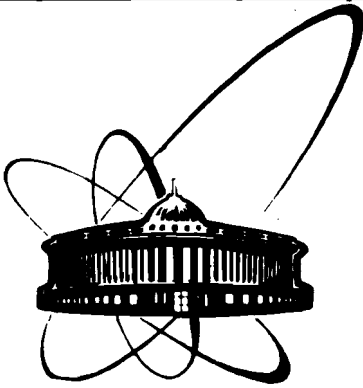


89-562



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Ш 645

P4-89-562

М. И. Широков

ПАРАФЕРМИОПЕРАТОРЫ
В ТЕОРИИ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ

Направлено в "Journal of Physics B"

1989

I. Введение

Рассматривается физическая система, состоящая из N атомов, взаимодействующих с квантованным электромагнитным полем. Предполагается, что межатомные расстояния много больше атомного радиуса. Вместе с тем все атомы заключены в область с линейным размером $l \ll \lambda$, где λ — длины волн рассматриваемых атомных излучений. Это позволяет использовать дипольное или длинноволновое приближение. Атомные электроны считаются нерелятивистскими. Выполняется принцип Паули (в одном атомном состоянии может находиться не более одного электрона), но спин электрона не учитывается.

В такой системе обнаруживаются коллективные эффекты (сверхизлучение, например), которые не сводятся к простой сумме эффектов отдельных атомов системы. Для их изучения использовались разного рода коллективные переменные. Особенно наглядно их польза проявляется в случае осцилляторных атомов, см. далее раздел 2. Но более известным примером являются операторы "коллективного спина" Дикке ^{/1/}. Их можно назвать коллективными переменными, связанными с парой атомных состояний, см. далее раздел 4. Здесь вводится понятие коллективной переменной a_n , связанной с одним состоянием n . a_n обобщает фермионный оператор уничтожения α_n , который используется во вторично-квантованном описании атомных электронов: вектор $\alpha_n^\dagger \Omega$ описывает атомное состояние с энергией E_n . Свойство $(\alpha_n^\dagger)^2 = 0$ запрещает существование атомных состояний с энергией $2E_n$. Соответственно ансамбль N атомов имеет состояния с энергиями $E_n, 2E_n, \dots, NE_n$. Другими словами, он не может содержать более, чем N квантов с энергией E_n . Это свойство можно обеспечить, если искомым коллективным оператором a_n является парафермиоператор Грина, см., например, ^{/2-4/}, потому что он имеет свойство $(a_n)^{N+1} = 0$.

Чтобы определить парафермиоператоры (ПФО) через электронные операторы рождения-уничтожения, в разделе 3 вводится вторично-квантованное описание системы. В разделе 4 гамильтониан системы и законы сохранения выражаются через ПФО. В разделе 5 с помощью ПФО записываются сверхизлучающие состояния и иллюстрируется явление сверхизлучения на примере двухуровневой модели Дикке. Некоторые авторы использовали обычные бозе-операторы рождения-уничтожения в качестве коллективных переменных, играющих ту же роль, какую здесь играют ПФО. Этот подход критически обсуждается в разделе 6. Заключение дано в разделе 7.

2. Коллективные переменные для осцилляторных атомов

N осцилляторных атомов, взаимодействующих с фотонами, описываются гамильтонианом

$$H = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{2m} [\vec{p}_j - e \vec{A}(\vec{q}_j)]^2 + \frac{m\kappa^2}{2} (\vec{q}_j - \vec{R}_j)^2 + H_{ph} \right\} = \frac{1}{2m} \sum_j \vec{p}_j^2 - \frac{e}{m} (\vec{A}(0) \sum_j \vec{p}_j) + \frac{e^2}{2m} N \vec{A}(0)^2 + \frac{m\kappa^2}{2} \sum_j (\vec{q}_j')^2 + H_{ph}. \quad (I)$$

Здесь $\vec{q}_j' \equiv \vec{q}_j - \vec{R}_j$. Во второй строке (I) использовано длинноволновое приближение: $\vec{A}(\vec{q}_j)$ заменены на $\vec{A}(0)$, где 0 есть центр системы N атомов. Второй член во второй строке подсказывает выражение для одной коллективной переменной: $\vec{P}_0 \sim \sum_j \vec{p}_j$. Канонически сопряженным оператором является $\vec{Q}_0 \sim \sum_j \vec{q}_j'$. Остальные коллективные переменные можно выбрать так, чтобы они не взаимодействовали с фотонами. Это может быть сделано с помощью следующего линейного канонического преобразования

$$\vec{P}_s = \sum_{j=1}^N O_{js} \vec{p}_j; \quad \vec{Q}_s = \sum_{j=1}^N O_{js} \vec{q}_j'; \quad s = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2)$$

Элементы O_{j0} первого (соответствующего $s = 0$) столбца матрицы преобразования O выбираются равными $(N)^{-1/2}$ для всех j в согласии с выбранными выше выражениями для \vec{P}_0 и \vec{Q}_0 . Остальные столбцы ($s = 1, \dots, N-1$) подбираются так, чтобы O_{js} были элементами ортогональной матрицы. Тогда суммы квадратов $\sum_j \vec{p}_j^2$ и $\sum_j (\vec{q}_j')^2$ переходят в суммы квадратов $\sum_s \vec{P}_s^2$ и $\sum_s \vec{Q}_s^2$ соответственно, и гамильтониан (I) в терминах P_s и Q_s принимает вид

$$H = \sum_{s=1}^{N-1} \left(\vec{P}_s^2 / 2m + \frac{m\kappa^2}{2} \vec{Q}_s^2 \right) + \vec{P}_0^2 / 2m + \frac{m\kappa^2}{2} \vec{Q}_0^2 - \frac{e\sqrt{N}}{m} (\vec{A}(0) \cdot \vec{P}_0) - \frac{(e\sqrt{N})^2}{2m} \vec{A}(0)^2 + H_{ph}. \quad (3)$$

Вторая строка здесь описывает осцилляторный атом, "электрон" которого взаимодействует с фотонами, имея заряд $e_0 = e\sqrt{N}$. Скорость его высвечивания поэтому в N раз больше скорости высвечивания изолированного атома. Это и есть явление сверхизлучения. Первая строка в (3) описывает набор $N-1$ осцилляторов, которые не поглощают и не испускают фотонов. Сверхизлучающее и неизлучающие состояния можно

разложить с помощью (2) по состояниям отдельных атомов системы, см. /5/. Таким образом, все задачи для системы (испускание, поглощение, рассеяние фотонов) сводятся к задачам одного атома.

Преимущества использования коллективных переменных P_s и Q_s проявляются при сравнении с другими подходами к системе осцилляторных атомов, см. /6/. Например, Агарвал решал систему гейзенберговских уравнений, соответствующих (I) (используя к тому же дополнительные приближения). Их громоздкое решение приводит к результатам, которые с очевидностью следуют из (3), см. /5/, раздел 2.

Однако попытка аналогичного рассмотрения ансамбля неосцилляторных атомов терпит неудачу, и причина этого проста. Осцилляторные уровни эквидистантны, поэтому фотоны одной частоты испускаются во всех переходах. Как отдельный осциллятор системы, так и коллективный сверхизлучающий осциллятор могут поглотить любое число одинаковых фотонов. Между тем атом с неэквидистантными уровнями может поглотить или испустить только один фотон данной частоты. Ансамбль N таких атомов может поглотить или испустить не более, чем N фотонов одной частоты. "Коллективный атом" с гамильтонианом $\vec{P}_0^2/2m + V(\vec{Q}_0)$ при любом $V(\vec{Q}_0)$ не может обладать таким свойством.

В этой работе используется другой подход, см. Введение. Для введения парафермиоператоров мне потребуется вторично-квантованное представление гамильтониана системы.

3. Электронные операторы рождения-уничтожения с аномальными коммутационными соотношениями

Во вторично-квантованном представлении нерелятивистские атомные электроны описываются скалярным операторным полем $\psi(\vec{x})$. Гамильтониан имеет вид /9,10/

$$H = \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \left\{ \frac{1}{2m} [-i\vec{\nabla} - e\vec{A}(0)]^2 + \sum_{j=1}^N V(\vec{x} - \vec{R}_j) \right\} \psi(\vec{x}) + H_{ph} \quad (4)$$

Связывающие электроны потенциалы $V(\vec{x} - \vec{R}_j)$ все имеют одинаковый вид, только их центры \vec{R}_j (центры атомов) разные и находятся друг от друга на расстояниях, много больших атомного радиуса δ .

(4) следует рассматривать как представитель или пример обычно используемых гамильтонианов. Если \vec{A} - поперечный потенциал и добавлено кулоновское взаимодействие между электронами, то получим гамильтониан кулоновской калибровки. Возможны другие модификации.

Представим ψ разложением

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{j,n} \alpha_{jn} \varphi_{jn}(\vec{x}). \quad (5)$$

Для пояснения (5) рассмотрим частный случай двух кулоновских атомов. Электронная часть (4) диагонализуется при разложении ψ по двухцентровым собственным функциям ψ_ν

$$\left(-\frac{\nabla^2}{2m} + \frac{e^2}{|\vec{x}-\vec{R}_1|} + \frac{e^2}{|\vec{x}-\vec{R}_2|} \right) \psi_\nu = E_\nu \psi_\nu. \quad (6)$$

Далее будут рассматриваться только связанные состояния (т.е. не об- суждается ионизация и т.п.). Если $|\vec{R}_2 - \vec{R}_1| \gg \delta$, то ив $\psi_\nu(\vec{x})$ можно построить суперпозиции $\varphi_{jn}(\vec{x})$, $j = 1, 2$, каждая из которых дока- лизована вблизи одного из центров, почти исчезая вблизи другого^{/II/}. Можно пренебречь вероятностью туннелирования электрона от одного атома к другому и считать, что φ_{jn} соответствуют энергетическому уровню E_n отдельного атома. Функции φ_{jn} приближенно ортонорми- рованы. Именно такого рода функции использованы в (5).

Обычно считают, что операторы α_{jn} в (5) должны подчиняться антикоммутационным соотношениям, чтобы волновые функции тождест- венных электронов были антисимметричными. Однако связанные электро- ны разных атомов можно считать различимыми в случае $|\vec{R}_1 - \vec{R}_2| \gg \delta$, $\forall j, i \neq j_2$. Их волновые функции не надо обязательно антисим- метризовывать: несимметризованные (H) функции ведут к тем же фи- зическим результатам, что и антисимметризованные (A) или симметри- зованные (C), см^{/12/}. Я принимаю в дальнейшем, что они симметризо- ваны (если $H=A$ и $H=C$, то $A=C$), т.е. что операторы α_{jn} с разными j удовлетворяют коммутационным соотношениям. Но электро- ны одного атома должны подчиняться принципу "в одном состоянии один электрон" и поэтому их операторы подчиняются антикоммутационным со- отношениям

$$\alpha_{jn_1} \alpha_{jn_2}^\dagger + \alpha_{jn_2}^\dagger \alpha_{jn_1} = \delta_{n_1, n_2}; \quad \{ \alpha_{jn_1}, \alpha_{jn_2} \}_+ = 0 \quad (7)$$

$$\alpha_{jn_1} \alpha_{jn_2}^\dagger - \alpha_{jn_2}^\dagger \alpha_{jn_1} = 0; \quad [\alpha_{jn_1}, \alpha_{jn_2}]_- = 0, \quad \forall j, i \neq j_2.$$

Еще раз подчеркнем, что, согласно доказательству Мессиа^{/12/},

физические результаты, получаемые с помощью операторов, под- чиняющихся аномальным коммутационным соотношениям (7), должны быть такими же, какие получаются с помощью фермиоператоров.

Подставляя (5) в (4) и используя (приближенную) ортонормиро- ванность функций φ_{jn} , получаем

$$H = \sum_{jn} E_n \alpha_{jn}^\dagger \alpha_{jn} - \sum_j \sum_{n_1} \sum_{n_2} \alpha_{jn_1}^\dagger \alpha_{jn_2} \frac{e}{m} \langle n_1 | \vec{p} | n_2 \rangle \cdot \vec{A}(0) + H_{ph} + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2(0) \cdot \hat{N}, \quad \hat{N} \equiv \sum_j \sum_n \alpha_{jn}^\dagger \alpha_{jn}. \quad (8)$$

Матричный элемент $\langle n_1 | \vec{p} | n_2 \rangle$ одинаков для всех атомов и выражает- ся через дипольный момент атома \vec{d}_{n_1, n_2} :

$$\langle n_1 | \vec{p} | n_2 \rangle \equiv \int d^3x \varphi_{n_1}^\dagger(\vec{x}) (-i\vec{\nabla}) \varphi_{n_2}(\vec{x}) = i(E_{n_1} - E_{n_2}) \vec{d}_{n_1, n_2}.$$

\hat{N} есть оператор полного числа электронов. Не только \hat{N} коммути- рует с H (т.е. сохраняется), но и операторы

$$N_j = \sum_n \alpha_{jn}^\dagger \alpha_{jn}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Поэтому гильбертово пространство состояний распадается на секторы с фиксированными N_j . Рассматриваемая физическая система принадлежит к сектору, который здесь называется "одноэлектронным". Если заряды ядер атомов все равны $+e$, то этот сектор определяется так: каждое N_j равно 1. Это значит, что нет ни положительных, ни отрицательных ионов, рассматриваются только нейтральные атомы.

В дальнейшем будет часто использоваться одномодовая двухуровне- вая модель Дикке^{/1,13/}. Её гамильтониан получается из (8) после ряда дополнительных приближений: 1) из суммы по n удерживаются только два члена $n = 1, 2$; 2) из разложения \vec{A} по фотонным операторам оставляется только одна пара $c_\omega, c_\omega^\dagger$, $\omega \approx E_2 - E_1$; 3) опускаются члены взаимодействия, ответственные за маловероятные "вир- туальные" переходы, например, электрон с нижнего уровня E_1 переходит на верхний E_2 и испускает фотон. Обозначая

$$\alpha_{j2} \equiv \alpha_j; \quad \alpha_{j1} \equiv \beta_j, \quad E_1 = (E - \omega_0)/2; \quad E_2 = (E + \omega_0)/2,$$

получаем из (8) гамильтониан модели Дикке

$$H_D = \frac{\omega_0}{2} \sum_j (\alpha_j^\dagger \alpha_j - \beta_j^\dagger \beta_j) + \omega c^\dagger c - iq \sum_j [\alpha_j^\dagger \beta_j c - c^\dagger \beta_j^\dagger \alpha_j]. \quad (10)$$

4. Введение парафермиоператоров

Это введение будет осуществлено методом анацев: выдвижения предположений - догадок и их проверки.

Предполагаем, что искомые коллективные операторы должны быть па- рафермиоператорами (ПФО), см. Введение. Их связь с операторами α_{jn}

предполагается имеющей вид известного из теории параквантования анзаца Грина /2/ : ПФО порядка N представляется суммой

$$\alpha_{1n} + \alpha_{2n} + \dots + \alpha_{Nn} \equiv a_n. \quad (11)$$

Аномальные коммутационные соотношения (7) для α_{jn} не позволят определить для a_n и a_n^\dagger ни коммутаторов, ни антикоммутаторов. Но они удовлетворяют соотношениям Грина /2,3/

$$\begin{aligned} [a_n, [a_{n_2}^\dagger, a_{n_3}]]_- &= 2\delta_{n, n_2} a_{n_3}, \\ [a_n, [a_{n_2}^\dagger, a_{n_3}^\dagger]]_- &= 2\delta_{n, n_2} a_{n_3}^\dagger - 2\delta_{n, n_3} a_{n_2}^\dagger, \\ [a_n, [a_{n_2}, a_{n_3}]]_- &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Покажем, что выражение $\frac{1}{2}[a_n^\dagger, a_n]_-$ простым образом связано с оператором $\hat{N}_n = \sum_j \alpha_{jn}^\dagger \alpha_{jn}$ (число электронов системы, находящихся в состоянии n):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[a_n^\dagger, a_n]_- &\equiv \frac{1}{2} \sum_j \sum_{j_2} (\alpha_{jn}^\dagger \alpha_{j_2 n} - \alpha_{j_2 n} \alpha_{jn}^\dagger) = \frac{1}{2} \sum_j (\alpha_{jn}^\dagger \alpha_{jn} - \alpha_{jn} \alpha_{jn}^\dagger) = \\ &= \sum_j \alpha_{jn}^\dagger \alpha_{jn} - N/2 \equiv \hat{N}_n - N/2. \end{aligned} \quad (13)$$

Сначала была использована вторая строка (7), потом первая.

Наконец, сделаем догадку о том, как гамильтониан (3) выражается через ПФО. Заменим члены $\sum_j \alpha_{jn}^\dagger \alpha_{jn}$ в (8) на $\frac{1}{2}[a_n^\dagger, a_n]$ и члены $\sum_j \alpha_{jn}^\dagger \alpha_{j_2 n}$ на $\frac{1}{2}[a_{n_1}^\dagger, a_{n_2}]$. Таким же способом, как в (13), проверим, что полученное выражение равно (8) с точностью до c -числа:

$$\begin{aligned} \sum_n E_n \frac{1}{2}[a_n^\dagger, a_n]_- - i \sum_{n_1, n_2} \frac{1}{2}[a_{n_1}^\dagger, a_{n_2}] (\bar{q}_{n_1, n_2} \vec{A}(0)) + H_{ph} + \\ + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2(0) \hat{N} = \sum_n E_n (\sum_j \alpha_{jn}^\dagger \alpha_{jn} - N/2) - \\ - i \sum_{n_1, n_2} \sum_j \alpha_{j_1 n_1}^\dagger \alpha_{j_2 n_2} (\bar{q}_{n_1, n_2} \vec{A}(0)) + H_{ph} + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2(0) N = \\ = H - N/2 \sum_n E_n. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\bar{q}_{n_1, n_2} \equiv \frac{e}{m} i(E_{n_1} - E_{n_2}) \vec{d}_{n_1, n_2}$ не равно нулю только при $n_1 \neq n_2$.

Рассмотрим модель Дикке (10). Вводя $a \equiv \sum_j \alpha_j$ и $b \equiv \sum_j \beta_j$, получаем с точностью до c -числа, что

$$H_D = \frac{\omega_0}{4} \{ [a^\dagger, a] - [b^\dagger, b] \} + \omega c^\dagger c - \frac{i}{2} \{ [a^\dagger, b] c - c^\dagger [b^\dagger, a] \}. \quad (15)$$

Введем обозначения

$$R_3 = \frac{1}{4} \{ [a^\dagger, a] - [b^\dagger, b] \} = \frac{1}{2} \sum_j (\alpha_j^\dagger \alpha_j - \beta_j^\dagger \beta_j) \quad (16)$$

$$R_- = -\frac{1}{2} [b^\dagger, a] ; \quad R_+ = -\frac{1}{2} [a^\dagger, b]. \quad (17)$$

Используя (12), можно проверить, что R_3 и $R_\pm = R_x \pm i R_y$ удовлетворяют перестановочным соотношениям момента количества движения, например,

$$\begin{aligned} [R_-, R_+] &= \frac{1}{4} [b^\dagger a - a b^\dagger, [a^\dagger, b]] = \frac{1}{4} \{ b^\dagger [a, [a^\dagger, b]] + \\ &+ [b^\dagger, [a^\dagger, b]] a - a [b^\dagger, [a^\dagger, b]] - [a, [a^\dagger, b]] b^\dagger \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ b^\dagger b - b b^\dagger - (a^\dagger a - a a^\dagger) \} = -2 R_3. \end{aligned}$$

Поэтому R_3 , R_\pm есть операторы "коллективного спина" Дикке. Если a и b есть коллективные переменные для уровней $n=2$ и $n=1$ соответственно, то R_3 , R_\pm можно назвать коллективными переменными, соответствующими паре уровней 2 и 1.

У гамильтониана (15) есть несколько сохраняющихся (коммутирующих с H_D) операторов:

Оператор полного числа электронов $\hat{N} = \hat{N}_1 + \hat{N}_2$, см. (13)

$$\hat{N} = \frac{1}{2} [a^\dagger, a] + \frac{1}{2} [b^\dagger, b] + N ;$$

кроме \hat{N} сохраняются также $a^\dagger a + b^\dagger b$ и $a a^\dagger + b b^\dagger$;

$$K = \frac{1}{4} \{ [a^\dagger, a] - [b^\dagger, b] \} + c^\dagger c = R_3 + c^\dagger c \quad (18)$$

$$R^2 = R_3^2 + R_x^2 + R_y^2 = R_+ R_- + R_3^2 - R_3 \quad (19)$$

$$[a, b]_- = 2 \sum_j \alpha_j \beta_j. \quad (20)$$

Пользуясь (12), можно выписать уравнения для гейзенберговских операторов $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, например $\dot{a}(t) = -i[a(t), H]$. Используя перечисленные законы сохранения, можно получить точное урав-

нение, содержащее только $a(t)$. Оно оказывается нелинейным, как и уравнение для оператора Дикке $R_3(t)$, например, и его решение составляет такую же проблему. Для иллюстрации явления сверхизлучения в формализме ПФО далее будет использована теория возмущений.

5. Парафермиоператоры и сверхизлучение

Сначала рассмотрим описание состояний ансамбля атомов с помощью ПФО.

"Одноэлектронный сектор" (ОЭС), см. текст после (9), состоит из векторов

$$\alpha_{1n}^+, \alpha_{2n_2}^+ \dots \alpha_{Nn_N}^+ \Omega, \quad \forall n_1, n_2, \dots, n_N \quad (21)$$

и их суперпозиций. Здесь и в дальнейшем Ω обозначает электронный вакуум: $\alpha_{jn} \Omega = 0, \quad \forall j, n$. Ввиду (II) имеем $a_n \Omega = 0, \quad \forall n$.

Назовем парафермиовекторами (ПФВ) те векторы, которые можно построить с помощью a_n, a_n^+ и Ω . Примером являются векторы $(a_n^+)^N \Omega, \quad \forall n$, которые к тому же принадлежат ОЭС. Действительно, с помощью формулы

$$(e_1 + e_2 + \dots + e_m)^n = \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} e_1^{k_1} e_2^{k_2} \dots e_m^{k_m} \quad (22)$$

(сумма берется по всем неотрицательным k_1, k_2, \dots, k_m с условием $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$) получаем

$$(a_n^+)^N = (\alpha_{1n}^+ + \alpha_{2n}^+ + \dots + \alpha_{Nn}^+)^N = N! \alpha_{1n}^+ \alpha_{2n}^+ \dots \alpha_{Nn}^+,$$

поскольку $(\alpha_{jn}^+)^2 = 0$, см. (7). По той же причине $(a_n^+)^{N+1} = 0$.

Из (21) и (II) следует, что претендовать на принадлежность к ОЭС могут только ПФВ вида

$$(a_{n_1}^+)^{m_1} (a_{n_2}^+)^{m_2} \dots \Omega, \quad m_1 + m_2 + \dots = N \quad (23)$$

и их суперпозиции. Не все такие векторы действительно принадлежат ОЭС. Например, рассмотрим случай $N = 2$ с двумя уровнями. С помощью (II) устанавливаем, что $a^+ b^+ \Omega$ и $b^+ a^+ \Omega$ не принадлежат ОЭС, но их сумма принадлежит (отсюда, кстати, следует, что это разные состояния). Можно также привести примеры состояний ОЭС, кото-

рые нельзя построить из ПФВ. Ввиду такой ситуации мы ограничимся далее двухуровневым случаем Дикке и построим с помощью ПФО серию ОЭС состояний, которой окажется достаточно для демонстрации сверхизлучения. Исходным вектором серии будет $(a^+)^N \Omega$. Прежде всего доказываем, что $(a^+)^N \Omega$ является собственным вектором операторов R_3 (собственное значение $N/2$) и R^2 (собственное значение $N/2(N/2+1)$). Здесь и далее R_3 и R^2 обозначают комбинации ПФО, см. (I6), (I9), (I7). Доказательство можно провести, используя (II) и (7). Другой способ – использовать соотношения Грина (I2) и их эрмитовские сопряжения (например, $[b^+, [a^+, a]] = 0, [a^+, [b^+, a]] = -2b^+$) и другие соотношения параквантования (например, $a_n, a_{n_2}^+ \Omega = N \delta_{n, n_2} \Omega$), см. технические детали в [3], гл. 4.

Поскольку $-\frac{1}{2}[b^+, a] \equiv R_-$ коммутирует с R^2 , то все состояния

$$(R_-)^m (a^+)^N \Omega, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (24)$$

принадлежат собственному значению $N/2(N/2+1)$ оператора R^2 . Серия состояний (24) принадлежит ОЭС, поскольку R_- коммутирует со всеми N_j , см. (9) и последующий текст. В частности,

$$R_- (a^+)^N \Omega = -\{(a^+)^{N-1} b^+ + (a^+)^{N-2} b^+ a^+ + \dots + b^+ (a^+)^{N-1}\} \Omega.$$

Состояния серии являются собственными векторами оператора R_3 и могут быть занумерованы его собственными значениями M :

$$\psi_M \sim (R_-)^{N/2-M} (a^+)^N \Omega, \quad M = N/2, N/2-1, \dots, -N/2. \quad (25)$$

Пусть начальное состояние атомного ансамбля описывается вектором $(a^+)^N \Omega$: энергия возбуждения максимальна. Испуская фотоны, ансамбль может переходить только в состояния серии (25), потому что R^2 сохраняется. Для нахождения вероятности перехода $\psi_M \rightarrow \psi_{M+1}$ фотон в первом приближении теории возмущений надо вычислить

$$\langle \psi_{M-1}, 1 \text{ фотон} | H_{int} | \psi_M \rangle \sim \langle \psi_{M-1} | R_- | \psi_M \rangle \quad (26)$$

см. (I5). Здесь ψ_M и ψ_{M-1} должны быть нормированы на единицу. Поскольку $R_- \psi_M \sim \psi_{M-1}$, см. (25), то вычисление (26) сводится к нахождению нормировочного коэффициента для $R_- \psi_M$. Поскольку ψ_M предположено нормированным на единицу, то

$$\begin{aligned} \langle R_- \psi_m, R_- \psi_m \rangle &= \langle \psi_m, R_+ R_- \psi_m \rangle = \\ &= \langle \psi_m, (R^2 - R_3^2 + R_3) \psi_m \rangle = (N/2 + M)(N/2 - M + 1); \end{aligned} \quad (27)$$

$$\psi_{m-1} = [(N/2 + M)(N/2 - M + 1)]^{-1/2} R_- \psi_m.$$

Использовано соотношение (19). Из (27) следует

$$|\langle \psi_{m-1} | R_- | \psi_m \rangle|^2 = (N/2 + M)(N/2 - M + 1).$$

Вероятность перехода $\psi_{N/2} \rightarrow \psi_{N/2-1} + \gamma$ пропорциональна N , т.е. равна сумме вероятностей испускания фотона отдельными атомами системы. В последующих переходах $\psi_m \rightarrow \psi_{m-1} + \gamma$, $m = N/2-1, N/2-2, \dots$ вероятность испускания фотона системой увеличивается и достигает максимального значения для $\psi_{m=0} \rightarrow \psi_{m=-1} + \gamma$, когда она становится пропорциональной $N/2(N/2+1) \cong N^2/4$. Итак, мы имеем сверхизлучение, когда атомный ансамбль потерял половину своей начальной энергии. Заметим, что сверхизлучение начнется в самом начале каскада переходов $\psi_m \rightarrow \psi_{m-1} + \gamma$, если мы сумеем реализовать начальное состояние $\psi_{m=0}$; например, возбуждая наиминимальное состояние $(B^+)^N \Omega$ в состоянии $\psi_{m=0}$.

6. О бозе-представлении для операторов "коллективного спина"

Это представление использовалось многими авторами, см., например, /14-19/. Здесь мы его обсудим на примере модели Дикке /1/, где были введены операторы "коллективного спина"

$$R_3 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \sigma_3^{(j)}; \quad R_{\pm} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \sigma_{\pm}^{(j)}. \quad (28)$$

См. также (16). Они удовлетворяют коммутационным соотношениям трехмерной группы вращений. Таким же соотношениям удовлетворяет представление

$$R_3 = \frac{1}{2} (A^+ A - B^+ B); \quad R_+ = A^+ B; \quad R_- = B^+ A \quad (29)$$

$$[A, A^+]_- = [B, B^+]_- = 1, \quad [A, B]_- = 0, \dots \quad (30)$$

С помощью (30) получаем для $R^2 = R_+ R_- + R_3^2 - R_3$,

$$R^2 = \frac{1}{4} \mathcal{N}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{N}; \quad \mathcal{N} \equiv A^+ A + B^+ B.$$

Поскольку спектр $A^+ A$ или $B^+ B$ состоит из $0, 1, 2, \dots$ то собственные значения R^2 в представлении (29) могут быть сколь

угодно большими, так же, как и модули собственных значений R_3 . Между тем из (28) следует, что эти величины не могут превосходить $N/2(N/2+1)$ и $N/2$ соответственно. Это значит, что правые части (28) осуществляют некоторое (приводимое) представление R_3, R_{\pm} , которое отличается от представления, осуществляемого правыми частями (29). Поэтому представление (29) может вести к трудностям. Например, попытаемся описать состояния атомного ансамбля, используя бозе-операторы A, B . Можно написать состояния, которые отсутствуют в первоначальной модели Дикке и физически нереальны, а именно

$$(A^+)^m \Omega, \quad (B^+)^m \Omega, \quad m = N+1, N+2, \dots \quad (31)$$

Действительно, мы знаем, что наш ансамбль не может поглотить энергию, большую, чем NE_2 . А если записать атомную часть гамильтониана через A и B , то у него будут произвольно большие собственные значения, соответствующие состояниям (31). Состояния $(B^+)^m \Omega$ могут поглотить $N+1, N+2, \dots$ фотонов с энергией $E_2 - E_1$, в то время как это невозможно для атомной системы. Эта невозможность мотивировала введение ПФО в этой работе, см. Введение.

Заметим, что некоторые авторы, вводя бозе-представление, оговаривали его недостатки, см., например /14,15/.

Однако возможны случаи, когда использование бозе-представления допустимо. Например, в случае модели (10) можно фиксировать собственное значение R^2 выбором начального состояния. В частности, $R^2 = N/2(N/2+1)$, когда все атомы возбуждены. В модели (10) R^2 сохраняется, и атомный ансамбль все время принадлежит к исходному представлению R_3, R_{\pm} с $R^2 = N/2(N/2+1)$. Состояния (31) не могут появиться, потому что они соответствуют собственным значениям R^2 , превышающим $N/2(N/2+1)$, ср. /14/.

Таким образом, допустимость бозе-представления должна исследоваться отдельно в каждом случае его применения.

7. Заключение

Для описания сверхизлучающих свойств ансамбля N атомов были введены новые коллективные операторы, а именно парафермиоператоры Грина (ПФО). Они нумеруются индексом \mathcal{L} атомных уровней. Известные операторы "коллективного спина" являются коллективными переменными, нумерующимися парой (n, n_2) таких индексов, см. раздел 4. Отметим, что в случаях, когда надо учитывать 4 и более уровней, ПФО имеют то преимущество, что их меньше, чем число операторов "коллективного спина".

В ряде работ использовалось представление "коллективного спина" с помощью бозе-операторов. Это представление обсуждено в разделе 6.

Показано, что именно ПФО дают адекватное описание рассматриваемой физической системы, хотя бозе-представление может оказаться допустимым в некоторых случаях.

Настоящее исследование не обнаружило преимуществ ПФО по сравнению с операторами "коллективного спина" в случае двухуровневых атомов. В частности, гейзенберговские уравнения для ПФО не проще, чем уравнения для "коллективного спина". Однако следует еще исследовать возможность использования ПФО в тех же целях, для каких использовалось бозе-представление, см., например, /16-19/.

Благодарю А.Б. Говоркова и А.С. Шумовского за полезные обсуждения.

Литература

1. Dicke R.H. Phys. Rev. 1954, 92, 99.
2. Green H.S. Phys. Rev., 1954, 90, 270.
3. Ohnuki Y., Kametuchi S. Quantum Field Theory and Parastatistics, Amsterdam, North Holland, 1982.
4. Говорков А.Б. ФЭЧАЯ, 1983, 14, 1229.
5. Широков М.И. ОИЯИ Р4-83-796 Дубна, 1983.
6. Lehmburg R.H. Phys. Rev., 1970, A2, 889.
7. Agarwal G.S. Phys. Rev., 1970, A2, 2038; *ibid* 1971, A3, 1782.
8. Agarwal G.S. Quantum Optics. Springer Tracts in Mod. Phys., 13, v.70, Berlin, Springer, 1974.
9. Шифф Л. Квантовая механика. Москва ИИЛ, 1957, гл. 13, § 46.
10. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля Москва, ИИЛ, 1963, гл. 6.
11. Слэтер Д. Электронная структура молекул. Москва, "Мир", 1965, гл. I.
12. Мессиа А. Квантовая механика. Москва, "Наука", т. 2, гл. 14, § 8.
13. Аллен Л., Эберли Д., Оптический резонанс и двухуровневые атомы, Москва, "Мир", 1978, гл. 8.
14. Benifacio R., Preparata G. Phys. Rev., 1970, A2, 336.
15. Walls D.F. J. Phys. A. Mat. Gen. 1971, 4, 813.
16. Kumar S., Mehta C. Phys. Rev., 1980, A21, 1573.
17. Bogolubov N.N. Jr. et al. Physica, 1987, A144, 503.
18. Shumovsky A.S. et al. J. Phys. France, 1988, 49, 787.
19. Shumovsky A.S., Tran Quang J. Phys., B. At. Mol., 1989, 22, 131.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 июля 1989 года.

Широков М.И.

P4-89-562

Парафермиоператоры в теории сверхизлучения

Рассматривается система N одинаковых атомов, взаимодействующих с фотонами. Для изучения коллективных эффектов в такой системе /например, сверхизлучения/ использовались разного рода коллективные переменные, как, например, "коллективный спин" Дикке. Здесь предлагается новый вид коллективных операторов, а именно парафермиоператоры Грина a_n , занумерованные индексом атомного уровня n . Гамильтониан системы, законы сохранения, сверхизлучающие состояния записаны с помощью парафермиоператоров. Обсуждается их применение.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод Г.Г.Сандуковской

Shirokov M.I.

P4-89-562

Parafermioperators in the Theory of Superradiance

N identical atoms interacting with photons are considered. Different kinds of collective variables were used to study collective effects in the system (e.g., superradiance) taking as an example Dicke's collective spin. A new kind of collective operators is suggested, namely Green's parafermioperators a_n labelled by the index n that numerates atomic levels. The system Hamiltonian, conservation laws and superradiant states are written in terms of the parafermioperators. Their use is discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989