approx -\frac{\pi R^2 d}{8z} (3 + \cos 2\theta), \quad A_{\rho}^{(1)} \approx -\frac{\pi R^2 d}{8z} \sin 2\theta.$$

Далее, $A_{\rho}^{(1)}$ равно нулю на оси z и на плоскости $z = 0$.

На оси z $A_z^{(1)}$ равно

$$A_z^{(1)}(\rho = 0, z) = \frac{R^{3/2} d}{2(d^2 + z^2)^{1/4}} \cdot [Q_{3/2}(ch \mu_0) - Q_{1/2}(ch \mu_0)]$$

$$(ch \mu_0 = \frac{z^2 + d^2 + R^2}{2R \sqrt{d^2 + z^2}}).$$

Для тонкого соленоида эти выражения упрощаются:

$$A_z^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{R^2}{(d\rho)^{1/2}} \cdot [d \cdot Q_{1/2}(ch \mu_1) - \rho \cdot Q_{3/2}(ch \mu_1)],$$

$$A_{\rho}^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{R^2 z}{(d\rho)^{1/2}} \cdot Q_{3/2}(ch \mu_1)$$

(μ и μ_1 - те же, что и в § 3.1).

В результате вне соленоида отличны от нуля следующие напряженности поля:

$$E_p = \frac{R^2 j_2 t}{c (d\rho)^{3/2}} \frac{1}{\sin \mu_1} \cdot Q_{\frac{1}{2}}^1(\operatorname{ch} \mu_1),$$

$$E_z = -\frac{R^2 j_2 t}{c (d\rho)^{3/2}} \frac{1}{\sin \mu_1} \cdot \left[\beta Q_{\frac{1}{2}}^1(\operatorname{ch} \mu_1) - d Q_{-\frac{1}{2}}^1(\operatorname{ch} \mu_1) \right],$$

$$H_\varphi = -\frac{R^2}{c^2} \frac{j_2}{(d\rho)^{1/2}} \cdot Q_{\frac{1}{2}}^1(\operatorname{ch} \mu_1).$$

Таким образом, вне соленоида возникает не зависящее от времени магнитное поле. При $\tau \rightarrow \infty$ имеем

$$E_p = -\frac{\pi d R^2 j_2 t}{4 c \tau^3} \cdot \sin 2\theta,$$

$$E_z = -\frac{\pi d R^2 j_2 t}{4 c \tau^3} (1 + 3 \cos 2\theta),$$

$$H_\varphi = -\frac{\pi d R^2 j_2 \sin \theta}{2 c^2 \tau^2} \quad (\text{здесь } \tau, \theta - \text{сферические координаты}).$$

Поток энергии через сферу достаточно большого радиуса τ направлен от соленоида

$$S_\tau = \frac{1}{4\pi c} E_\theta \cdot H_\varphi = \frac{\pi d^2 R^4 j_2^2 t \sin^2 \theta}{16 c^4 \tau^5}.$$

г) Пусть $g(t) = j_3 \cdot t^3 \cdot \theta(t)$. Тогда при $t > t_1$ имеем $A_p = j_3 t^3 A_p^{(0)} + \frac{1}{3c^2} j_3 t A_p^{(2)}$, $A_z = j_3 t^3 A_z^{(0)} + \frac{1}{3c^2} j_3 t A_z^{(2)} + \frac{\pi R^2 d}{c^3} j_3$.

Неисчезающие напряженности электромагнитного поля равны

$$E_p = -\frac{3 j_3 t^2}{c} A_p^{(0)} - \frac{3 j_3}{c^3} A_p^{(2)},$$

$$E_z = -\frac{3 j_3 t^2}{c} A_z^{(0)} - \frac{3 j_3}{c^3} A_z^{(2)},$$

$$H_\varphi = -\frac{3 j_3 R^2 t}{c^2 (d\rho)^{1/2}} \cdot Q_{\frac{1}{2}}^1(\operatorname{ch} \mu_1).$$

На больших расстояниях

$$E_{\theta} \approx -\frac{3}{4\epsilon^2 z} \int_0^z \pi d R^2 \sin\theta \left(1 + \frac{c^2 t^2}{z^2}\right), \quad H_{\phi} \approx -\frac{3}{2c^2 z} \int_0^z \pi d R^2 \sin\theta.$$

Радиальная компонента вектора Пойнтинга направлена от соленоида:

$$S_r = \frac{9}{32\epsilon^6 z^3} \int_0^z \pi d^2 R^4 \sin^2\theta \left(1 + \frac{c^2 t^2}{z^2}\right).$$

д) Пусть g - периодическая функция времени: $g = g_0 \cdot \cos \omega t$.
Тогда при малых размерах соленоида ($R/z \ll 1$, $\kappa R \ll 1$, $d/z \ll 1$, $\kappa d \ll 1$) получаем для вектор-потенциала следующие выражения:

$$A_r = \frac{\lambda \cos\theta}{2z^2} (\cos\psi + \kappa z \cdot \sin\psi), \quad A_{\theta} = \frac{\lambda \sin\theta}{4z^3} [(1 - \kappa^2 z^2) \cos\psi + \kappa z \cdot \sin\psi]$$

$$(\lambda = \pi g_0 d R^2, \quad \psi = \kappa z - \omega t, \quad \kappa = \omega/c).$$

Неисчезающие напряженности электромагнитного поля равны

$$E_r = \frac{\lambda \kappa \cos\theta}{2z^3} (\kappa z \cdot \cos\psi - \sin\psi), \quad E_{\theta} = \frac{\lambda \kappa \sin\theta}{4z^3} [(1 - \kappa^2 z^2) \sin\psi + \kappa z \cos\psi],$$

$$H_{\phi} = \frac{\lambda \kappa^2 \sin\theta}{4z^2} (\kappa z \cdot \sin\psi + \cos\psi).$$

В волновой зоне ($\kappa z \gg 1$) имеем

$$E_r \approx \frac{\lambda \kappa^2}{2z^2} \cos\theta \cos\psi, \quad E_{\theta} = H_{\phi} \approx \frac{\lambda \kappa^3 \sin\theta \sin\psi}{4z},$$

$$S_r = \frac{1}{4\pi\epsilon} E_{\theta} \cdot H_{\phi} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\lambda \kappa^3 \sin\theta \sin\psi}{4z} \right)^2 > 0$$

(т.е. энергия излучается соленоидом).

Интегральный поток через сферу достаточно большого радиуса равен

$$\frac{1}{T} R^2 \int_0^T dt \int S_R d\Omega = \frac{1}{48} \frac{I^2 K^6}{c} \quad (T = 2\pi/\omega).$$

Мы заключаем: при изменяющемся со временем токе вне соленоида возникает магнитное поле. Вектор потока электромагнитного поля направлен от соленоида. Исключение составляет частное решение, приведенное в § 2.2., соответствующее синусоидальному току в соленоиде.

§ 4. Обсуждение

Вернемся снова к случаю тока в соленоиде, линейно зависящего от времени. Пусть цилиндрический или тороидальный соленоид охвачен замкнутым витком проводника С (в последнем случае виток проходит через дыру соленоида). Постоянное вихревое электрическое поле E_{φ} вызывает в витке С ток $\int j_{\varphi} = \sigma E_{\varphi}$ (σ - проводимость), что приводит к выделению в проводнике С джоулева тепла. Поскольку вектор Пойнтинга убывает со временем ($\sim t^{-1}$) для цилиндрического соленоида и в точности равен нулю (при $t > t_1$) для тороидального соленоида, то непонятно, с помощью какого механизма перекачивается энергия электромагнитного поля в виток проводника. Следующий возможный ответ был указан в работе /11/. Индуцируемый в проводнике С ток приводит к появлению магнитного поля H , силовые линии которого имеют вид концентрических окружностей, охватывающих С. В результате возникает вектор Пойнтинга $E_{\varphi} H / 4\pi c$, который направлен перпендикулярно проводнику С и, таким образом, "втекает" в него. Или иначе: ток в витке С создает сам себе вектор Пойнтинга.

Анализ следующего мысленного эксперимента, как нам кажется, весьма поучителен. Пусть, как и прежде, виток привода С охватывает тороидальный соленоид, проходя через его отверстие. Включим этот виток в мост сопротивлений с внешним источником тока таким образом, чтобы скомпенсировать э.д.с., наводимую в С. Пусть ток в соленоиде линейно растет во времени. Известно, что сопротивление проводника, пронизываемого магнитным потоком, является периодической функцией величины этого потока (см. напр., /12, 13/). Ввиду этого равновесие моста сопротивлений периодически нарушается, что может привести к срабатыванию спускового устройства. Возникает вопрос: как передается

энергия от соленоида к этому устройству? Следуя логике работы /II/, рассуждаем следующим образом. Изменение потока внутри соленоида приводит к изменению сопротивления витка C , охватывающего соленоид. В C возникает нескомпенсированный ток, который создает вокруг C магнитное поле H . Вектор Пойнтинга, образованный из исходного вихревого электрического поля E_{ζ} и индуцируемого магнитного поля H , направлен перпендикулярно к C и является возможным кандидатом переноса энергии.

Литература

1. Lipkin H.J. and Peshkin M. Phys.Lett., 1982, B118, p.385.
2. Peshkin M. Phys.Rep., 1981, 80, p.375; Roy S.M. and Singh V. Nuovo Cim., 1984, A79, 391; Kobe D.H. J.Phys., 1985, A18, p.237; Home D. and Sengupta S. Amer.J.Phys., 1983, 51, p.942; Wilczek F. Phys.Rev.Lett., 1982, 48, p.1144.
3. Danos M. Amer. J.Phys., 1982, 50, p.64.
4. Comay E. J.Phys., 1987, A20, p.5729.
5. Peshkin M. Physica B+C, 1988, 151, p.384.
6. Миллер М.А. УФН, 1984, 142, с.147;
Миллер М.А. Известия вузов. Радиофизика, 1986, 29, с.991.
7. Морс Ф. и Фешбах Г. Методы теоретической физики, 1960, т.2, с.342, М.,ИЛ.
8. Afanasiev G.N. J.Comput.Phys., 1987, 69, p.196.
9. Afanasiev G.N. J.Phys., 1988, A21, p.2095.
10. Афанасьев Г.Н. Препринт ОИЯИ, 1988, P4-88-84I.
11. Heald M.A. Amer.J.Phys., 1988, 56, p.540.
12. Альтшулер Б.Л., Аронов А.Г., Спивак Б.З., Шарвин Д.Ю., Шарвин Ю.В. Письма в ЖЭТФ, 1982, 35, с.476.
13. Washburn S., Webb R.A. Adv.Phys., 1986, 35, p.375.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 февраля 1989 года.