объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P4-89-504

Л.Мюнхов

КВАНТОВАНИЕ ДИРАКА ДЛЯ ВРАЩЕНИЯ ВОЛЧКА

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1989

1. ВВЕДЕНИЕ

Помимо других интересных последствий понятие фазы Берри [1] привело к выявлению своеобразных топологических аспектов в некоторых задачах квантовой механики. Эта фаза выражается через замкнутый контурный интеграл в пространстве коллективных переменных от некоторого эффективного вектор-потенциала A_μ. Само возникновение в многочастичной задаче нерелятивистской квантовой механики структур, которые обыкновенно изучаются в теориях поля, представляет собой любопытный факт. В частности, оказывается [2,3], что адиабатическое вращение двухатомной молекулы эквивалентно движению бозе- или ферми-частицы в вектор-потенциале некоторого эффективного магнитного монополя. В случае адиабатических ротационных полос, построенных на внутренних состояниях с целочисленным спином, получается таким образом абелева калибровочная теория, а в случае сильной связи полос теория уже неабелева.

Если продолжить аналогию с задачей о магнитном монополе, в коллективном вращении вместо магнитного заряда появляется проекция полного углового момента k на ось симметрии волчка. Возникает поэтому естественный вопрос: можно ли обобщить правило квантования Дирака для магнитного монополя таким образом, чтобы получить требование $k = \pm n \cdot \hbar/2$, $n = 0, 1, \ldots$ Докажем, что это действительно так, причем, в отличие от случая стандартного монополя, необходимо явно использовать D_2-симметрию задачи вращения, чтобы получить полуцелый спин.

Формально пользуемся физической моделью вращения атомного ядра. Общие выводы справедливы, естественно, также для задачи квантово-механического волчка.

2. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ И КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ВОЛЧОК В S^2

Векторный потенциал A_μ во вращательной задаче возникает следующим образом: пусть $|k\rangle$ представляет собой многочастичную волновую функцию деформированного ядра и $J_z\,|k\rangle = k|k\rangle$, где J_z - проекция оператора углового момента на ось z. Действием оператора вращения

$$R(\Omega) = \exp - iJ_z\phi \exp - iJ_y\theta \exp - iJ_z\chi$$

на $|k\rangle$ тогда определяется ориентированное состояние $|\Omega, k\rangle = R(\Omega)|k\rangle$, причем Ω обозначают углы Эйлера ϕ, θ, χ, а J_a суть компоненты углового момента. Ориентированные состояния $|\Omega, k\rangle$ используются в ядерной многочастичной теории вращения в качестве генераторных состояний, с помощью которых строится коллективный гамильтониан /см., например, [4]/.

Геометрически углы Эйлера определяют точку на поверхности S^3 пространства R^4. В квантовой задаче физические результаты не должны зависеть от угла вращения χ вокруг оси симметрии волчка, поэтому можно выбрать секторы $\chi = -\phi$, $\chi = +\phi$, совершая отображение $S^3 \to S^2$, где S^2 - двухмерная сфера. Аналогичная операция известна из теории магнитного монополя в формулировке Ву и Янга [5]. В S^2 тогда получается состояние

$$|\Omega^{(\pm)}, k\rangle = \exp - i(J_z \mp k)\,\phi \exp - iJ_y\theta\,|k\rangle.$$

При применении построения Берри /см. также [2]/ в S^2 появляется калибровочный потенциал

$$A_\phi^{(\pm)} = i\langle\Omega^{(\pm)}, k|\,\partial/\partial\phi\,|\Omega^{(\pm)}, k\rangle = k(\cos\theta \mp 1),$$
$$A_\theta^{(\pm)} = i\langle\Omega^{(\pm)}, k|\,\partial/\partial\theta\,|\Omega^{(\pm)}, k\rangle = 0, \qquad /1/$$

и гамильтониан в коллективном пространстве вместо импульса $p_\phi = -i\,\partial/\partial\phi$ содержит ковариантную производную $D_\phi^{(\pm)} = p_\phi - A_\phi^{(\pm)}$, причем $A_\phi^{(+)}$, $A_\phi^{(-)}$ связаны калибровочным преобразованием

$$A_\phi^{(+)} = A_\phi^{(-)} + iU(\phi)\,\partial/\partial\phi\, U^{-1}(\phi), \quad U = e^{+2ik\phi}. \qquad /2/$$

В сферических координатах $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, требуя $A_\phi d\phi = \vec{A}d\vec{r}$, из /1/ получаем известное выражение [5] для вектор-потенциала магнитного монополя:

$$\vec{A}^{(\pm)} = -\frac{k}{r(z \pm r)}(-y, x, 0), \quad (r = 1);$$

причем k играет роль магнитного заряда. Пользуясь аналогией с монополем, имеем для компонент углового момента [3]

$$L_x = i(\sin\phi\,\partial/\partial\theta + \mathrm{ctg}\,\theta\cos\phi\,\partial/\partial\phi) + A_\phi^{(\pm)}\cdot\cos\phi/\sin\theta,$$
$$L_y = i(-\cos\phi\,\partial/\partial\theta + \mathrm{ctg}\,\theta\sin\phi\,\partial/\partial\phi) + A_\phi^{(\pm)}\cdot\sin\phi/\sin\theta, \qquad /3/$$
$$L_z = -i\,\partial/\partial\phi - k;$$

причем справедливы обыкновенные коммутационные соотношения $[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k$. Используя метод генераторных координат, коллективный гамильтониан можно преобразовать к виду

$$H_{coll} = 1/2J\,(\mathcal{L}^2 - k^2), \quad \mathcal{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 ,$$

где J - момент инерции ядра, а волновая функция представляется в форме

$$\psi^{(\pm)}_{L,M,k} = N \cdot \Theta^{(\pm)}_{L,M,k}(\theta)\,\Phi_{M,k}(\phi) \cdot |k> \qquad /4/$$

/N - нормировочный множитель/ и подчиняется уравнению

$$\{ \frac{1}{\sin\theta} (\frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) - \frac{(M' - A^{(\pm)}_{\phi})^2}{\sin^2\theta} + L(L+1) - k^2 \} \Theta_{L,M,k} = 0. \qquad /4'/$$

При этом имеет место уравнение

$$L_z \Phi_{M,k} = M\Phi_{M,k} \equiv (M' - k) \cdot \Phi_{M,k} . \qquad /4''/$$

Решение в виде /4/ нарушает симметрию относительно обращения времени, выделяя состояние $|k>$. Введем поэтому обращенное по времени внутреннее состояние

$$|\tilde{k}> = R_i^{-1}\,|k>; \; R_i = \exp - iJ_y \pi \,^{/6/}, \quad J_z\,|\tilde{k}> = -k|\tilde{k}>$$

и используем спиновое представление $|k> = \binom{1}{0}$, $|\tilde{k}> = \binom{0}{1}$. Калибровочный потенциал /1/ тогда приобретает вид $A^{(\pm)}_{\phi} = k(\cos\theta \mp \mp 1)\sigma_z$, а компоненты углового момента /3/ также становятся спинорами, в частности

$$L_z = -i\,\partial/\partial\theta - k\,\sigma_z . \qquad /5/$$

Инвариантность внутреннего гамильтониана относительно R_i означает [6], что полная волновая функция не изменится при повороте коллективного пространства вокруг оси y на угол π с переходом состояния $|k>$ в $|\tilde{k}>$:

$$\Theta^{(+)}_{L,M,k}(\theta)\,\Phi_{M,k}(\phi)\,|k> = \Theta^{(+)}_{L,M,k}(\pi - \theta)\,\Phi_{M,k}(\phi + \pi)\,|\tilde{k}> . \qquad /6/$$

Поскольку $A^{(+)}_{\phi}(\pi - \theta) = -A^{(-)}_{\phi}(\theta)$, из формулы /4/ имеем $\Theta^{(+)}_{L,M,k}(\pi - \theta) =$

$= \Theta^{(-)}_{L,M,-k}(\theta)$ и вместо /4/ с помощью /6/ получим симметризированную волновую функцию

$$\Psi_{L,M} = \frac{N}{\sqrt{2}}\{\Theta^{(+)}_{L,M,k}(\theta)\cdot e^{iM'\phi}\cdot|k> + \Theta^{(-)}_{L,M,-k}(\theta)\cdot e^{iM'\phi}\cdot e^{-2ik\phi}\cdot e^{i(M+k)\pi}\,|\tilde{k}>\}. \qquad /7/$$

Множитель $e^{-2ik\phi}$ во втором члене гарантирует, чтобы выполнялось соотношение $L_z\Psi_{L,M} = M\Psi_{L,M}$ с учетом формулы /5/. Условие однозначности относительно ϕ волновой функции $\Psi_{L,M}$ /7/

$$\Psi_{L,M}(\theta,\phi) = \Psi_{L,M}(\theta,\phi+2\pi) \qquad /8/$$

приводит к требованию $e^{-2ik2\pi} = 1$, то есть

$$k = 0,\ \pm 1/2,\ \pm 1,\dots \quad (\hbar = 1)\ ; \qquad /9/$$

а из калибровочного преобразования /2/ имеем

$$\oint A^{(-)}_{\phi}\,d\phi - \oint A^{(+)}_{\phi}\,d\phi = 4\pi k. \qquad /10/$$

Соотношения /9/ и /10/ представляют условие квантования Дирака в формулировке Ву и Янга[5]. В задаче магнитного монополя оно выражает квантование потока, идущего через поверхности, примыкающие в S^2 к экватору с севера и с юга. Требование однозначности /8/ также приводит к тому, что M' должно быть целым числом, и поскольку $M = M' - k$ тоже квантовое число М, тем самым и L являются полуцелыми или целыми, в зависимости от k. Наконец, фазовый множитель $\exp i(M+k)\pi$ во втором члене формулы /7/ обусловливает известный интерференционный эффект в ротационных полосах, в частности, для полосы с $k=0$ нечетные значения L исключаются.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы доказали, что условие квантования Дирака возникает естественным путем при формулировке задачи вращения волчка в S^2. Помимо проекции $S^3 \to S^2$ существенным моментом для его получения является требование, чтобы полная волновая функция не изменилась при совместной операции вращения коллективного пространства вокруг оси y на угол π и отражения времени. При этом полная волновая функция представляется как суперпозиция решений из двух секторов, соответствующих проекциям $\chi = \mp \phi$, и требование однозначности приведет к полуцелым или целым значениям спина. Интересно отметить, что в полевых теориях [7,8] топологическое квантование спина, которое приводит и к полуцелым значениям спина, требует введения в лагранжиан так называемой аномалии Весса - Зумино, которая имеет вид $\int A_\phi \dot{\phi} dt$. Наш подход, отличающийся наглядностью, для задачи вращения эквивалентен учету члена Весса - Зумино. Отметим двоякую роль квантового числа k: с одной стороны, оно определяется условием квантования Дирака /9/, с другой стороны, это же квантовое число дается многофермионной системой через условие $J_z |k\rangle = k|k\rangle$. Ситуация здесь напоминает положение в скирмионной задаче [9], где спин бариона, с одной стороны, определяется квантованием монополя [7], а с другой - возникает из кварковой системы, поскольку скирмионная модель является результатом бозонизации фермионной системы.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Р.Г.Назмитдинова за плодотворные дискуссии, а также выразить признательность Я.А.Смородинскому и В.Г.Кадышевскому за интерес, проявленный ими к результатам данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berry M.V. - Proc. Roy. Soc. London, 1984, T.A392, p.45.
2. Wilczek F., Zee A. - Phys. Rev. Lett., 1984, T.52, p.2111.
3. Moody J., Wilczek F. - Phys. Rev. Lett., 1986, T.56, p.893.
4. Une T., Ikeda A., Onishi N. - Progr.Theor. Phys., 1976, T.55, p.498.
5. Wu T.T., Yang C.N. - Nucl. Phys., 1976, T.B107, p.365.
6. Бор.О., Моттельсон Б. - Структура атомного ядра, т.2. М.: Мир, 1977.
7. Aitchison I.J.R. - Acta Phys. Pol., 1987, T.B18, p.207.
8. Stone M. - Nucl. Phys., 1989, T.B314, p.557.
9. Witten E. - Nucl. Phys., 1983, T.B223, p.422, 433.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июня 1989 года.