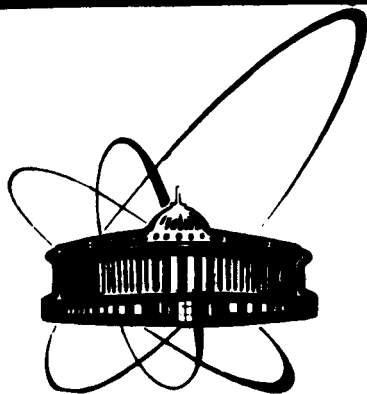


89-357



e
f

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

A 941

P4-89-357

Г. Н. Афанасьев

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ
ТОНОМУРЫ

Направлено в журнал "Physics Letters A"

1989

I. Вкратце ситуацию, связанную с существованием эффекта Ааронова-Бома (АБ), в настоящее время можно обрисовать следующим образом. Имеются прекрасные эксперименты по рассеянию электронов (см., например, /1,2/), четко указывающие на наличие сдвига дифракционной картины при включении магнитного потока в недоступной для падающих частиц области пространства. Однако существуют альтернативные качественные теоретические объяснения /3/ этого сдвига. Все они в той или иной мере обязаны тому факту, что в многосвязных пространствах допустимы неоднозначные волновые функции (см., например, /4/). Ввиду этого для выяснения природы наблюдаемого на опыте сдвига дифракционной картины на первый план выдвигается достаточно точное количественное описание экспериментальной ситуации. (Крайне невероятно, чтобы различные качественные интерпретации давали один и тот же количественный результат). На наш взгляд, наиболее совершенными являются опыты Тономуры /1/ по рассеянию электронов на непроницаемом тороидальном соленоиде. Количественное описание этих экспериментов и составляет цель настоящей работы. Мы всегда используем однозначные волновые функции как в одно-, так и в многосвязных пространствах, как при наличии, так и при отсутствии магнитного поля.

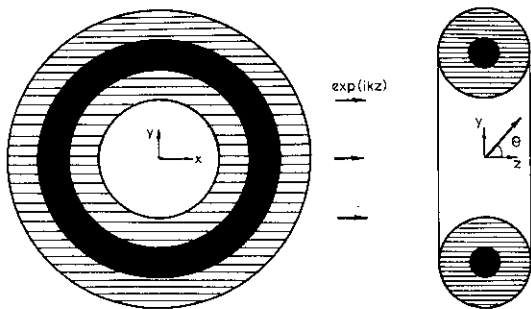


Рис. I. Рассеяние электронов на тороидальном соленоиде (зачернен), окруженном непроницаемым тором (заштрихован). Стрелки указывают направление волнового вектора падающей волны; θ - угол рассеяния.

2. В работе /5/ было получено френгоферовское сечение рассеяния заряженных частиц на тороидальном соленоиде (рис. I). Окончательное выражение для сечения рассеяния таково:

$$\sigma_{\theta}(\theta) = \sigma_0(\theta) + \left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \cdot (d^2 - R^2) \cdot \sin^2 \pi \chi \cdot J_1(q_1) \cdot J_1(q_2). \quad (2.1)$$

Здесь d , R - параметры непроницаемого для падающих частиц тора ($(\rho - d)^2 + z^2 = R^2$), окружающего соленоид с магнитным потоком Φ ; далее, $\chi = e\Phi/hc$, σ_0 - сечение рассеяния на непроницаемом торе в отсутствие магнитного поля:

$$\sigma_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \cdot [(d+R) \cdot J_1(q_1) - (d-R) \cdot J_1(q_2)]^2, \quad (2.2)$$

K - волновое число ($\vec{K} = K \cdot \vec{e}_z$), θ - угол рассеяния;
 $q_{1,2} = \kappa(d \pm R) \sin \theta$. Поскольку в экспериментах по рассеянию электронов на тороидальном соленоиде $\sqrt{1/\kappa d} \gg 1$ и $\kappa R \gg 1$, то функции Бесселя при не слишком малых углах можно заменить их асимптотическими выражениями:

$$\tilde{\sigma}_\gamma = \frac{1}{2\sqrt{\kappa}} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \cdot \left\{ \left[\sqrt{d+R} \cdot \sin\left(q_1 - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{d-R} \sin\left(q_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right]^2 + 2\sqrt{d^2 - R^2} \cdot \sin^2 \pi \gamma \cdot \sin\left(q_1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(q_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right\}. \quad (2.3)$$

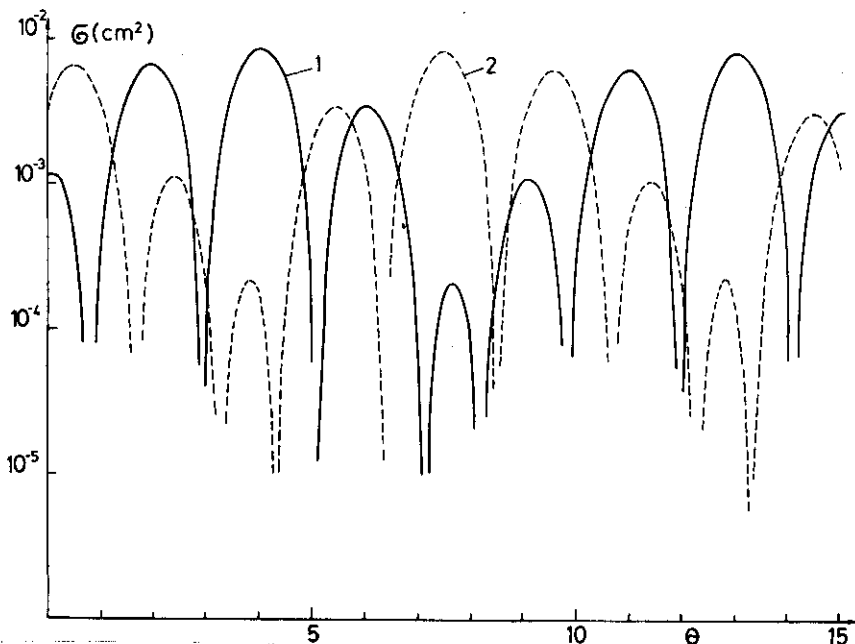


Рис. 2. Угловая зависимость сечения рассеяния электронов на тороидальном соленоиде. Нулю на оси абсцисс соответствует угол $\theta = 0,01^\circ$. Цена одного деления на этой оси 10^{-5}° (например, цифре 5 соответствует $\theta = (0,01 + 5 \cdot 10^{-5})^\circ$). В рамках френелевской теории дифракции сплошная кривая отвечает значению $\gamma = 0$, прерывистая - $\gamma = 0,5$. Ситуация радикально меняется при использовании адекватной френелевской теории. Если l (рассеяние от начала координат до места регистрации) равно ≈ 85 см, то френелевская теория дифракции в точности воспроизводит результаты френелевской теории с теми же значениями γ . При $l \approx 73$ см кривая 1 соответствует $\gamma = 0,5$, а кривая 2 - $\gamma = 0$.

При $R \ll d$ в (2.3) можно пренебречь R под знаком квадратного корня (но не под знаком синуса, поскольку $\kappa R \gg 1$). Тогда при $\gamma = 0$ и $\gamma = \frac{1}{2}$:

$$\sigma_0(\theta) = \frac{2d}{\pi\kappa} \frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} \sin^2(\kappa R \sin\theta) \cdot \cos^2\left(\kappa d \sin\theta - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sigma_{\frac{1}{2}}(\theta) = \frac{2d}{\pi\kappa} \frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} \cdot \cos^2(\kappa R \sin\theta) \cdot \sin^2\left(\kappa d \sin\theta - \frac{\pi}{4}\right). \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что в отсутствие магнитного поля ($\gamma=0$) сечение рассеяния имеет два семейства нулей: $\sin\theta_n^{(R)} = n\pi/\kappa R$ и $\sin\theta_n^{(d)} = \pi(n-\frac{1}{2})/\kappa d$, или, если n не слишком велико, $\theta_n^{(R)} \approx n\pi/\kappa R$, $\theta_n^{(d)} \approx \pi(n-\frac{1}{2})/\kappa d$. С другой стороны, при $\gamma = 1/2$ имеем $\theta_n^{(R)} \approx (n+\frac{1}{2})\pi/\kappa R$, $\theta_n^{(d)} \approx \pi(n+\frac{1}{2})/\kappa d$. Делаем вывод: включение магнитного поля приводит (при $\gamma=1/2$) к сдвигу нулей первого семейства на $\pi/2\kappa R$, а второго - на $\pi/2\kappa d$. Типичные сечения рассеяния представлены на рис. 2.

3. Фраунгоферовская теория дифракции справедлива на достаточно больших расстояниях от рассеивателя. При этом наряду с условиями $\kappa d \gg 1$, $\kappa R \gg 1$ и $d/z \ll 1$ (которые мы всегда считаем выполненными) должно быть соблюдено условие $d \equiv \kappa d R / z \ll \pi$. Опыты Тономуры [1] были проведены при следующих значениях параметров: $\kappa = 2 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-1}$, $R = 10^{-4} \text{ см}$, $d = 4 \cdot 10^{-4} \text{ см}$. К сожалению, в работе [1] не приводится расстояние z от тороидального соленоида до места регистрации. Для определенности, исходя из рисунка установки, приведенного в [1], примем z равным 1 м. Тогда $\kappa R \approx 2 \cdot 10^6$, $\kappa d \approx 8 \cdot 10^6$, $d/z \approx 4 \cdot 10^{-6}$, $d \approx 8$. Последнее равенство нарушает условие применимости фраунгоферовской теории. Оценим расстояние z , при котором эта теория начинает работать. Если мы удовлетворимся значением d , равным 0,1, то при κ , d , R , тех же, что и выше, получаем $z \approx 80 \text{ м}$. Такие размеры экспериментальной установки нереальны. Поскольку параметр d не мал, то в волновой функции должен быть учтен вклад членов второго порядка относительно d , R . В оптике это соответствует френелевской теории дифракции. Члены третьего порядка имеют вид $\delta_3 \approx \kappa \cdot (d+R)^3 / z^2 \approx 2,5 \cdot z^{-2}$. Они малы по сравнению с π , если z превышает несколько сантиметров. Например,

$\delta_3 \approx 0,1$ при $r = 5$ см и $\delta_3 \approx 2,5 \cdot 10^{-4}$ при $r = 100$ см.

Итак, френелевская волновая функция с точностью до членов третьего порядка равна $\psi_{\gamma} = \exp(ikz) + \psi_{\delta}$

$$\psi_{\delta} = i \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \exp(ikz) \exp\left(ik \frac{d^2 + R^2}{2r}\right) \left[\exp\left(\frac{ikdR}{r}\right) \cdot W_1 - \exp(2i\pi\delta) \exp\left(-\frac{ikdR}{r}\right) \cdot W_2 \right]. \quad (3.1)$$

Функции W_1, W_2 выражаются через хорошо известные функции Ломмеля (см., например, /6/):

$$W_{1,2} = U_1 \left[\frac{k(d \pm R)^2}{r}, k(d \pm R) \sin \theta \right] - i U_2 \left[\frac{k(d \pm R)^2}{2r}, k(d \pm R) \sin \theta \right].$$

Выражение (3.1) справедливо при следующем дополнительном ограничении на угол рассеяния θ :

$$\omega = \frac{k(d+R)^2}{2\pi r} \sin^2 \theta \ll 1. \quad (3.2)$$

Если мы удовлетворимся значением $\omega = 0,1$, то при $r = 10$ см из (3.2) получаем $\theta \leq 2^\circ$, а при $r = 100$ см: $\theta \leq 6,5^\circ$. Измерения в /1/ проводились в непосредственной близости от геометрической тени тороидального кольца. Это соответствует углам $\theta \approx 3 \cdot 10^{-3}^\circ$ при $r = 10$ см и $\theta \approx 3 \cdot 10^{-4}^\circ$ при $r = 1$ м. Ввиду того, что соотношение (3.2) выполняется с хорошей точностью, выражение (3.2) адекватно описывает обсуждаемые эксперименты.

Согласно правилам квантовой механики (см., например, /7/) сечение рассеяния равно

$$\sigma = \frac{m r^2}{\hbar k} j_z.$$

Здесь j_z - радиальная компонента плотности тока вероятности

$$j_z = \frac{\hbar}{2im} \left(\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right) - \frac{e}{mc} A_z \cdot |\psi|^2.$$

Если детектирующее устройство регистрирует только рассеянные частицы (например, детектор находится вне падающего пучка), то в j_z следует использовать рассеянную волну ψ_{δ} . В противном случае (регистрируются как падающие, так и рассеянные частицы, детектор находится в прямом пучке) в j_z должна быть использована полная волновая функция ψ_{γ} (см. (3.1)). В любом случае получаем

$$\sigma = r^2 \left[|\Psi|^2 \left(1 - \frac{e}{\hbar c k} A_z \right) \right] + \text{члены порядка } d^2.$$

Оценим теперь вклад члена, содержащего A_z . При $r \gg d$ радиальная компонента вектора-потенциала A_z равна $\frac{\Phi}{8r}$

$$A_z \approx \frac{\pi g d_1 R_1^2 \cos \theta}{2r^3}.$$

Входящая сюда константа g следующим образом выражается через параметры тороидального соленоида d_1 , R_1 и магнитным потоком в нем Φ :

$$g = \frac{\Phi}{2\pi} \cdot (d_1 - \sqrt{d_1^2 - R_1^2})^{-1}.$$

В результате получаем

$$\Lambda \equiv \frac{e A_z}{\hbar c k} = \frac{8 \pi d_1 R_1^2 \cos \theta}{2 k r^3} \cdot (d_1 - \sqrt{d_1^2 - R_1^2})^{-1}.$$

С учетом того, что типичные значения $\chi = e\Phi/\hbar c$ в экспериментах ~ 10 около 5, получаем $\Lambda \approx 10^{-19}$ при $r = 10$ см и $\Lambda \approx 10^{-22}$ при $r = 1$ м. Итак, с хорошей точностью имеем

$$\sigma \approx r^2 \cdot |\Psi|^2, \quad (3.3)$$

где (в зависимости от способа регистрации) под Ψ подразумевают либо Ψ_S , либо Ψ_γ .

4. В частных случаях Ψ_S существенно упрощается. Например, на оси z :

$$\Psi_\gamma = \exp(ikz) \left\{ \exp\left(\frac{ik(d+R)^2}{2z}\right) + \exp(2i\pi\chi) \left[1 - \exp\left(\frac{ik(d-R)^2}{2z}\right) \right] \right\}.$$

Для $|\Psi_\gamma|^2$ получаем

$$|\Psi_\gamma|^2 = 1 - 8 \sin\left[\frac{k(d-R)^2}{4z}\right] \cdot \sin\left(\frac{k d R}{z} - \pi\chi\right) \cdot \cos\left[\frac{k(d+R)^2}{4z} - \pi\chi\right]. \quad (3.4)$$

Это выражение существенно отличается от плосковолнового значения (равного 1). Максимумы $|\Psi_\gamma|^2$ достаточно разнесены при $\chi = 0$ и $\chi = 1/2$. Поэтому измерение интенсивности частиц на конечном отрезке оси z при $\chi = 0$ и $\chi = 1/2$ вполне реально. Совпадение результатов измерений с (3.4) должно явиться существенным аргументом в пользу существования АБ-эффекта.

Перейдем к случаю, когда регистрируются только рассеянные частицы. Отметим прежде всего, что при $\zeta \rightarrow \infty$ френелевское сечение (3.3) (в котором под Ψ следует понимать Ψ_S , определенное соотношением (3.1)) переходит в френелевское (2.1). Пусть теперь $\frac{d+R}{2\sin\theta} \ll 1$. Тогда, используя свойства функций Ломмеля J_0/ζ , находим

$$\Psi_S \approx i \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \exp(ik\zeta) \exp\left(ik \frac{d^2+R^2}{2\zeta}\right) \cdot \left[(d+R) \exp\left(i\frac{k d R}{\zeta}\right) \cdot J_0(q_1) - \exp(2i\pi\gamma) \exp\left(-i\frac{k d R}{\zeta}\right) \cdot J_0(q_2) \right].$$

Этой волновой функции соответствует сечение рассеяния

$$\tilde{\sigma}_\gamma = \sigma_0 + \left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \right)^2 \cdot (d^2+R^2) \cdot J_0^2(q_1) \cdot J_0^2(q_2) \sin^2\left(\frac{k d R}{\zeta} - \pi\gamma\right). \quad (3.5)$$

Величины σ_0 , q_1 , q_2 те же, что и в соотношении (2.2). Как и в п. 2, при не слишком малых θ функции Бесселя заменяем их асимптотическими выражениями:

$$\tilde{\sigma}_\gamma(\theta) \approx \frac{1}{2\pi k} \frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^3\theta} \cdot \left\{ \left[\sqrt{d+R} \sin\left(q_1 - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{d-R} \sin\left(q_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right]^2 + 2\sqrt{d^2-R^2} \cdot \sin\left(q_1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(q_2 - \frac{\pi}{4}\right) \sin^2\left(\frac{k d R}{\zeta} - \pi\gamma\right) \right\}. \quad (3.6)$$

Френелевские сечения (3.5) и (3.6) отличаются от соответствующих френелевских сечений (2.1) и (2.3) модификацией аргумента синуса в последнем члене ($\frac{k d R}{\zeta} - \pi\gamma$ вместо $\pi\gamma$). Это приводит к любопытным следствиям. Пусть ζ таково, что $d (= \frac{k d R}{\zeta}) = n\pi$. Тогда френелевские сечения (3.5) и (3.6) в точности совпадают с френелевскими. При $d = (n + \frac{1}{2})\pi$ френелевское сечение при $\gamma = \frac{1}{2}$ совпадает с френелевским при $\gamma = 0$. Верно и обратное. Мы уже упоминали, что экспериментальная ситуация работы \sqrt{I} адекватно описывается именно френелевской дифракцией. Попытки описать результаты эксперимента в рамках френелевской теории могут привести к ошибочному выводу об отсутствии АБ-эффекта. Например, наблюдатель, измерив при $\gamma = 1/2$ дифракционную картину и обнаружив, что она описывается френелевским сечением в отсутствие магнитного поля, может прийти к выводу об отсутствии АБ-эффекта. Могут возразить, что экспериментатор судит о существовании АБ-эффекта по сдвигу дифракционных картин при $\gamma = 0$ и $\gamma = 1/2$. Однако если ζ в (3.5) и (3.6) таково, что $d = (n + \frac{1}{2})\pi$, то френелевские сечения

совпадают при $\chi = 0$ и $\chi = 1/2$. Тогда наблюдатель из совпадения дифракционных картин при $\chi = 0$ и $\chi = 1/2$ опять-таки сделает вывод об отсутствии АБ-эффекта. В итоге мы призываем к осторожности при интерпретации экспериментов по обнаружению АБ-эффекта.

5. Подведем итоги. Мы получили френелевские сечения (3.3)-(3.6), которые адекватно описывают эксперименты Тономуры /1/ по рассеянию электронов на тороидальном соленоиде. Мы не приводим результатов численных расчетов, поскольку в /1/ не указывается расстояние от тороидального соленоида до места наблюдения. Из проведенного в п. 3 теоретического анализа следует, что перспективным является измерение интенсивности рассеянных частиц на оси симметрии. С другой стороны, интерпретация угловых распределений частиц, рассеянных тороидальным соленоидом, неоднозначна, и требуется известная осторожность при их анализе.

Литература

1. Tonomura A. *Physica*, 1988, В+С 151, 206.
2. Mollenstedt G., Schmid H. and Lichte H. *Proc. 10 th. Int. Conf. Electron Microscopy, Hamburg, 1982 (Deutsche Gesellschaft für Elektronenmikroskopie, Frankfurt, 1982) vI, p.433.*
3. Loinger A. *Riv. Nuovo Cim.*, 1987, 10, 1; Comay E., *Fizika*, 1988, 20, 241; Kobe D.H. and Liang J.Q., *Phys. Rev.*, 1988, A.37, 1133; Namiot V.A. *Phys. Lett.*, A124, 9; Boyer T.H. *Nuovo Cim.*, 1987, B100, 685; Liang J.Q. and Ding X.X. *Phys. Lett.*, 1987, A119, 325.
4. Peshkin M. *Physica*, 1988, В+С 151, 384.
5. Афанасьев Г.Н., Шиллов В.М. ОИЯИ, Р4-88-841, Дубна, 1988.
6. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций, 1949, М., ИЛ.
7. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. М., Наука, 1979.
8. Afanasiev G.N. *J. Comput. Phys.*, 1987, 69, 196; Afanasiev G.N., *J. Phys. A.*, 1988, 21, 2095.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 мая 1989 года.