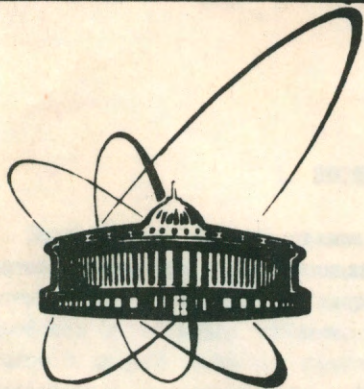


89-289



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

3 383

P4-89-289

+

Б.Н.Захарьев, В.С.Ольховский*, В.М.Шилов

СЮРПРИЗЫ КВАНТОВОГО ТУННЕЛИРОВАНИЯ
(О скорости движения пакета под барьером)

Направлено в "Journal of Physics"

*Институт ядерных исследований АН УССР, Киев

1989

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Подбарьерное туннелирование - наиболее яркое проявление специфики квантовой механики. Оно принципиально важно для ядерного деления и синтеза, для большинства ядерных реакций. С ним связаны эффект Джозефсона и создание туннельного микроскопа. И хотя туннелирование изучают с самого создания квантовой теории, в нем остается еще много интересного и непонятого. Это особенно касается многочастичных аспектов явления, но и в простейшем одномерном случае движения одной частицы во внешнем поле имеются загадочные моменты. Так, в работе Флетчера^{/1/} было обнаружено (см. рис.1), что в зависимости от ширины барьера A время t_A пребывания волнового пакета под барьером сначала линейно возрастает, а затем выходит на насыщение. Получается как бы ускорение волн при прохождении длинных барьеров: средняя скорость движения в области барьера возрастает с его длиной. Но Флетчер не исследовал временную эволюцию волнового пакета внутри подбарьерной области. Происходит ли движение в разных ее точках с одинаковой скоростью, или отдельные участки преодолеваются быстрее (медленнее)? Определение "подбарьерной скорости" как функции расстояния x , например от начала барьера, могло бы пролить дополнительный свет на интригующую проблему объяснения природы найденного эффекта.

В данной работе сделаны оценки моментов времени, когда "центр масс" пакета или его максимум находятся в разных точках подбарьерной области. Оказалось, что движение экспоненциально замедляется в направлении от начала к концу барьера, так что время на прохождение подбарьерной области тратится в основном в конце барьера.

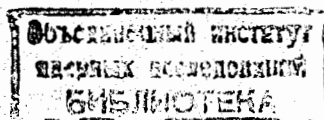
2. СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Рассмотрим сначала простейший случай прямоугольного барьера.

В области до барьера ($x < 0$) при фиксированной энергии E волновая функция представляет собой сумму падающей и отраженной волн ($\hbar = m = 1$):

$$\Psi(x) = \exp(ikx) + R \exp(-ikx); \quad x < 0; \quad k = (2E)^{1/2}. \quad (1)$$

Под барьером она имеет вид линейной комбинации экспоненциально растущего и убывающего решений



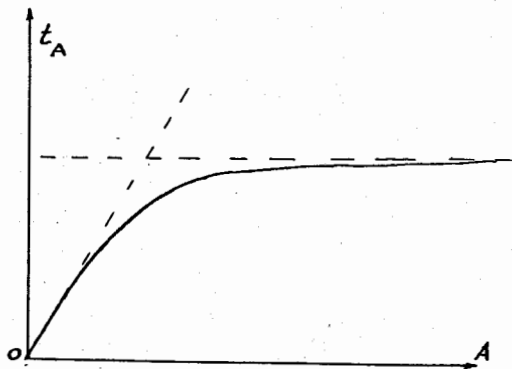


Рис.1 Зависимость времени задержки пакета под барьером t_A от ширины барьера A . Горизонтальный участок кривой свидетельствует о том, что при достаточно длинном барьере дополнительное его удлинение не приводит к лишней затрате времени на туннелирование сквозь него. Наклонная штриховая линия соответствует постоянной конечной скорости пакета.

$$\Psi(x) = \alpha \exp(-\kappa x) + \beta \exp(\kappa x); \quad 0 < x < A; \quad \kappa = \{2(V-E)\}^{1/2}. \quad (2)$$

За барьером имеется только прошедшая волна

$$\Psi(x) = T \exp(ikx). \quad (3)$$

Поток

$$J = i/2m [\Psi(x) \Psi^{*'}(x) - \Psi^{*}(x) \Psi'(x)], \quad (4)$$

в соответствии с законом его сохранения, имеет постоянную величину до, внутри барьера и за ним. До барьера он представляет собой сумму потоков падающей и отраженной волн - двух компонент линейной комбинации (1). Менее известно, что внутри барьера потоки для отдельных компонент решения (растущей и убывающей) равны нулю, и лишь их интерференция обеспечивает сохранение J .

Условно можно было бы сказать о потоках, идущих в противоположные стороны под барьером в произвольной точке x_1 . Укоротим барьер, отбросив ту его часть, которая расположена правее x_1 , но оставим нетронутым решение (1,2) слева от x_1 . Чтобы его продолжить гладко вправо, за обрезанный барьер, необходимо ввести при $x > x_1$ волны, бегущие в обе стороны (поток J_- налево должен быть меньше потока J_+ направо, чтобы сохранялся полный поток J). Сдвигая точку x_1 обрезания барьера и

сшивая каждый раз со свободными решениями справа, мы получаем информацию о величине потоков J_+ , J_- в зависимости от положения x_1 (экспоненциальное убывание с ростом x_1). Если интерпретировать эти расчеты как определение потоков J_+ , J_- под барьером, то можно сказать, что, по мере продвижения под барьером, все большая часть потока слева поворачивает назад, а в точке $x = A$ поток J_+ пропадает совсем.

Другим интересным фактом является то, что растущее решение сравнивается по модулю со спадающим в конце барьера. Коэффициент α в $\exp(2\kappa A)$ раз больше β :

$$\alpha = 2ik(ik - \kappa) \exp[A(\kappa - ik)]/D, \quad (5)$$

$$\beta = -2ik(ik + \kappa) \exp[A(\kappa + ik)]/D,$$

где

$$D = (ik - \kappa)^2 \exp(2\kappa A) - (ik + \kappa)^2 \exp(-2\kappa A),$$

так что фактически растущее решение экспоненциально спадает в сторону начала барьера от величины, до которой уменьшилось спадающее решение в конце подбарьерной области.

3. ПОСТРОЕНИЕ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

Будем составлять пакет из стационарных решений Ψ из (1-3), интегрируя их с весом:

$$\Psi_{\text{пак}}(t, x) = \int dk g(k) \Psi(k, x) \exp(-iEt). \quad (6)$$

Известно, что если выбрать весовой множитель $g(k)$ в виде гауссовой функции $C \exp[-(k-k_0)^2]$, то и в конфигурационном пространстве часть пакета, отвечающая падающим волнам, будет иметь гауссову форму. Интеграл в (6) от отраженных и прошедших стационарных волн должен дать соответственно отраженный и протуннелировавший пакеты. Но возникает вопрос: не приведет ли энергетическая зависимость коэффициентов $R(k)$ и $T(k)$ к появлению непренебрежимых компонент пакета, например за барьером, еще до того, как падающий пакет достигнет барьера? Это помешало бы физической интерпретации расчетов. Для проверки были выполнены расчеты формы пакета в конфигурационном пространстве при разных весовых функциях $g(k)$ в моменты времени, когда пакет, построенный из плоских волн $\exp(ikx)$, еще не достиг барьера. На рис.2а представлен один такой случай. Причем для большей наглядности часть пакета, расположенная под барьером, умножалась на растущую экспоненту $\exp[(V-k_0^2/2)^{1/2} x]$, а за барьером - на множитель $\exp[(V-k_0^2/2)^{1/2} a]$,

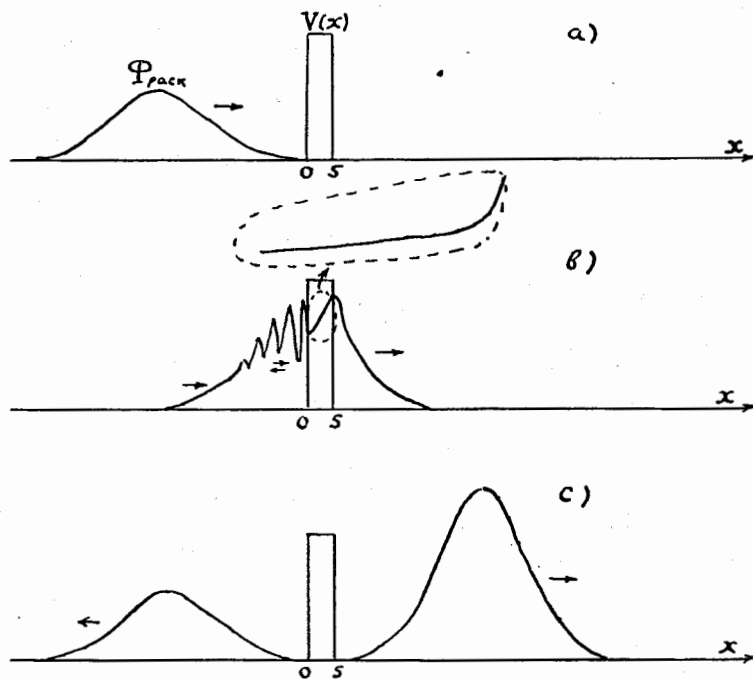


Рис.2 форма пакета в случае весовой функции, выбранной в виде $g(k) = \exp[-b(k - k_0)^2]$ с обрезанием по E вне интервала: $0 < E < V$; для следующих значений параметров $E_0 = 0,5$; $A = 5$; $b = 40$; и разных моментов времени: а) $t = -30$; б) $t = -5$; в) $t = 30$. Под- и забарьерные части пакетов изображены с экспоненциальным усилением (подбарьерная часть пакета на рис б, окруженная штриховой линией, показана дополнительно в увеличенном виде).

чтобы скомпенсировать экспоненциальное затухание волн под барьером. Тогда всем, что много меньше части пакета до барьера, можно пренебрегать. Из рис.2 следует, что падающий пакет вполне допустимо строить из стационарных решений (1 - 3). Наличие отраженной и прошедшей волн в стационарных решениях, из которых построен пакет, не приводит к появлению заметных следов лишних (преждевременных) пакетных образований

даже при указанном экспоненциальном их усилении под и за барьером. Зависящие от энергии коэффициенты отражения $R(E)$ и прохождения $T(E)$, являющиеся дополнительными весовыми множителями при формировании пакетов из свободных волн $\exp(\pm ikx)$ до и после барьера, приводят лишь к сдвигам пакетов по времени в соответствии с принципом причинности: отраженный и прошедший пакеты появляются только тогда, когда падающий достигает барьера. Кроме того, желательно, чтобы пренебрежимо мала была и надбарьерная часть пакета, не участвующая в туннелировании, но искажающая картину подбарьерного проникновения волн. Эти вопросы мы обсудим позднее, когда коснемся пределов, за которыми наши расчеты теряют смысл.

Естественно определить средний момент прохождения пакета через точку x по формуле^{/2/}:

$$t_x = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} t |\Phi_{\text{pack}}(t, x)|^2 dt \right\} / \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{\text{pack}}(t, x)|^2 dt \right\}. \quad (7)$$

Особенно просто проводить вычисления по этой формуле для весовой функции $g(k)$, для которой

$$g(k)^2 = \delta(k^2 - k_0^2) \equiv \delta(E - E_0). \quad (8)$$

Действительно, в этом случае, подставляя (6) и (8) в (7), имеем (arg $g=0$)

$$t_x = \partial \arg [\Psi(t, x)] / \partial E. \quad (9)$$

При выводе (9) мы заменяли в числителе формулы (7) время t на производную

$$t \exp(-iEt) \rightarrow i \partial \exp(-iEt) / \partial E$$

и использовали дифференцирование по частям.

Точно та же формула (9) получается и по методу стационарной фазы, когда мы следим за движением максимума пакета.

Расчеты времен прохождения пакета по формуле с усреднением по потоку

$$j_{\text{pack}} = 1/2 [\Phi_{\text{pack}}^*(x, t) \Phi_{\text{pack}}'(x, t) - \Phi_{\text{pack}}^*(x, t) \Phi_{\text{pack}}'(x, t)];$$

$$t_x = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} t j_{\text{pack}}(x, t) dt \right\} / \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} j_{\text{pack}}(x, t) dt \right\} \quad (10)$$

будут выполнены в следующей работе.

4. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ РАССМАТРИВАЕМОГО ПОДХОДА

При построении пакета мы интегрируем решения с разными энергиями. Волны с энергиями выше барьера должны быть либо взяты с пренебрежимо малым весом, чтобы не исказить картину подбарьерной проникаемости пакета, либо обрезаны полностью. Это, однако, приводит к пространственному размазыванию пакета, что может помешать четкости картины временной эволюции процесса. Количественной оценкой предела корректности подхода может служить здесь сравнение экспоненциально малой амплитуды прошедших волн с амплитудой надбарьерных компонент пакета.

Другой предел ставит неограниченное увеличение скорости v_{pack} распространения пакета с ростом ширины барьера. Это ограничивает допустимые размеры барьеров в нерелятивистском подходе ($v_{\text{pack}} < c$).

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На рис. 3 представлена зависимость t_x для барьеров разной длины A . Все кривые, изображенные на этом рисунке, исходят из нулевой точки. Но это происходит только, если отсчитывать t_x и t_A не от момента, когда начала барьера достигает центр падающей части пакета (построенной из $\exp(ikx)$), а от момента t_0 , когда в точке $x = 0$ находится центр всего пакета (с падающей и отраженной компонентами, — последняя имеет существенную задержку во времени).

Крутой подъем кривых t_x в конце барьера отвечает затуханию "скорости пакета под барьером" при его "движении" от $x = 0$ к $x = A$.

Наши расчеты согласуются с результатами Флетчера^{/1/} как в том, что время задержки t_A для достаточно широких барьеров перестает зависеть от A , так и в том, что такие предельные времена задержки оказываются минимальными для средней энергии пакета, равной половине высоты барьера. Это можно увидеть из аналитического выражения для времени задержки в случае широких барьеров^{/1/}:

$$t_A = \hbar [E(V - E)]^{-1/2}$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Еще предстоит понять, может ли рассмотренное явление туннельного ускорения (в целом, но замедления по длине барьера) привести к существенным наблюдаемым эффектам (в смысле практических приложений).

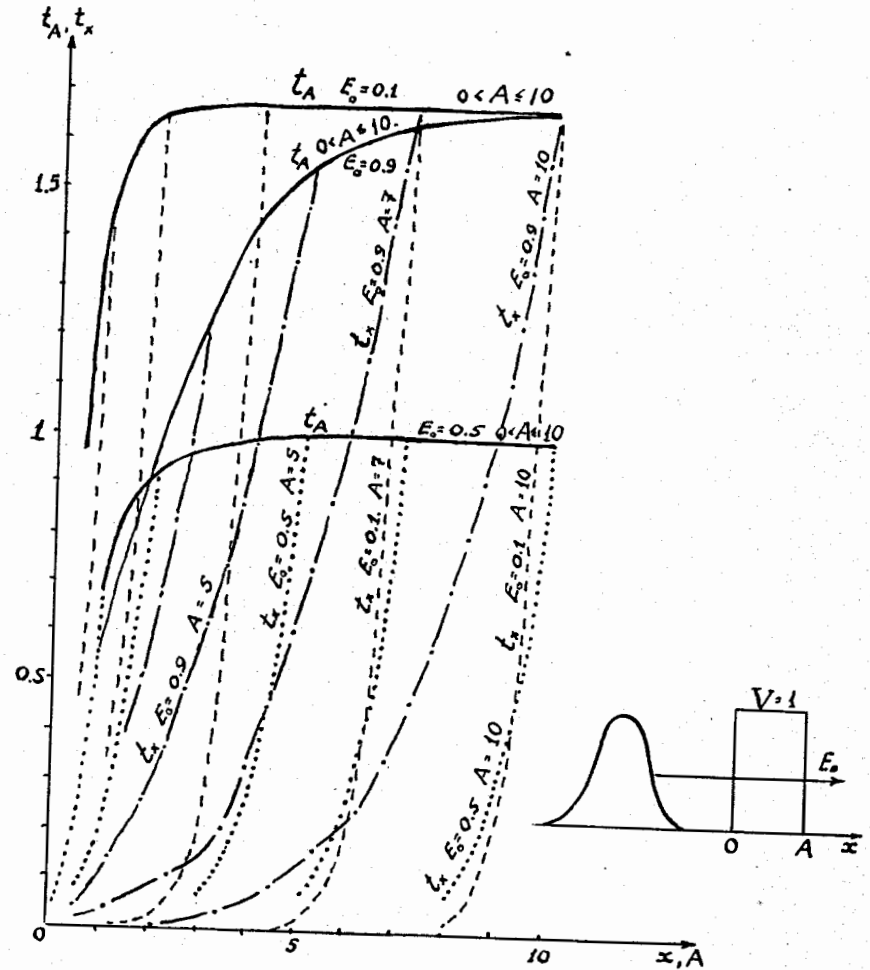


Рис. 3. Времена t_x прохождения "центра масс" пакета через точку x в зависимости от положения этой точки под барьером: $0 < x \leq A$ при разных значениях средней энергии E пакета: $E_0 = 0,1$ (---); $E_0 = 0,5$ (.....); $E_0 = 0,9$ (- · - · -). Времена t_A задержки пакета барьером в зависимости от ширины барьера A (—).

Интересно было бы, например, выяснить, не проявятся ли особенности временной эволюции туннелирования в явлениях типа эффекта Джозефсона. Но, во всяком случае, неожиданное поведение пакетов под потенциальными барьерами делает более полными наши представления о специфике квантовых закономерностей.

Интересно было бы рассмотреть, к каким новым аспектам поведения квантовых пакетов может привести многомерное обобщение^{*} данного явления ("преломление" в барьерном слое ?) .

Авторы признательны Л. Г. Заставенко, В. Г. Кадышевскому, В. Л. Любошицу, В. П. Пермякову, А. Радошу и М. И. Широкову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fletcher J. R. J. Phys. C18, L55, 1985.
2. Ольховский В. С. ЭЧАЯ 15, N 2, с. 289, 1984.
3. Захарьев Б. Н., Сузько А. А. Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задача. Энергоатомиздат. М. 1985.
4. Тараканов А. В., Шилов В. М. ЯФ, 48, 1(7), с. 109, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 апреля 1989 года.

^{*} Эффекты усиления (ослабления) и нарушения симметрии проницаемости в многоканальных и многочастичных системах с туннелированием рассматривались раньше авторами /3, 4/.