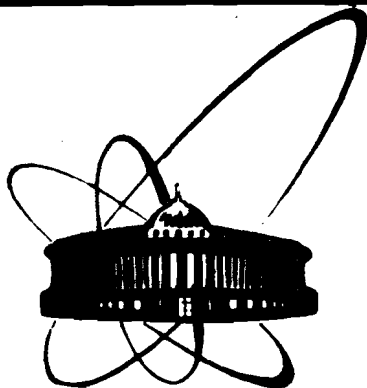


89-590



**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

Б 705
6 705

P4-89-590

**Ю. Л. Болотин*, С. И. Виноцкий, В. Ю. Гончар*,
Б. Л. Марковски, В. Н. Тарасов*, Н. А. Чеканов***

**ПРОЯВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧНОСТИ
В СПЕКТРАХ НЕКОТОРЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ
СИСТЕМ С ДИСКРЕТНОЙ СИММЕТРИЕЙ**

Направлено в журнал "Ядерная физика"

Харьковский физико-технический институт АН УССР

1989

Введение

Известно, что в детерминированных классических системах наряду с регулярными и квазипериодическими существуют также и хаотические решения. В этой связи возникает вопрос о проявлении классической стохастичности^{/1-5,25/} на квантовом уровне и, в частности, в спектрах квантовых гамильтонианов. Численные расчеты хаотического поведения решений, генерируемых классическим пределом полевых моделей с симметриями типа калибровочной, повысило интерес к проблеме динамического хаоса^{/6/} и стимулировало многочисленные исследования различных обобщений этих гамильтоновых систем.

В настоящей работе исследованы свойства спектров C_{3D} и C_{4D} -инвариантных гамильтонианов. Изучение спектра C_{3D} -инвариантного гамильтониана с двумя степенями свободы проведено методом нормальных форм Биркгофа-Густавсона (Б.-Г.). Получены простые квазиклассические формулы для спектра. Рассмотрен простейший пример с C_{4D} -инвариантным гамильтонианом, являющийся двухпараметрическим обобщением янг-миллсовского гамильтониана с двумя степенями свободы, и изучено распределение энергетических уровней в зависимости от параметров. Полученная связь между классическим хаосом и характером плотности распределения уровней полностью согласуется с общетеоретическими выводами.

Содержание работы следующее:

В разделе I дан краткий обзор метода квантования нормальной формы Биркгофа-Густавсона. В разделе 2 предложена процедура сведения классического гамильтониана к обобщенной нормальной форме в "полярных" координатах. В разделе 3 проведено квантование модифицированной нормальной формы. В разделе 4 рассмотрен C_{3D} -классический и квантовый гамильтонианы коллективных поверхностных квадрупольных колебаний ядра. В разделе 5 получена приближенная аналитическая формула для спектра этого гамильтониана в четвертом приближении к нормальной форме. В разделе 6 исследована точность квазиклассической формулы энергетического спектра и сделаны выводы о границе области ее применимости. Раздел 7А содержит популярное введение в проблему статистики распределения уровней квантовых гамильтонианов и роли регулярных и хаотических классических траекторий в этих распределениях. В пункте 7Б для заданного C_{4D} -инвариантного гамильтониана строятся критические области поверхности постоянной гауссовской кривизны и прослеживается близость плотности распределения энергетических уровней к вигнеровскому и пуассоновскому распределениям. Раздел 7В содержит описание процедуры диагонализации гамильтонианов с учетом блочного разбиения гильбертова пространства $\mathcal{H} = \mathcal{H}_i$, порожденного пятью представле-

ниями группы инвариантности C_{4v} . В приложении I даны матричные элементы гамильтониана коллективных поверхностных колебаний. Приложение 2 содержит матричные элементы гамильтониана H_{4v} в симметризованном осцилляторном базисе.

I. Квантование нормальной формы в декартовых переменных

Вблизи устойчивых критических точек классический гамильтониан можно представить в виде

$$H(\rho, q) = H^{(2)}(\rho, q) + \sum V^{(j)}(q), \quad (1)$$

$$H^{(2)}(\rho, q) = \frac{1}{2} \sum \omega_\nu (\rho_\nu^2 + q_\nu^2),$$

где q и ρ - канонически сопряженные координаты и импульсы: $q = (q_1, q_2)$, $\rho = (\rho_1, \rho_2)$. Потенциальная функция $V^{(j)}(q)$ представляет сумму полиномов типа $q_1^{j_1} q_2^{j_2}$ степени $j = j_1 + j_2 > 2$.

Если частоты ω_ν гамильтониана (I) несоизмеримы, то существует каноническое преобразование $(q, \rho) \rightarrow (\xi, \eta)$, такое, что гамильтониан в новых переменных $\Gamma(\xi, \eta)$ будет функцией только от следующих комбинаций $I_\nu = \frac{1}{2} (\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2)$, $\nu = 1, 2$, [7, 14].

$$\Gamma(\xi, \eta) = \Gamma(I_1, I_2). \quad (2)$$

По определению, гамильтониан $\Gamma(\xi, \eta)$ задан в нормальной форме, если

$$D\Gamma = 0, \quad (3)$$

где $D = \{H^{(2)}, \cdot\}$. Здесь знак $\{, \}$ обозначает скобки Пуассона. Отметим, что $H^{(2)}$ уже задан в нормальной форме.

Величины I_ν являются декартовыми переменными действия и, следовательно, интегралами движения. Нормальная форма Γ в общем случае задается бесконечным степенным асимптотическим рядом по переменным I_ν , поэтому указанные интегралы движения являются формальными. Зная нормальную форму Биркгофа, легко получить квазиклассический спектр гамильтониана путем подстановки $I_\nu = n_\nu + 1/2$, n_1, n_2 - целые положительные числа:

$$E_{n_1, n_2} = \Gamma\{n_1 + 1/2, n_2 + 1/2\}, \quad (5)$$

поскольку I_ν являются адиабатическими инвариантами.

Если частоты ω_ν гамильтониана (I) соизмеримы, т.е. существуют

резонансные соотношения типа $n\omega_1 + m\omega_2 = 0$, ($n, m \neq 0$), то гамильтониан (I) нельзя привести к нормальной форме Биркгофа из-за появления нулевых знаменателей $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \approx 0$. Поэтому следует отказаться от уничтожения некоторых членов в гамильтониане (I), и тогда нормальная форма усложняется [8], т.е. будет содержать, кроме $I_\nu = \frac{1}{2} (\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2)$, еще и другие комбинации переменных ξ_ν и η_ν .

Для двумерной системы с резонансным условием $\omega_1 + \omega_2 = 0$ эти комбинации таковы: $\xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2$ и $\eta_1\eta_2 + \xi_1\xi_2$. Такую расширенную нормальную форму принято называть формой Биркгофа и Густавсона (Б.Г.).

Наличие дополнительных членов в форме Б.Г. приводит к появлению зависимости гамильтониана от угловых переменных ψ_ν :

$$\Gamma = \Gamma(I_1, I_2, \psi_1). \quad (6)$$

Ее квантование усложняется по сравнению с нерезонансным случаем. Так как одно действие I_1 , по-прежнему, можно заменить на $n_1 + 1/2$, то двумерная исходная задача (6) сводится при заданном значении n_1 к простой одномерной, квантование которой можно выполнить с помощью метода ВКБ. Такой путь предложен в работе [9] на примере системы Хенона-Хейлеса. [10]

Отметим, что в работах [11-14] принципиально улучшен метод получения энергетических спектров и волновых функций с помощью нормальной формы, и проблема квантования сведена к решению задачи на собственные значения для системы линейных уравнений.

2. Нормальная форма в "полярных" переменных

В этом разделе дана модификация процедуры приведения гамильтониана к нормальной форме Б.-Г. Прежде всего сделаем каноническую замену переменных к "полярным" координатам [2, 14, 15]. Для рассматриваемого нами гамильтониана поверхностных коллективных квадрупольных колебаний ядра перейдем к следующим "полярным" переменным:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{i}{2} (-Q_1 + Q_2 + P_1 - P_2) \\ q_2 &= \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2 + P_1 + P_2) \\ p_1 &= \frac{1}{2} (Q_1 - Q_2 + P_1 - P_2) \\ p_2 &= \frac{i}{2} (Q_1 - Q_2 - P_1 - P_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда гамильтониан (I) приобретает вид

ниями группы инвариантности C_{4v} . В приложении I даны матричные элементы гамильтониана коллективных поверхностных колебаний. Приложение 2 содержит матричные элементы гамильтониана H_{4v} в симметризованном осцилляторном базисе.

I. Квантование нормальной формы в декартовых переменных

Вблизи устойчивых критических точек классический гамильтониан можно представить в виде

$$H(\rho, q) = H^{(2)}(\rho, q) + \sum V^{(j)}(q), \quad (1)$$

$$H^{(2)}(\rho, q) = \frac{1}{2} \sum \omega_\nu (\rho_\nu^2 + q_\nu^2),$$

где q и ρ — канонически сопряженные координаты и импульсы: $q = (q_1, q_2)$, $\rho = (\rho_1, \rho_2)$. Потенциальная функция $V^{(j)}(q)$ представляет сумму полиномов типа $q_i^{j_1} q_{i_2}^{j_2}$ степени $j = j_1 + j_2 > 2$.

Если частоты ω_ν гамильтониана (I) несоизмеримы, то существует каноническое преобразование $(q, \rho) \rightarrow (\xi, \eta)$, такое, что гамильтониан в новых переменных $\Gamma(\xi, \eta)$ будет функцией только от следующих комбинаций $I_\nu = \frac{1}{2} (\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2)$, $\nu = 1, 2$.

$$\Gamma(\xi, \eta) = \Gamma(I_1, I_2). \quad (2)$$

По определению, гамильтониан $\Gamma(\xi, \eta)$ задан в нормальной форме, если

$$D\Gamma = 0, \quad (3)$$

где $D \cdot = \{H^{(2)}, \cdot\}$. Здесь знак $\{, \}$ обозначает скобки Пуассона. Отметим, что $H^{(2)}$ уже задан в нормальной форме.

Величины I_ν являются декартовыми переменными действия и, следовательно, интегралами движения. Нормальная форма Γ в общем случае задается бесконечным степенным асимптотическим рядом по переменным I_ν , поэтому указанные интегралы движения являются формальными. Зная нормальную форму Биркгофа, легко получить квазиклассический спектр гамильтониана путем подстановки $I_\nu = n_\nu + 1/2$, n_1, n_2 — целые положительные числа:

$$E_{n_1, n_2} = \Gamma\{n_1 + 1/2, n_2 + 1/2\}, \quad (5)$$

поскольку I_ν являются адиабатическими инвариантами.

Если частоты ω_ν гамильтониана (I) соизмеримы, т.е. существуют

резонансные соотношения типа $n\omega_1 + m\omega_2 = 0$, ($n, m \neq 0$), то гамильтониан (I) нельзя привести к нормальной форме Биркгофа из-за появления нулевых знаменателей $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \approx 0$. Поэтому следует отказаться от уничтожения некоторых членов в гамильтониане (I), и тогда нормальная форма усложняется^{/8/}, т.е. будет содержать, кроме $I_\nu = \frac{1}{2} (\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2)$, еще и другие комбинации переменных ξ и η .

Для двумерной системы с резонансным условием $\omega_1 + \omega_2 = 0$ эти комбинации таковы: $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$ и $\eta_1\eta_2 + \xi_1\xi_2$. Такую расширенную нормальную форму принято называть формой Биркгофа и Густавсона (Б.Г.).

Наличие дополнительных членов в форме Б.Г. приводит к появлению зависимости гамильтониана от угловых переменных φ_ν :

$$\Gamma = \Gamma(I_1, I_2, \varphi_2). \quad (6)$$

Ее квантование усложняется по сравнению с нерезонансным случаем. Так как одно действие I_1 , по-прежнему, можно заменить на $n_1 + 1/2$, то двумерная исходная задача (6) сводится при заданном значении n_1 к простой одномерной, квантование которой можно выполнить с помощью метода ВКБ. Такой путь предложен в работе^{/9/} на примере системы Хенона-Хейлеса.^{/10/}

Отметим, что в работах^{/11-14/} принципиально улучшен метод получения энергетических спектров и волновых функций с помощью нормальной формы, и проблема квантования сведена к решению задачи на собственные значения для системы линейных уравнений.

2. Нормальная форма в "полярных" переменных

В этом разделе дана модификация процедуры приведения гамильтониана к нормальной форме Б.-Г. Прежде всего сделаем каноническую замену переменных к "полярным" координатам^{/2,14,15/}. Для рассматриваемого нами гамильтониана поверхностных коллективных квадрупольных колебаний ядра перейдем к следующим "полярным" переменным:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{i}{2} (-Q_1 + Q_2 + P_1 - P_2) \\ q_2 &= \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2 + P_1 + P_2) \\ p_1 &= \frac{1}{2} (Q_1 - Q_2 + P_1 - P_2) \\ p_2 &= \frac{i}{2} (Q_1 - Q_2 - P_1 - P_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда гамильтониан (I) приобретает вид

$$K(Q, P) = K^{(0)}(Q, P) + \sum_{j \geq 2} K^{(j)}(Q, P), \quad (8)$$

где

$$K^{(1)}(Q, P) = i(Q_1 P_1 + Q_2 P_2), \quad (9)$$

и новые канонически сопряженные координаты и импульсы есть $Q = (Q_1, Q_2)$
 $P = (P_1, P_2)$. Отметим, что преобразования (7) являются каноническими в более широком смысле, с валентностью, равной мнимой единице.

Каждый член $K^{(j)}$ гамильтониана (8), представляющий однородный полином по переменным Q и P степени j , приводится к нормальной форме путем выполнения серии канонических преобразований $(Q, P) \rightarrow (\xi, \eta)$ последовательно для $j = 3, \dots, S, \dots$. Для данного члена гамильтониана степени j существует однородный полином $W^{(j)}(Q, \eta)$ той же степени, который генерирует преобразование

$$\xi_\nu = Q_\nu + \frac{\partial W^{(j)}}{\partial \eta_\nu} \quad (10)$$

$$P_\nu = \eta_\nu + \frac{\partial W^{(j)}}{\partial Q_\nu}, \quad \nu = 1, 2$$

такое, что преобразованный гамильтониан

$$\Gamma = \Gamma^{(2)} + \Gamma^{(3)} + \dots + \Gamma^{(j)} + \dots \quad (11)$$

приведен к нормальной форме до степени j включительно.

Пусть гамильтониан $K(Q, P)$ приведен к нормальной форме до степени $j = S-1$, т.е. уже выполнены (5-3) канонических преобразований (10) и исходный гамильтониан K выражен через последние (5-3) переменные, которые для удобства обозначим опять через Q, P . Для приведения члена $K^{(S)}(Q, P)$ к нормальной форме произведем очередное каноническое преобразование (8)

$$K(Q, \eta + \frac{\partial W}{\partial Q}) = \Gamma(Q + \frac{\partial W}{\partial \eta}, \eta), \quad (12)$$

где

$$\Gamma(\xi, \eta) = \Gamma^{(2)}(\xi, \eta) + \Gamma^{(3)}(\xi, \eta) + \dots$$

есть новый гамильтониан, члены которого $\Gamma^{(j)} = K^{(j)}$ заданы в нормальной форме для $j = 2, \dots, (S-1)$. Разлагая (12) в ряд Тейлора вблизи $\eta = P$ и $Q = \xi$ и приравнивая члены одинаковой степени, для S -й степени получаем уравнение

$$K^{(S)} + \frac{\partial K^{(2)}}{\partial \eta} \frac{\partial W^{(S)}}{\partial Q} = \Gamma^{(S)} + \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial Q} \frac{\partial W^{(S)}}{\partial \eta}$$

или, в соответствии с (4):

$$DW^{(S)} = \Gamma^{(S)} - K^{(S)} \quad (13)$$

Из сравнения слагаемых степени $j = S+1, S+2, \dots$ следуют формулы для вычисления членов гамильтониана $\Gamma^{(j)}$ более высоких степеней $j > S$, которые еще не приведены к нормальному виду:

$$\Gamma^{(j)}(\xi, \eta) = K^{(j)}(\xi, \eta) + \sum_k \frac{1}{k!} \left\{ \left(\frac{\partial W^{(S)}}{\partial \xi} \right)^k \left(\frac{\partial^k K^{(2)}}{\partial \eta^k} \right) - \left(\frac{\partial W^{(S)}}{\partial \eta} \right)^k \frac{\partial^k \Gamma^{(2)}}{\partial \xi^k} \right\} \quad (14)$$

Здесь 2-мерный целочисленный вектор $K = (K_1, K_2)$ удовлетворяет условиям

$$\ell - |K| + |K|(S-1) = j, \quad 1 \leq |K| \leq \ell < j, \quad \ell \geq 2, S \geq 3$$

и введены обозначения $K! = K_1! K_2!$ и $|K| = K_1 + K_2$.

Решение уравнения (13) относительно двух неизвестных величин $\Gamma^{(S)}$ и $W^{(S)}$ осуществляем, следуя [8]. Известный член гамильтониана $K^{(S)}$ однозначно представим в виде суммы двух полиномов той же степени

$$K^{(S)} = N^{(S)} + R^{(S)}, \quad (15)$$

таких, что $DN^{(S)} = 0$ и $DR^{(S)} \neq 0$. Если полином $\Gamma^{(S)}$ равен $N^{(S)}$, то для другой неизвестной величины $W^{(S)}$ имеем уравнение $DW^{(S)} = R^{(S)}$. Оно сводится к алгебраическому, поскольку оператор D является диагональным в "полярных" переменных, и любой моном $\tau = Q_1^{\ell_1} Q_2^{\ell_2} \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2}$, $\ell_1 + \ell_2 + m_1 + m_2 = S$ будет собственным вектором. Выбор $\Gamma^{(S)} = N^{(S)}$ обеспечивает приводимость $\Gamma^{(S)}$ к нормальной форме согласно определению (3). Далее, зная $\Gamma^{(S)}$ и $W^{(S)}$ вычисляем последующие "ненормальные" члены $j > S$ преобразованного гамильтониана $\Gamma(\xi, \eta)$, повторяя описанные выше этапы приведения к нормальной форме до заданного приближения.

В связи с большим объемом вычислений применялись системы аналитических подстановок типа REDUCE.

3. Квантование модифицированной нормальной формы

Классическая нормальная форма (II) представляет сумму полиномов по P и Q . Для получения ее квантового аналога естественно использовать эвристическое правило соответствия Вейля:

$$P^n Q^m = Q^m P^n \rightarrow \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \hat{P}^\ell \hat{Q}^m \hat{P}^{n-\ell} \quad (16)$$

Входящие в соотношение (16) операторы \hat{P} и \hat{Q} определяются по формулам (7), в которых p и q теперь обозначают квантовомеханические декартовы операторы импульса и координаты с правилами коммутации $[\hat{q}_\kappa, \hat{p}_\kappa] = i\delta_{\kappa\ell}$, из которых следуют коммутационные соотношения для "полярных" операторов $[\hat{P}_\kappa, \hat{Q}_\ell] = \delta_{\kappa\ell}$, ($\kappa, \ell = 1, 2$). Из требования самосопряженности гамильтониана квантовой системы примем дираковское правило соответствия

$$\Gamma \rightarrow \frac{1}{i} \Gamma. \quad (17)$$

Энергетический спектр и волновые функции квантовой нормальной формы определяются из уравнения Шредингера

$$\hat{H} |E\rangle = E |E\rangle. \quad (18)$$

Операторы \hat{Q} и \hat{P} , соответствующие классическому соотношению (7), порождают осцилляционный базис

$$|NL\rangle = \left(\left(\frac{N+L}{2} \right)! \left(\frac{N-L}{2} \right)! \right)^{-1/2} \hat{Q}_2^{N-L/2} \hat{Q}_1^{N+L/2} |0\rangle, \quad (19)$$

где вакуумное состояние $|0\rangle$ определяется

$$\hat{P}_1 |0\rangle = \hat{P}_2 |0\rangle = 0, \quad (20)$$

$N = 0, 1, 2, 3, \dots$, $L = \pm N, \pm (N-2), \dots$ ± 1 или 0 .

Отметим, что модифицированная нормальная форма выражается через полную энергию и момент импульса, которые после квантования характеризуются главным и орбитальным квантовыми числами.

Используя определения (19), (20) и (7), находим действия операторов $\hat{Q} = (\hat{Q}_1, \hat{Q}_2)$ и $\hat{P} = (\hat{P}_1, \hat{P}_2)$ на базис $|NL\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1 |NL\rangle &= \sqrt{\frac{N+L+2}{2}} |N+1, L+1\rangle \\ \hat{Q}_2 |NL\rangle &= \sqrt{\frac{N-L+2}{2}} |N+1, L-1\rangle \\ \hat{P}_1 |NL\rangle &= \left(\frac{N+L}{2} \right)^{1/2} |N-1, L-1\rangle \\ \hat{P}_2 |NL\rangle &= \left(\frac{N-L}{2} \right)^{1/2} |N-1, L+1\rangle, \end{aligned} \quad (21)$$

причем

$$\hat{K}^{(2)} |NL\rangle = (N+1) |NL\rangle, \quad (22)$$

где $\hat{K}^{(2)} = \hat{Q}_1 \hat{P}_1 + \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 1$.

Отметим, что для гамильтониана инвариантных относительно группы C_{3v} , к которым относятся известный гамильтониан Хенона-Хейлеса и гамильтониан коллективных квадрупольных колебаний поверхности ядра, состояния $|NL\rangle$ будут собственными в 4-м приближении. Это обстоятельство позволяет получить для них простые аналитические формулы для энергетических спектров.

4. Гамильтониан коллективных квадрупольных колебаний ядра

В системе координат, оси которой совпадают с главными осями ядра, поверхность ядра и декартовых переменных x_i ($i = 1, 2, 3$) имеет вид

$$R(x, t) = R_0 \left(1 + \frac{1}{r^2} \sum d_{ik} x_i x_k \right). \quad (23)$$

Матрица $\{d_{ik}\}$ диагональна и ее след $Sp d = 0$ (что исключает движение центра тяжести ядра). Независимые элементы матрицы d играют роль коллективных переменных, характеризующих отклонения формы ядра от сферической поверхности.

Согласно теореме Гамильтона-Кэли, все степени матрицы d выражаются через d^2 , d , I , поэтому потенциальная функция коллективных квадрупольных колебаний, инвариантная относительно вращений в пространстве коллективных переменных, будет зависеть только от двух величин $Sp d^2$ и $Sp d^3$. Вместо декартовых коллективных переменных d используем сферические $d_0 = q_2$, $d_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} q_1$, тогда (23) примет вид

$$R(\theta, \varphi, t) = R_0 \left\{ 1 + q_2 Y_{2,0}(\theta, \varphi) + \frac{q_1}{\sqrt{2}} [Y_{2,2}(\theta, \varphi) + Y_{2,-2}(\theta, \varphi)] \right\}. \quad (24)$$

В переменных q_1 , q_2 имеем $Sp d^2 \sim (q_1^2 + q_2^2)$ и $Sp d^3 \sim q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3$ и, следовательно, поверхность потенциальной энергии квадрупольных колебаний ядра можно представить в виде

$$V(q_1, q_2) = \sum C_{mn} (q_1^2 + q_2^2)^n (q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3)^m. \quad (25)$$

Отметим, что C_{3v} -инвариантность потенциальной функции V становится очевидной в полярных координатах $q_1 = \beta \cos \gamma$, $q_2 = \beta \sin \gamma$.

Для конкретности ограничимся изучением следующего гамильтониана:

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + b (q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3) + c (q_1^2 + q_2^2)^2, \quad (26)$$

причем его параметры удовлетворяют условию $0 < b^2/c < 16$, которое обеспечивает существование одного локального минимума на поверхности потенциальной энергии

Для численного решения уравнения Шредингера с гамильтонианом (26)

$$H |E\rangle = E |E\rangle \quad (27)$$

вектор состояния $|E\rangle$ будем искать в виде разложения по базису, который определяется соотношением ^{12/}

$$|NLj\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |NL\rangle + j |N, -L\rangle \} \quad j = \pm 1, L \geq 0 \quad (28)$$

и условием ортонормировки

$$\langle N'L'j' | NLj \rangle = \delta_{jj'} \delta_{NN'} \delta_{LL'} \quad (29)$$

где векторы $|NL\rangle$ заданы выражением (19). Отметим, что при $j = -1$ имеем только состояние с $L \neq 0$.

Для вычисления матричных элементов гамильтониана (26) удобно ввести операторы B и B^+

$$B = \hat{P}_1 + \hat{Q}_2, \quad B^+ = \hat{P}_2 + \hat{Q}_1. \quad (30)$$

Тогда

$$q_1 = \frac{i}{2} (B - B^+), \quad q_2 = \frac{1}{2} (B + B^+), \quad (31)$$

и гамильтониан (26) запишется в виде

$$H = (\hat{Q}_1 \hat{P}_1 + \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 1) - \frac{b}{6} (B^3 + B^{+3}) + C (B B^+)^2. \quad (32)$$

В силу соотношения (22) имеем

$$(\hat{Q}_1 \hat{P}_1 + \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 1) |NLj\rangle = (N+1) |NLj\rangle. \quad (33)$$

Матричные элементы гамильтониана (26) можно представить в виде

$$\langle N'L'j' | H | NLj \rangle = \alpha \delta_{L,0} \delta_{jj'} [(N+1) \delta_{N'N} \delta_{L'L} - \quad (34)$$

$$- \frac{b}{6} \sum_{\ell k} d_{\ell k}(N, S, L) \delta_{N', N+2k} \delta_{L', L-3\ell} + C \sum_{\ell m} \beta_{\ell m}(N, L) \delta_{N', N+\ell m} \delta_{L'L}],$$

где индексы сумм пробегает значения $\ell = \pm 1, 3, S = \pm 1, m = 0, 2, 4$, а явный вид коэффициентов $d_{\ell k}(N, \pm L)$ и $\beta_{\ell m}(N, L)$ приведен в Приложении I.

Из выражения (34) следует, что полная матрица $\langle N'L'j' | H | NLj \rangle$ является блочной и распадается на четыре подматрицы, которые характеризуются следующими квантовыми числами: 1) $j = 1$ и $L = 3k, k = 0, 1, 2, \dots$ (состояния типа A_1); 2) $j = -1$ и $L = 3k, k = 1, 2, 3, \dots$ (состояния типа A_2 , среди которых нет состояний с $L = 0$); 3) и 4) $j = \pm 1$ и $L \neq 3k, k = 0, 1, 2, 3, \dots$ (состояния типа E, дважды вырожденные по знаку L). Полученные подматрицы реализуют все три неприводимые представления дискретной группы C_{3v} . Блочность матрицы позволяет значительно сократить машинные ресурсы при диагонализации и, кроме того, выделить три последовательности энергетических уровней одинаковой внутренней природы, что существенно при анализе спектра. Заметим, что представленная техника вычислений позволяет последовательно учесть более высокие степени гамильтониана (26), так как его любой член однозначно определяется через два инварианта $Sp \alpha^2, Sp \alpha^3$.

5. Квазиклассическая формула для энергетического спектра в четвертом приближении

Модифицированная нормальная форма гамильтониана (26) до 4-й степени, полученная согласно изложенной в разд. 2 процедуре, имеет вид

$$\Gamma = i \left\{ (Q_1 \hat{P}_1 + Q_2 \hat{P}_2) + \frac{b^2}{6} (\hat{P}_1^2 Q_1^2 + \hat{P}_2^2 Q_2^2 - 12 Q_1 Q_2 \hat{P}_1 \hat{P}_2) + \right. \quad (35)$$

$$\left. + c (\hat{P}_1^2 Q_1^2 + \hat{P}_2^2 Q_2^2 + 4 Q_1 Q_2 \hat{P}_1 \hat{P}_2) \right\}$$

Квантовая нормальная форма, восстановленная из классической согласно соотношениям (16) и (17), определяется соотношением

$$\hat{\Gamma} = (\hat{Q}_1 \hat{P}_1 + \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 1) + \frac{b^2}{6} [(\hat{Q}_1 \hat{P}_1)^2 + (\hat{Q}_2 \hat{P}_2)^2 - 5 \hat{Q}_1 \hat{P}_1 - 5 \hat{Q}_2 \hat{P}_2 - 12 \hat{Q}_1 \hat{P}_1 \hat{Q}_2 \hat{P}_2 - 2] + \quad (36)$$

$$+ c [(\hat{Q}_1 \hat{P}_1)^2 + (\hat{Q}_2 \hat{P}_2)^2 + 3 \hat{Q}_1 \hat{P}_1 + 3 \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 4 \hat{Q}_1 \hat{P}_1 \hat{Q}_2 \hat{P}_2 + 2].$$

Базисные векторы $|NL\rangle$ (19), как отмечалось, являются собственными для квантовой нормальной формы (36). Поэтому для энергетического спектра в 4-м приближении получается простая аналитическая формула

$$E(N, L) = N + 1 + \frac{b^2}{12} [7L^2 - 5(N+1)^2 + 1] + \frac{c}{2} [3(N+1)^2 - L^2 + 1]. \quad (37)$$

Однако в (37) каждый уровень дважды вырожден по знаку орбитального квантового числа L , тогда как для уровней истинного гамильтониана (26) с $L = 3k$ ($k = 1, 2, \dots$) вырождение должно сниматься. Включение последующих членов нормальной формы приводит к снятию вырождения для уровней с орбитальным квантовым числом, кратным 3. Действительно, 6-я степень нормальной формы гамильтониана (26) равна

$$\Gamma^{(6)} = \left(\frac{11}{54} b^4 + \frac{10}{9} b^2 c + 2c^2 \right) (\hat{P}_1^3 Q_1^3 + \hat{P}_2^3 Q_2^3) + \quad (38)$$

$$+ \left(\frac{5}{12} b^4 - \frac{61}{3} b^2 c + 15 c^2 \right) \hat{P}_1 \hat{P}_2 Q_1 Q_2 (\hat{P}_1 Q_1 + \hat{P}_2 Q_2)$$

$$+ \frac{2}{9} b^2 (7b^2 - 26c) (\hat{P}_1^3 Q_2^3 + \hat{P}_2^3 Q_1^3).$$

Третье слагаемое в выражении (38) связывает состояния с равными N и с $L' - L = \pm 6$, но при этом базисные векторы (19) уже не будут собст-

венными векторами гамильтониана. Поэтому приходится проводить дополнительно либо диагонализацию среди зацепляющихся состояний, либо расчеты по теории возмущений для вычисления энергетических спектров^{/13/}. Полагая в формуле (37) параметр $c=0$, имеем выражение для спектра гамильтониана Хенона-Хейлеса, которое совпадает с формулой, полученной другими методами^{/2,14/}, с точностью до постоянного сдвига. (Последнее, по-видимому, связано с неоднозначностью выбора способа квантования гамильтониана).

6. Результаты расчета и выводы

В таблице сравниваются энергетические уровни $E_{\text{квази}}$, вычисленные по формуле (37), с соответствующими величинами $E_{\text{квант}}$ квантового гамильтониана (34). Размерности A_1, A_2, E типа подматриц равны, соответственно, 560, 560, 495 и обеспечивают необходимую точность вычислений для первых 250-300 уровней. Параметры гамильтониана (26), для которого возможны как регулярный, так и хаотический режимы движения^{/19/}, выбраны так, чтобы энергия перехода от регулярного движения к хаотическому была порядка $E_{\text{кр}}=90$. Как видно из таблицы, квазиклассическая формула (37) воспроизводит соответствующий спектр (34) с относительной погрешностью $\sim 0,09\%$ в области энергий, где классическое движение регулярно.

Другим показателем точности, чем ϵ , является разность $\Delta E = (E_{\text{квант}} - E_{\text{квази}})$ по сравнению с $E_{\text{квант}} - E_{\text{квази}}$ (рис.1). Отклонение значений энергии, рассчитанных по формуле (37), от точных значений, составляет величину порядка процента от среднего расстояния между соседними уровнями.

На рис.2 представлена разность между квантовомеханическими уровнями энергии и вычисленными по формуле (29) для гамильтонианов квадратных колебаний (а) и Хенона-Хейлеса (б).

Квазиклассическое приближение, как видно из рис.2, в области энергий, где классическое движение регулярное ($E < E_{\text{кр}}$), хорошо воспроизводит квантовый спектр. При переходе в хаотическую область ($E > E_{\text{кр}}$) различие быстро нарастает. Это дает основание считать, что применение квазиклассического метода типа Б.-Г. для получения спектров в такой энергетической области не обосновано.

Анализ формулы (37) как функции, зависящей от двух переменных L, N , показывает также, что энергия $E(N, L)$ не является монотонно возрастающей функцией N (при фиксированной L) для $W = \frac{E^2}{c} \gg 4$ и является таковой при $W \lesssim 4$. Условие $W \approx 4$, по-видимому, дает верхнюю границу применимости формулы (37), поскольку, согласно^{/19/},

ТАБЛИЦА. Энергетические уровни гамильтониана (26),

($v=0,04416$; $c=0,00015$; $E_{\text{кр}}=90$).

	N	L	$E_{\text{квази}}$	$E_{\text{квант}}$	Тип	Точность, $\epsilon, \%$
I.	0	0	0,9996	1,0001	A_1	0,043
2.	1	1	1,9989	1,9994	E	0,022
3.	2	0	2,9949	2,9954	A_1	0,015
4.	2	2	2,9992	2,9996	E	0,014
5.	3	1	3,9919	3,9924	E	0,012
6.	3	3	4,0004	4,0008	A_1	0,010
				4,0008	A_2	0,010
7.	4	0	4,9855	4,9861	A_1	0,010
8.	4	2	4,9898	4,9903	E	0,010
9.	4	4	5,0025	5,0059	E	0,007
10.	5	1	5,9801	5,9807	E	0,010
11.	5	3	5,9886	5,9890	A_1	0,006
				5,9892	A_2	0,010
12.	5	5	6,0056	6,0060	E	0,005
13.	6	0	6,9714	6,9721	A_1	0,010
14.	6	2	6,9757	6,9763	E	0,009
15.	6	4	6,9884	6,9889	E	0,007
16.	6	6	7,0097	7,0099	A_1	0,003
				7,0099	A_2	0,003
17.	7	1	7,9637	7,9645	E	0,010
18.	7	3	7,9722	7,9726	A_1	0,005
				7,9731	A_2	0,011
19.	7	5	7,9892	7,9896	E	0,005
20.	7	7	8,0147	8,0148	E	0,001

I30.	2I	I7	22,0229	22,0186	E	-0,020
I31.	2I	19	22,0994	22,0926	E	-0,03I
I32.	2I	2I	22,1844	22,175I	A _I	-0,042
				22,175I	A ₂	-0,042
I33.	22	0	22,6894	22,6967	A _I	0,032
I34.	22	2	22,6937	22,6995	E	0,026
I35.	22	4	22,7064	22,7173	E	0,048
I36.	22	6	22,7277	22,7349	A ₂	0,032
				22,7370	A _I	0,04I
I37.	22	8	22,7574	22,7639	E	0,029
I38.	22	IO	22,7957	22,8003	E	0,020
I39.	22	I2	22,8424	22,8448	A _I	0,0II
				22,8448	A ₂	0,0II
I40.	22	I4	22,8977	22,8977	E	0
I4I.	22	I6	22,96I4	22,9588	E	-0,0II
I42.	22	I8	23,0337	23,0284	A _I	-0,023
				23,0284	A ₂	-0,023
I43.	22	20	23,II44	23,IO64	E	-0,035
I44.	22	22	23,2037	23,I929	E	-0,046
I45.	23	I	23,6629	23,6704	E	0,032
I46.	23	3	23,67I4	23,6735	A _I	0,009
				23,688I	A ₂	0,07I
I47.	23	5	23,6883	23,699I	E	0,045
I48.	23	7	23,7I39	23,7226	E	0,037
I49.	23	9	23,7479	23,7545	A _I	0,028
				23,7546	A ₂	0,028
I50.	23	II	23,7904	23,7949	E	0,0I9
.....						
230.	29	9	29,5575	29,5734	A _I	0,054
				29,5744	A ₂	0,057
23I.	29	II	29,6000	29,6I3I	E	0,044

232.	29	I3	29,65IO	29,6606	E	0,032
233.	29	I5	29,7IO5	29,7I63	A _I	0,0I9
				29,7I63	A ₂	0,0I9
234.	29	I7	29,7785	29,7802	E	0,006
235.	29	I9	29,8550	29,8524	E	-0,009
236.	29	2I	29,9400	29,9329	A _I	-0,024
				29,9329	A ₂	-0,024
237.	29	23	30,0335	30,02I9	E	-0,039
238.	29	25	30,I355	30,II93	E	-0,054
239.	29	27	30,2460	30,2255	A _I	-0,068
				30,2255	A ₂	-0,068
240.	29	29	30,3650	30,3404	E	-0,08I
24I.	30	0	30,4356	30,447I	A _I	0,038
242.	30	2	30,4398	30,4480	E	0,027
243.	30	4	30,4526	30,48II	E	0,093
244.	30	6	30,4738	30,49I8	A ₂	0,059
				30,5027	A _I	0,094
245.	30	8	30,5036	30,524I	E	0,067
246.	30	IO	30,54I8	30,5587	E	0,055
247.	30	I2	30,5886	30,60I8	A ₂	0,043
				30,60I9	A _I	0,043
248.	30	I4	30,6439	30,6532	E	0,03I
249.	30	I6	30,7076	30,7I28	E	0,0I7
250.	30	I8	30,7799	30,7806	A _I	0,003
				30,7806	A ₂	0,003

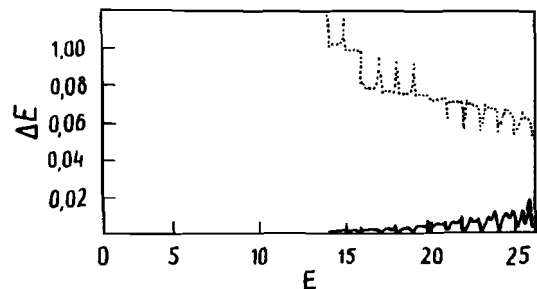


Рис.1. Разность ΔE между квантовомеханическими и квазиклассическими величинами энергий (сплошная) по сравнению со значениями расстояний между соседними уровнями (пунктирная) для гамильтониана (26) для тех же значений параметров, что и в таблице.

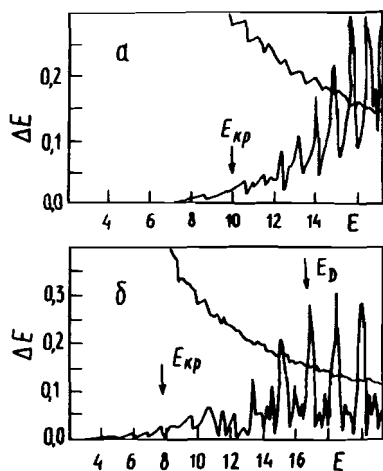


Рис.2. Разность ΔE между квантовомеханическими уровнями энергии и квазиклассическими (37) для гамильтониана (26) со следующими значениями параметров: а) $\nu = 0,12347$; $c = 0,00135$; $E_{кр} = 10$; в) $\nu = 0,1$; $c = 0$; $E_{кр} = 8,3$; $E_D = 16,7$. (Верхние линии - значения расстояний между соседними уровнями энергии).

оно отвечает появлению классического хаоса, тогда как при $W < 4$ классический гамильтониан (37) имеет регулярное движение. Таким образом, квантование гамильтонианов для динамических систем, интегрируемых в классическом пределе методом формы Б.-Г., дает неплохие результаты для спектров квантовых систем.

7. Стохастические свойства $C_{4\nu}$ -инвариантного гамильтониана

А. Данный раздел посвящен изучению регулярного и хаотического режимов в квантовом и классическом случаях для гамильтониана

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + U(x, y; b, c)$$

$$U(x, y; b, c) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + b x^2 y^2 + \frac{c}{4} (x^2 + y^2)^2 \quad (39)$$

При $c=0$ гамильтониан (39) соответствует классическому пределу квантово-волевой теории Янга-Миллса^{20,24}. Важные корреляции между особенностями классической динамики и структурой квантового энергетического спектра могут быть получены при исследовании статистических свойств последовательности уровней. Как показывают численные расчеты²²⁻²⁴ и теоретические соображения²⁵⁻²⁷, для хаотических в классическом пределе систем феномен расталкивания уровней является универсальным свойством. Это означает, что функция распределения расстояний между соседними уровнями стремится к нулю при стремлении к нулю расстояний между уровнями. В то же время для систем, чья динамика в классическом пределе регулярна, характерна кластеризация (статистическая тенденция к сближению) уровней. Эту гипотезу иногда²² называют гипотезой об универсальном характере флуктуаций энергетических спектров.

Среди систем, чьи спектры были подвергнуты детальному численному анализу, центральное место занимают двумерные билиарды как интегрируемые (круговой билиард), так и неинтегрируемые (билиард Синая, билиард типа стадион). В полном соответствии с гипотезой об универсальном характере флуктуаций энергетических спектров функция распределения для интегрируемой системы - кругового билиарда - прекрасно аппроксимируется пуассоновским распределением:

$$\rho(x) = e^{-x} \quad x = \frac{E_{i+1} - E_i}{D}, \quad D = \int x \rho(x) dx, \quad (40)$$

а дисперсия является линейной функцией длины рассматриваемого энергетического интервала. В неинтегрируемом случае наблюдается эффект расталкивания уровней (распределение Вигнера)

$$\rho(x) = \frac{\pi x}{2} e^{-\pi x^2/4} \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad (41)$$

и медленный рост дисперсии, обусловленный жесткостью соответствующего спектра. Все статистические характеристики спектра в этом случае практически совпадают с характеристиками гауссова ортогонального ансамбля случайных матриц.

В отличие от бильярдов, где характер движения не зависит от энергии, гамильтоновы системы общего положения являются системами с разделяющимся фазовым пространством, которое содержит как области, в которых движение является хаотическим, так и островки устойчивости. Относительная доля каждой компоненты зависит от энергии. Как это обстоятельство отражается на статистических свойствах спектра? В^{27,28/} с использованием квазиклассических аргументов показано, что распределение расстояний между соседними уровнями представляет для такой системы независимую суперпозицию пуассоновского распределения с относительным весом μ , определяемым долей фазового пространства с регулярным движением и распределения Вигнера с относительным весом $\bar{\mu} = 1 - \mu$, определяемым долей фазового пространства с хаотическим движением

$$P(x) = \mu^2 e^{-\mu x} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{2} x\right) + (2\mu\bar{\mu} + \frac{\pi}{2} \bar{\mu}^3 x) e^{-\mu x - \frac{\pi}{4} \bar{\mu}^2 x^2},$$

$$(\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty dt e^{-t^2}). \quad (42)$$

Для интерполяции перехода от пуассоновского ($\mu = 1$) к вигнеровскому распределению был предложен и ряд других формул. Как показывают многочисленные расчеты функции распределения расстояний между соседними уровнями целого ряда как модельных, так и реальных физических систем, в предельных случаях ($\mu = 1, \bar{\mu} = 1$) хорошо аппроксимируются либо пуассоновским, либо вигнеровским распределениями, а переходная область достаточно хорошо воспроизводится интерполяционными формулами. Аналогичные результаты получены и для спектров квазиэнергий одномерных гамильтоновых систем под действием периодического возмущения^{29/}.

Б. Гамильтониан (39) обладает симметрией дискретной группы C_{4v} , состоящей из поворотов на 90° и отражений. Потенциальная функция, обладающая такой симметрией, выражается только через комбинации $x^2 y^2$ и $x^2 + y^2$, инвариантные относительно C_{4v} -преобразований. Если

$$c > 0, \quad b > -c, \quad (43)$$

то движение является финитным при любых энергиях. В этой области параметров поверхность потенциальной энергии (ППЭ) обладает единственным минимумом при $x = y = 0$. Как известно^{31,32/}, в этом случае

для определения критической энергии перехода от регулярного движения к хаотическому можно воспользоваться критерием отрицательной кривизны, опирающимся на следующий сценарий возникновения хаоса в строго детерминированной системе. При низких энергиях движение вблизи минимумов потенциальной энергии, где гауссова кривизна ППЭ заведомо положительна, носит периодический или квазипериодический характер и отделено от области неустойчивости линией нулевой кривизны. При повышении энергии частица некоторое время будет проводить в области отрицательной кривизны ППЭ, где первоначально близкие траектории экспоненциально разбегаются, что в конечном счете на больших временах приводит к такому движению, которое имитирует случайное. Согласно такому сценарию перехода к хаосу критическая энергия совпадает с минимальной энергией на линии нулевой кривизны:

$$E_{cr} = U_{\min}(K=0); \quad K = \frac{U''_{xx} U''_{yy} - U''_{xy}{}^2}{(U''_{xx} + U''_{yy})^2}. \quad (44)$$

В пространстве параметров, изображенном на рис.3, в секторах II и III гауссова кривизна ППЭ положительна, в то время как в секторах I и IV имеются как области положительной кривизны (при низких энергиях), так и отрицательной гауссовой кривизны (см.рис.4). Заметим, что границей области с положительной гауссовой кривизной являются прямые $b = c$ и $b = -c/2$, на которых (как и на прямой $b = 0$) гамильтониан (39) является интегрируемым. Действительно, дополнительные интегралы движения в этих случаях имеют вид^{33/}

$$I = x p_y - y p_x \quad (b = 0, \quad b = -c/2)$$

$$I = p_x p_y + xy + 4xy(x^2 + y^2) \quad (b = c). \quad (45)$$

Так как при повороте координатных осей на $\pi/4$ и одновременном преобразовании параметров

$$b' = c + b$$

$$c' = c - b \quad (46)$$

потенциал $U(x, y; b, c)$ не изменяется, то области I и IV, II и III физически эквивалентны. Критическая энергия перехода к хаосу для семейства потенциалов из сектора I, определяемая, согласно (44), как минимальная энергия на линии нулевой гауссовой кривизны ППЭ, равна

$$E_{cr} = U_{\min}(K=0) = \frac{3b - c}{4(b - c)^2}. \quad (47)$$

Это значение критической энергии хорошо согласуется с найденным по критерию перекрытия резонансов^{30/} и подтверждается анализом сечений

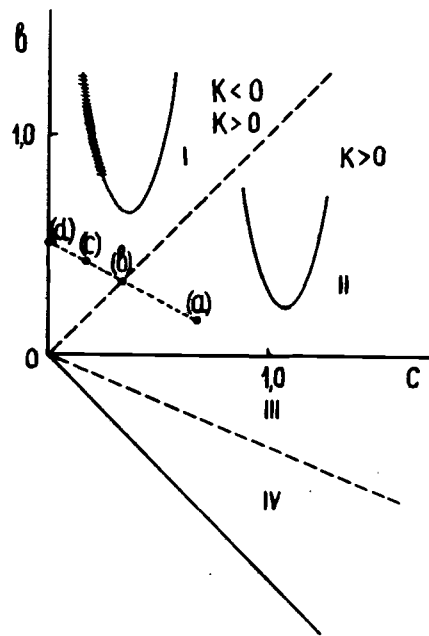


Рис.3. Профили потенциальной функции $U(x, y=0; v, c)$ в пространстве параметров (v, c) . Штрихи обозначают, что ПЭЗ(I) имеет области отрицательной кривизны. Буквы a, b, c и d в кружках указывают, соответственно, точки в пространстве параметров $(v = \frac{1}{6}, c = \frac{1}{3})$, $(v = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3})$, $(v = \frac{5}{12}, c = \frac{1}{6})$ и $(v = \frac{1}{2}, c = 0)$, в которых производились численные расчеты сечений Пуанкаре и статистические характеристики квантовых спектров гамильтониана (39).

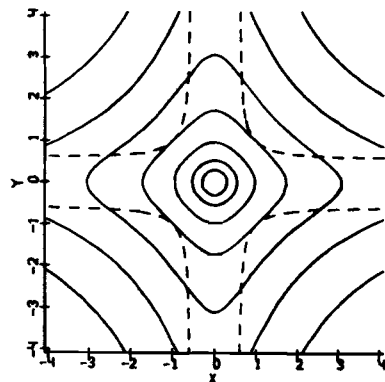


Рис.4. Изолинии ПЭЗ(I) при значениях параметров (v, c) из сектора I рис.3. В точке $x=y=0$ функция $U(x, y; v, c)$ имеет минимум, штрихами показаны линии нулевой гауссовой кривизны.

Пуанкаре, построенных с помощью численного решения уравнений движения. В секторе II, где отрицательная кривизна, являющаяся источником локальной неустойчивости, отсутствует, в сечениях Пуанкаре при сколь угодно высоких энергиях, доступных численному эксперименту, наблюдается регулярное движение.

В. Перейдем теперь к исследованию статистических свойств спектра гамильтониана (39). Для этого при фиксированном наборе параметров необходимо решить уравнение Шредингера

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle. \quad (48)$$

Волновую функцию $|\psi\rangle$ будем искать в виде разложения по базису $|N, L, j\rangle$ полного гильбертова пространства $\mathcal{H} \sim L^2$:

$$|\psi\rangle = \sum C_{N, L, j} |N, L, j\rangle, \quad (49)$$

где

$$|N, L, j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|N, L\rangle + j|N, -L\rangle) \\ j = \pm 1; \quad N = 0, 1, \dots; \quad L = N, N-2, N-4, \dots \quad (50)$$

$|N, L\rangle$ - набор собственных функций двумерного вырожденного осциллятора. Задача нахождения спектра теперь сводится к диагонализации матрицы $\langle N', L', j' | H | N, L, j \rangle$ (см. Приложение 2). C_{4v} - симметрия гамильтониана приводит к тому, что эта матрица имеет блочную структуру. Каждый из пяти независимых блоков действует в одном из подпространств \mathcal{H}_i :

$$\begin{aligned} \text{Mod}(L, 4) = 0, \quad j = +1, \\ \text{Mod}(L, 4) = 0, \quad j = -1, \\ \text{Mod}(L, 4) = 1, \quad j = \pm 1, \\ \text{Mod}(L, 4) = 2, \quad j = \pm 1, \\ \text{Mod}(L, 4) = 3, \quad j = \pm 1, \end{aligned} \quad (51)$$

так что $\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_i$.

Таким образом, учет симметрии гамильтониана сводит задачу диагонализации матрицы большой размерности к независимой диагонализации пяти матриц меньшей размерности. Это позволяет существенно увеличить число базисных состояний в разложении (49) и тем самым улучшить достоверность статистических результатов. Эта возможность особенно важна, поскольку число уровней, вычисляемых с требуемой точностью 1% от среднего расстояния между уровнями, растет медленнее, чем число состояний "обрезанного" базиса.

Кроме улучшения статистики, учет симметрии гамильтониана (39) имеет принципиальное значение для последующего статистического анализа энергетического спектра, связанного с его локальными свойствами (т.е. отклонением в распределении уровней от средних значений). Функция распределения расстояний между уровнями как локальная характеристика спектра весьма чувствительна к свойствам потенциала. Достаточно, например, в квадратном бильярде слегка изогнуть одну из стенок, чтобы она стала рассеивающей, и классические траектории в таком бильярде становятся стохастическими^{25/}. При этом происходит сильная перестройка функции распределения между уровнями, хотя число состояний изменяется незначительно.

Для изучения статистических свойств спектра необходимо: во-первых, иметь достаточно большое число уровней в интервале, обеспечивающем постоянство среднего расстояния между уровнями; во-вторых, уметь идентифицировать квантовые числа рассматриваемой последовательности уровней. Эффект кластеризации (распределение Пуассона) или эффект расталкивания (распределение Вигнера) могут быть получены только для последовательности состояний каждого из пяти неприводимых подпространств, перечисленных в (5I). Поэтому энергетические спектры, построенные с помощью отдельных блоков $\langle N' L' j' | H_c | N L j \rangle$, соответствуют последовательностям с различными квантовыми числами суперотбора. Следовательно, статистический анализ необходимо проводить для каждой части полного спектра в отдельности. Отметим, что спектр, полученный простым упорядочением по энергии уровней полной матрицы $\langle N' L' j' | H | N L j \rangle$, соответствует перемешанной последовательности, т.е. последовательности, включающей уровни из различных секторов \mathcal{H}_c ; поэтому неудивительно, что функция распределения расстояний между ближайшими уровнями, как показано в^{30/}, не проявляет монотонной зависимости от динамических характеристик системы.

На рис.5 представлены сечения Пуанкаре и статистические характеристики спектра: логарифм функции распределения расстояний между соседними уровнями и дисперсия для четырех наборов параметров, отмеченных на рис.2 буквами a, b, c, d . Исследование спектра проводилось в той же энергетической области и при тех же наборах параметров, что и в работе^{30/}.

Движение, описываемое гамильтонианом (39) для двух первых наборов параметров ($b=1/6, c=2/3$ и $b=1/3, c=1/3$), как уже отмечалось, при всех энергиях является регулярным, что иллюстрируется соответствующими сечениями Пуанкаре. Напомним, что в первом случае мы имеем дело с ШЭ, у которой гауссова кривизна всюду положительна, а во втором случае с точно интегрируемым случаем. Гамильтониан (39) с

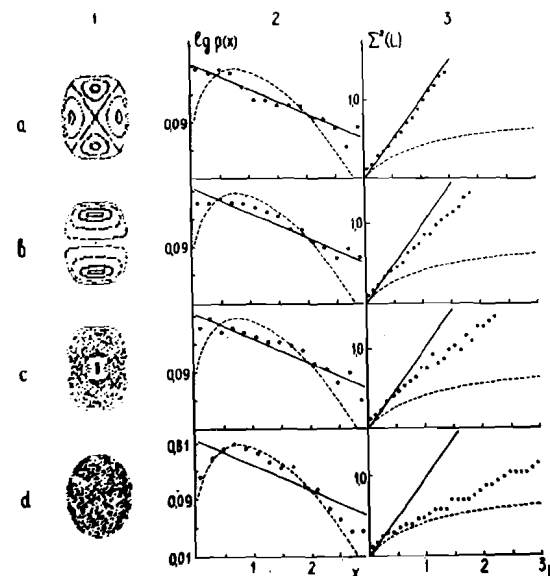


Рис.5. Сечения Пуанкаре (колонка I) для классического гамильтониана (39); логарифмы функций распределения расстояний между соседними уровнями энергии (колонка 2) с соответствующими дисперсиями (колонка 3) для квантового аналога гамильтониана (39). Сплошная прямая линия изображает функцию распределения Пуассона (40), штриховая линия - функцию распределения Вигнера (41). Численные расчеты проводились для параметров ШЭ (39), которые одинаковы в каждой из строк a, b, c и d и соответствуют наборам параметров, отмеченных теми же буквами, но в кружках на рис.3.

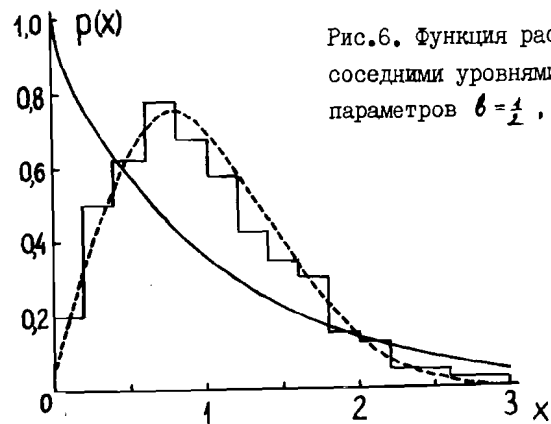


Рис.6. Функция распределения расстояний между соседними уровнями гамильтониана (39) для параметров $b=1/2, c=0$.

параметрами ($b = 5/12$, $c = 1/6$ и $b = 2/3$, $c = 0$), при которых ШЭ имеет области отрицательной гауссовой кривизны при энергиях $E > E_{cr} = U_{min}$ ($K=0$), порождает хаотическое движение, что иллюстрируется сечениями Пуанкаре на рис.5.

На этом рисунке во второй колонке приведены логарифмы функции распределения для указанных выше четырех наборов параметров. Для движения, регулярного в классическом пределе, функция распределения в такой шкале представляет прямую линию (логарифм распределения Пуассона). Во всех четырех случаях как для функции распределения $p(x)$, так и для дисперсии наблюдается хорошее согласие с гипотезой об универсальном характере флуктуаций энергетических спектров. Функции распределения $p(x)$ в виде гистограммы (рис.6) также демонстрируют хорошее согласие со статистической теорией.

Г. Выводы

В последовательностях уровней, отвечающих каждому неприводимому представлению дискретной группы симметрии C_{4v} , прослеживается явная корреляция между характером классического движения и статистическими свойствами спектра. В предельных случаях регулярного или хаотического движения функция распределения между соседними уровнями хорошо аппроксимируется соответствующими универсальными распределениями (пуассоновским или вignerовским). Другими словами, нет необходимости вводить дополнительную характеристику для описания распределения $p(x)$, подобную той, которая была предложена в работе^{/30/}.

Заключительные замечания

Результаты анализа спектров C_{3v} -инвариантных гамильтонианов, полученные методом обобщенной формы Биркгофа-Густавсона, показывают применимость квазиклассических методов для описания спектра в области, где преобладает регулярное классическое движение. В ряде случаев, однако, можно распространить (квази)классические методы для описания квантового спектра и на области с хаотическим классическим движением. Для этой цели в двумерных моделях, описывающих геодезический поток на поверхности отрицательной кривизны, вычисляют спектр длин классических периодических орбит^{/4-5/}, и через него выражают квантовый спектр.

Отметим, что наличие дискретной симметрии динамической системы приводит к редукции фазового пространства. Последнее недавно было продемонстрировано в калибровочных моделях^{/34/}. Это обстоятельство следует учитывать специально в связи со случайным вырождением спектров параметрически зависящих гамильтонианов, так как в этом случае

может иметь место значительное изменение в плотности распределения уровней. Этот факт может быть естественным образом связан с наличием топологической фазы Берри^{/35/} и угла Хани^{/36/} в системах, обладающих симметрией, и будет рассматриваться в последующих работах.

Приложение 1

При вычислении матричных элементов гамильтониана (25) удобно ввести^{/2/} оператор T изменения знака орбитального квантового числа L , то есть $T|N, L\rangle = |N, -L\rangle$. Тогда, вычислив действия операторов B^3 и $(BB^\dagger)^2$ на базисный вектор $|N, L\rangle$ с помощью формул (2I), легко вычислить их действия и на вектор $|N, -L\rangle$, используя соотношения $TB^3 = B^3T$ и $[T, (B^\dagger B)^2] = 0$, так как $B^\dagger B = BB^\dagger$ в силу $TQ_k = Q_k^\dagger T$ и $TQ_k = Q_k^\dagger T$ (k - целое положительное число).

Для коэффициентов $\alpha_{l,k}(N, L)$ и $\beta_{l,m}(N, L)$, входящих в матричные элементы (34), вычисления дают:

$$\alpha_{1,3}(N, L) = \left[\frac{1}{8} (N-L+2)(N-L+4)(N+L-4) \right]^{1/2},$$

$$\alpha_{-1,3}(N, L) = \left[\frac{1}{8} (N+L)(N+L-2)(N+L-4) \right]^{1/2},$$

$$\alpha_{1,1}(N, L) = 3 \left[\frac{1}{8} (N+L)(N-L+2)(N-L+4) \right]^{1/2},$$

$$\alpha_{-1,1}(N, L) = 3 \left[\frac{1}{8} (N+L)(N+L-2)(N-L+2) \right]^{1/2},$$

$$\beta_{l,0}(N, L) = \frac{1}{2} (3N^2 + 6N + 4 - L^2),$$

$$\beta_{1,2}(N, L) = (N+2) [(N+L+2)(N-L+2)]^{1/2},$$

$$\beta_{1,4}(N, L) = \frac{1}{4} [(N+L+2)(N+L+4)(N-L+2)(N-L+4)]^{1/2},$$

$$\beta_{-1,2}(N, L) = N [(N+L)(N-L)]^{1/2},$$

$$\beta_{-1,4}(N, L) = \frac{1}{4} [(N+L)(N+L-2)(N-L)(N-L-2)]^{1/2}.$$

Приложение 2

Ниже приведены матричные элементы гамильтониана (39)

$$\begin{aligned} \langle N'L'j' | H | N'Lj \rangle = & \delta_{jj'} \{ \delta_{N'N} \delta_{L'L} (N'+1) + 2^{1/2} (\delta_{L'L} - \delta_{L,L'}) \} \\ & \left[\frac{2c+b}{8} \delta_{L'L} \left(\delta_{N'N} \frac{1}{2} (3N^2 + 6N - L^2 + 4) + \delta_{N',N+2} (N+2) \sqrt{(N+L+2)(N-L+2)} \right) \right. \\ & + \delta_{N',N+4} \frac{1}{4} \left[(N+L+2)(N+L+4)(N-L+2)(N-L+4) \right]^{1/2} - \\ & - \frac{b}{16} \delta_{L',L-4} \left(\delta_{N',N+4} \frac{1}{4} \sqrt{(N-L+2)(N-L+4)(N-L+6)(N-L+8)} + \right. \\ & + \delta_{N',N+2} \sqrt{(N+L)(N-L+2)(N-L+4)(N-L+6)} + \\ & \left. + \delta_{N',N} \frac{3}{2} \sqrt{(N+L)(N-L-2)(N-L+2)(N-L+4)} \right) - \\ & - \frac{b}{16} \delta_{L',L+4} \left(\delta_{N',N+4} \frac{1}{4} \sqrt{(N+L+2)(N+L+4)(N+L+6)(N+L+8)} + \right. \\ & + \delta_{N',N+2} \sqrt{(N-L)(N+L+2)(N+L+4)(N+L+6)} + \\ & \left. \left. + \delta_{N'N} \frac{3}{2} \sqrt{(N-L)(N-L-2)(N+L+2)(N+L+4)} \right) \right] \}. \end{aligned}$$

Литература

1. Percival I.C. // Adv. Chem. Phys. 1977, v. 36, p. 1.
2. Weissman Y., Jortner J. // J.Chem.Phys. 1982, v.77(3), p. 1469.
3. Robnik M. // J.Phys. A20, 1987, p. 1495.
4. Aurich R., Sieber M., Steiner F. // Preprint DESY 88-055, 1988; Steiner F. // Phys.Lett. 1987, v. B188, p. 447.
5. Heller E.J., O'Connor P.W., Gehlen J.N. // American Inst.Phys. AIP Conf. Proceedings 162 "Few-body systems and multiparticle dynamics", Cristal City V.A 1987. (Ed. D.A.Misha).
6. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. и др. // УФН, 1988, т. 156, вып.2, с.193.
7. Биркгоф Д. Динамические системы. М.: ОГИЗ, 1941.
8. Gustavson F.G. // Astron.J. 1966, v. 71, p. 670.
9. Swimm R.T., Delos J.B. // J.Chem.Phys. 1979, v. 71, p. 1706.
10. Henon M., Heiles C. // Astron.J. 1964, v. 69, p. 73.
11. Jaffe C., Reinhardt W.P. // J.Chem.Phys. 1982, v. 77, p. 5191.
12. Shirts R.B., Reinhardt W.P. // J.Chem.Phys. 1982, v. 77, p. 5204.
13. Robnik M. // J.Phys. A.: Math.Gen. 1984, v. 17, p. 109.
14. User T., Marcus R.A. // J.Chem.Phys. 1984, v. 81, p. 5013.
15. Louck J.D., Shaffer W.H. // J.Mol.Spectrosc. 1960, v. 4, p. 285.
16. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966.
17. Айзенберг И., Грайнер В. Модели ядер. Коллективные и одночастичные явления. М.: Атомиздат, 1975.
18. Mosel U., Greiner W. // Zeitschr.Phys. 1968, v. 217, p. 256.
19. Болотин Д.Л. и др. // М.: ЦНИИатоминформ, 1987, 29с.
20. Матинян С.Г. // ЭЧАЯ, 1985, т.16, вып. 3, стр. 522. (Динамический хаос неабелевых калибровочных полей).
21. Матинян С.Г., Саввиди Г.К., Тер-Арутюнян-Саввиди Н.Г. // Письма в ЭТФ, 1981, т. 34, с. 613.
22. Bohigas O., Giannoni M., Schmit C. // Phys.Rev.Lett. - 1984, v. 52, p.1.
23. Delande D., Gay J. // Phys.Rev.Lett., 1986, v. 57, p. 2006.
24. Seligman T., Verbaarschot J., Zirnbauer M. // Phys.Rev.Lett. 1984, v. 53, p. 215.
25. Заславский Г.М. // Стохастичность динамических систем. - М.: Наука 1984, 269 с.
26. Berry M.V., Tabor M. // Proc.Roy.Soc. - 1977, v. A356, p. 375.
27. Богомольский Е.Б. // Письма в ЭТФ - 1985, т. 41, с. 55.
28. Berry M.V., Robnik M. // J.Phys. A - 1984, v. 17, p. 2413.
29. Feingold M., Fishman S et al. // Phys.Rev.B 1985, v. 31, p. 6852.
30. Воробьев П.А., Заславский Г.М. // ЭТФ, 1987, т. 92, № 5, с. 1564.

31. Toda M. // Phys. Lett. A - 1974, v. 48, p. 335.
 32. Болотин Ю.Л. и др. // Химическая физика. - 1986, т. 5, с. 309.
 33. Lakshamanan M., Sakadevan A. // Phys. Rev. 1985, v. A31, p. 861.
 34. Прохоров К.В. // ЯФ, 1982, т. 32, с. 229;
 Шабанов С.В. // ТМФ, 1988, т. 78, с. 411.
 35. Berry M.V. // Proc. R. Soc. London. 1984, v. A392, p. 45.
 36. Hannay J.A. // J. of Phys. 1985, v. A18, p. 221.

Болотин Ю.Л. и др.
 Проявления стохастичности в спектрах некоторых
 гамильтоновых систем с дискретной симметрией

P4-89-590

Приводится краткий обзор и дается новый вариант квантования классического гамильтониана с C_{3v} дискретной симметрией при помощи нормальной формы Биркгофа-Густавсона. Показано, что использование "полярных" переменных действия - угол упрощает вид нормальной формы и дает простой рецепт ее квантования. Получена приближенная аналитическая формула для спектра гамильтониана, описывающего коллективные квадрупольные поверхностные колебания ядра. Она хорошо воспроизводит квантовый спектр в области энергий с регулярным классическим движением вплоть до границы области с сильно развитым классическим хаосом. Проведено также классическое и квантовое исследование гамильтониана, обладающего C_{4v} -симметрией. Показано существование хаотического движения, когда поверхность потенциальной энергии имеет области отрицательной гауссовой кривизны и регулярность движения, если таких областей нет. Критическая энергия перехода к хаосу хорошо согласуется с эмпирическим наблюдением хаоса с помощью сечений Пуанкаре и в расчетах с помощью других критериев. Выявлена роль симметрии гамильтониана для построения функций распределения энергетических уровней. Эти функции, построенные для последовательности энергетических уровней, соответствующих пяти неприводимым представлениям группы C_{4v} , имеют монотонный характер в соответствии с гипотезой об универсальности флуктуаций энергетических спектров.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Bolotin Yu.L. et al.
 Stochastics and the Spectrum of Hamiltonians
 with Discrete Symmetries

P4-89-590

A new quantization of C_{3v} -invariant classical Hamiltonians using Birkhoff-Gustavson's normal form is proposed. The introduction of the "polar" coordinates in the phase space simplifies the normal form and its quantal analogue. A simple quasiclassical analytic formula for the spectrum of collective quadrupole excitations of nuclei is obtained. This formula is fitting well to the exact level spacing in the energy region where the regular classical motion is prevailing. A C_{4v} -symmetric classical and quantum Hamiltonians are studied too. The presence of chaotic motion in the case of potential function with a negative Gaussian curvature and the regularity of motion for the remaining cases is demonstrated. The critical energy for transition to chaos coincides with that obtained via Poincare sections and other methods. The role of the C_{4v} symmetry in the statistical distributions of the energy levels is discussed and the universality of the spectrum fluctuation laws is re-established.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989

Рукопись поступила в издательский отдел
 8 августа 1989 года.