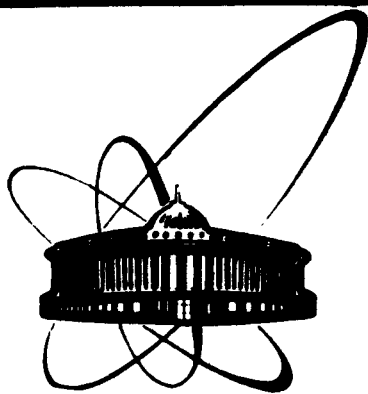


89-184



**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

Б 495

Р4-89-184

Ю.Л.Болотин*, С.И.Виницкий, В.Ю.Гончар*,
Н.А.Чеканов*

**ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС
В ЛИНЕЙНОЙ 3α -СИСТЕМЕ**

Направлено в журнал "Ядерная физика"

*Харьковский физико-технический институт АН УССР

I. Введение

Явление классического детерминированного хаоса, связанное с локальной неустойчивостью траекторий в непрерывном фазовом пространстве и проявляющееся в экспоненциальном разбегании фазовых траекторий, близких в начальный момент времени, обнаружено в различных динамических системах: атом водорода в магнитном поле, электромагнитные волны в плазме и т.д., а также моделях типа билиярда, двух связанных осцилляторов и ротаторов с "толчками" $1/4$.

В настоящей работе изучается возможность возникновения хаоса в одной из простейших моделей ядра ^{12}C - линейной 3α -цепочке, используемой для описания спектра ядра углерода. Изучение классической динамики такой системы обнаруживает с ростом энергии довольно резкий переход от регулярного движения к хаотическому при достаточно общих предположениях о характере $\alpha-\alpha$ взаимодействия. Выполненный в настоящей работе анализ структуры классического фазового пространства для реалистического $\alpha-\alpha$ взаимодействия позволяет сделать важные выводы о статистических свойствах энергетического спектра и волновых функций соответствующей квантовой системы.

Основные результаты работы следующие.

На классическом уровне аналитически и численно исследована линейная цепочка из трех α -частиц с реалистическим взаимодействием. Для такой системы с произвольным парным взаимодействием найдены условия, при которых ее гамильтониан имеет C_{3v} -симметрию.

Численные расчеты, проведенные для 3α -системы с известными силами Али-Бодмера, обнаружили хаотический режим движения. При этом критическая энергия перехода к хаосу хорошо согласуется с теоретическим предсказанием по критерию отрицательной гауссовой кривизны.

Обнаружено, что переход к хаосу в 3α -системе происходит с ростом энергии быстрее, чем в модельных задачах с полиномиальными потенциалами. Отличительная черта 3α -системы, связанная, по-видимому, с нарушением C_{3v} -симметрии, состоит в том, что в небольшой области фазового пространства регулярный характер движения сохраняется при энергиях выше энергии диссоциации 3α -системы.

Степенное приближение 4-го порядка, хорошо аппроксимирующее поверхность потенциальной энергии 3α -системы до энергий, соответствующих линии нулевой гауссовой кривизны, позволило получить нормальную форму Биркгофа и, проквантовав ее, дать явные выражения для квазиклассического спектра 3α -системы.

2. Основные динамические свойства линейной трехчастичной системы

Функция гамильтониана линейной цепочки из трех частиц 3α -системы (см. рис.1) представлена в виде

$$H = \frac{1}{2m} \sum_i p_{x_i}^2 + V(x_1, x_2, x_3) \quad (i=1,2,3), \quad (1)$$

$$V(x_1, x_2, x_3) = V(x_1 - x_2) + V(x_2 - x_3) + V(x_3 - x_1), \quad (2)$$

где x_i, p_{x_i} - канонически-сопряженные координаты и импульсы i -й α -частицы, $V(x)$ - потенциальная функция взаимодействия двух α -частиц. Равновесная конфигурация 3α -системы определяется минимумом потенциальной функции (2), в частности, равновесное значение находится из условия

$$V'(-l) + V'(2l) = 0. \quad (3)$$

Штрихи означают дифференцирование функции $V(x)$ по переменной x . Заметим, что если пренебречь членом $V(x_1 - x_3)$ в выражении (2), который для большинства физических систем мал, то равновесное значение l определяется условием $V'(-l) = 0$.

Рассмотрим некоторые общие свойства степенного приближения для потенциальной функции 3α -системы, минимальным образом учитывающего нелинейные эффекты. Пусть u_i - отклонения каждой из α -частиц от положения равновесия

$$x_1 = u_1 - l, \quad x_2 = u_2, \quad x_3 = u_3 + l, \quad (4)$$

причем $u_1 + u_2 + u_3 = 0$. Разложение в ряд Тейлора каждого члена потенциальной энергии (2) в кубическом приближении с учетом соотношения (3) приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} V(u_1, u_2, u_3) = & 2V(-l) + V(2l) + \frac{1}{2} V''(-l) [(u_1 - u_2)^2 + (u_2 - u_3)^2] + \\ & + \frac{1}{2} V'(2l) (u_3 - u_1)^2 + \frac{1}{6} V'''(-l) [(u_1 - u_2)^3 + (u_2 - u_3)^3] + \\ & + \frac{1}{6} V'''(2l) (u_3 - u_1)^3. \end{aligned} \quad (5)$$

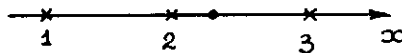


Рис.1. Координаты линейной 3α -системы.

Как обычно, переходим к новым переменным q_i , в которых кинетическая и потенциальная части гамильтониана (5) диагональны в квадратичном приближении. Тогда потенциальная функция в новых переменных

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} q_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} q_2, \quad u_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} q_2, \quad u_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} q_2 \quad (6)$$

имеет вид

$$U(q_1, q_2) = \frac{1}{2} (\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2) + \alpha q_1^2 q_2 + \beta q_2^3, \quad (7)$$

где

$$\omega_1^2 = 3 V''(-l), \quad \omega_2^2 = V''(-l) + 2 V''(2l),$$

$$\alpha = \frac{3 V'''(-l)}{2\sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{V'''(-l) - 4 V'''(2l)}{6\sqrt{2}}.$$

1. Если равновесное значение $l = 0$, то гамильтониан (I) инвариантен относительно преобразований, составляющих группу $C_{3v}^{1/6}$.

При этом его степенное разложение выражается через две функции:

$(q_1^2 + q_2^2)$ и $(q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3)$. Тогда в кубическом приближении гамильтониан (I) сводится к хорошо известному гамильтониану Хенон-Хейлеса¹⁷⁾.

Это обстоятельство подтверждается формулой (7), полученной прямым разложением в ряд Тейлора, в котором надо положить $l = 0$.

2. Если потенциальная функция (2) имеет минимум при $l = 0$, как для 3α -системы с двухчастичным взаимодействием молекулярного типа, то необходим более тщательный анализ.

а) Для большинства физических систем вкладом члена $V(x_3 - x_1)$ в выражении (I) можно пренебречь, поэтому в кубическом приближении имеем

$$U(q_1, q_2) = \frac{V''}{2} (3q_1^2 + q_2^2) + \frac{3V'''}{2\sqrt{2}} (q_1^2 q_2 + \frac{1}{9} q_2^3). \quad (8)$$

Производные в этом соотношении и ниже вычисляются в точке $x = -l$.

Поверхность потенциальной энергии, описываемая этой функцией (см.

рис.2а), имеет четыре особые точки: минимум в $q_1 = q_2 = 0$, максимум

в $q_1 = 0, q_2 = -2\sqrt{2} V''/V'''$ и два седла в $q_1 = \pm \sqrt{2/3} \times$

$\times \sqrt{V''/V'''}, q_2 = \sqrt{2} V''/V'''$.

В качестве единицы времени T_0 , естественно, выбираем период предельных колебаний осциллятора вблизи минимума потенциальной функции (2): $T_0 = \sqrt{m/V''}$; для единиц длины L_0 и энергии E_0 используем следующие величины:

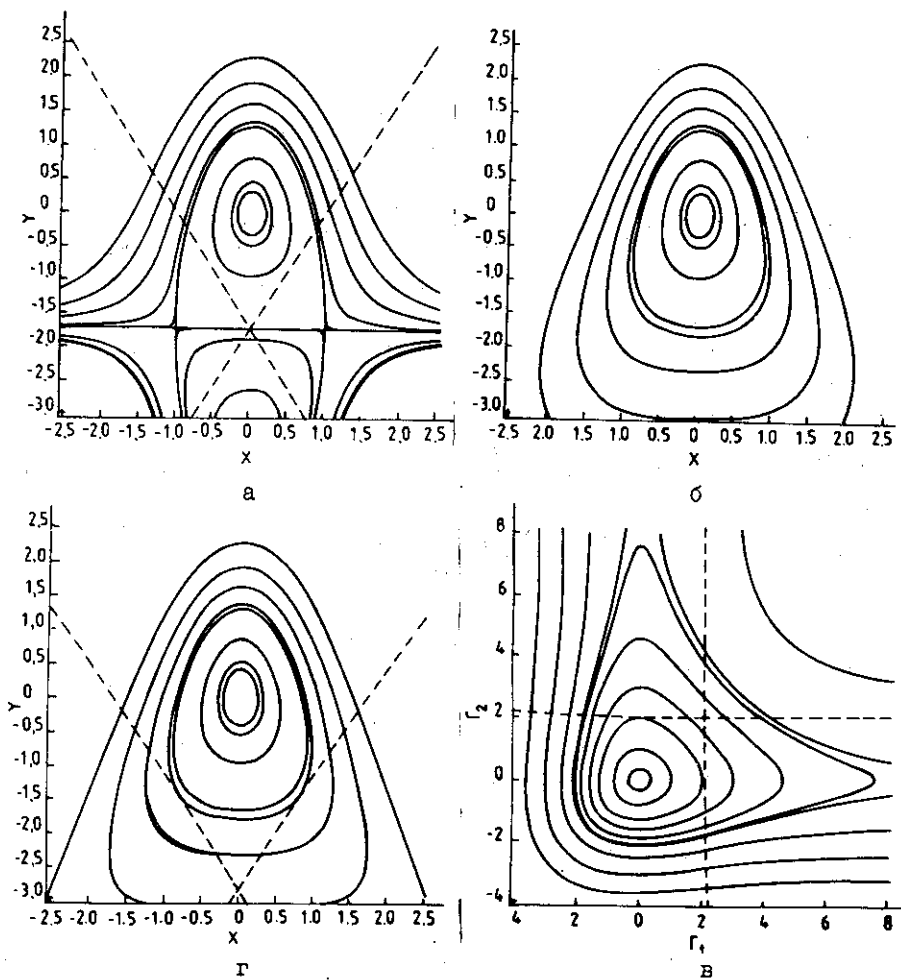


Рис.2. Контуры поверхности потенциальной энергии (I4) в кубическом (а), четвертом (б) приближениях и точной (full) (в), вычисленные с α - α -потенциалом Али-Бодмера (I3) в переменных x, y . Контуры той же точной ППЭ (I4), но в переменных

$$\Gamma_1 = x_1 - x_2 = L_0 (\sqrt{3/2} x + \sqrt{1/2} y),$$

$$\Gamma_2 = x_2 - x_3 = L_0 (-\sqrt{3/2} x + \sqrt{1/2} y)$$

(рис.2г). Штриховая линия соответствует линии нулевой гауссовой кривизны ППЭ (I4).

$$L_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{V''}{V'''} \right|, \quad E_0 = \frac{2}{3} \frac{V''^3}{V'''^2}. \quad (9)$$

В безразмерных переменных $x = q_1/L_0$, $y = q_2/L_0$ гамильтониан трехчастичной линейной цепочки сводится к "универсальному" выражению

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + U, \quad U = \frac{1}{2} (3x^2 + y^2) + \frac{s\sqrt{3}}{2} (x^2y + \frac{1}{9}y^3), \quad (10)$$

где $s = \text{sign} [V'''(-l)]$, т.е. не зависит от функционального вида двухчастичного потенциала.

б) Если кубическое приближение в интересующей нас области энергий является плохой аппроксимацией исходного потенциала (2)*, следует перейти к приближениям более высокого порядка точности:

$$U(x, y) = \frac{1}{2} (3x^2 + y^2) + \frac{\sqrt{3}}{2} (x^2y + \frac{1}{9}y^3) + \frac{v_4}{72} (9x^4 + 18x^2y^2 + y^4) + \frac{v_5}{360\sqrt{3}} (45x^4y + 30x^2y^3 + y^5) + \frac{v_6}{6480} (27x^6 + 135x^4y^2 + 45x^2y^4 + y^6), \quad (11)$$

где $v_4 = \frac{V'' \cdot V^{(IV)}}{V'''^2}$, $v_5 = \frac{V''^2 V^{(V)}}{V'''^3}$, $v_6 = \frac{V''^3 V^{(VI)}}{V'''^4}$.

Напомним, что каноническое преобразование (6) к якобиевым переменным q_i генерируется производящей функцией второго типа:

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - x_3) p_1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{x_1 + x_3}{2} - x_2 \right) p_2 + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}} p_3, \quad (12)$$

причем $p_{x_i} = \frac{\partial F_2}{\partial x_i}$, $q_i = \frac{\partial F_2}{\partial p_i}$ ($i = 1, 2, 3$).

3. Феноменологические взаимодействия

а) Потенциал Али-Бодмера

Ниже приведены результаты численных расчетов для α - α взаимодействия¹⁸⁾

*) Так, например, кубическое приближение для потенциала (14) содержит седла, которых нет в исходном потенциале (см. рис.2а-2в).

$$V(x) = A \exp(-a_1 x^2) + B \exp(-a_2 x^2) \quad (13)$$

при значениях $A=500$ МэВ, $B=-130$ МэВ, $a_1=0,49$ фм⁻², $a_2=0,226$ фм⁻². Легко видеть, что $\alpha-\alpha$ потенциал имеет молекулярный характер, т.е. потенциальная функция (2) минимальна, если соседние α -частицы находятся на расстоянии $l=2,8313$ фм друг от друга. В якобиевых безразмерных переменных x, y потенциальная функция в единицах E_0 имеет вид

$$U(x, y) = a \left(e^{-\alpha \xi^2} + e^{-\alpha \eta^2} + e^{-\alpha \zeta^2} \right) + b \left(e^{-\beta \xi^2} + e^{-\beta \eta^2} + e^{-\beta \zeta^2} \right), \quad (14)$$

где $\xi = \sqrt{3/2} x + 1/\sqrt{2} y$, $\eta = -\sqrt{3/2} x + 1/\sqrt{2} y$, $\zeta = -\sqrt{2} y$,

$$\alpha = L_0 a_1, \quad \beta = L_0 a_2, \quad A = a E_0, \quad B = b E_0.$$

Контуры $U(x, y)$ изображены на рис. 2в, 2г. Единицы длины L_0 и энергии E_0 , определяемые формулами (9) для заданного $\alpha-\alpha$ потенциала Али-Бодмера (13), равны $L_0=0,2726$ фм и $E_0=3,0314$ МэВ.

Как показывает проведенный численный расчет поверхности потенциальной энергии (см. рис. 2), степенное приближение четвертого порядка хорошо воспроизводит эту поверхность до энергий, соответствующих линии нулевой гауссовой кривизны (штриховая линия на рис. 2в, г) *).

б) Эффективный $\alpha-\alpha$ потенциал в модели Скирма

Сравним реалистический $\alpha-\alpha$ потенциал Али-Бодлера с потенциалом взаимодействия двух α -частиц, получаемым с помощью эффективного взаимодействия Скирма^{9/}. Для скирмовского взаимодействия в случае $N=Z$, как известно, плотность энергии имеет вид^{10/}

$$H(\vec{r}) = \frac{\hbar^2}{2m} \tau + \frac{3}{8} t_0 \rho^2 + \frac{1}{16} (3t_1 + 5t_2) \rho \tau - \frac{1}{64} (9t_1 - 5t_2) \rho \nabla^2 \rho + \frac{1}{16} t_3 \rho^3, \quad (15)$$

где τ - плотность кинетической энергии:

$$\tau = \sum_a \nabla \varphi^{(a)} \nabla^* \varphi^{(a)}, \quad (16)$$

* На самом деле область применимости этого приближения несколько шире.

ρ - собственно плотность:

$$\rho = \sum_a \varphi^{(a)} \varphi^{*(a)}, \quad (I7)$$

и $\varphi^{(a)}$ - одночастичная хартри-фоковская волновая функция a -го нуклона. Сумма берется по частицам системы и по спин-изоспиновым переменным.

Предполагая, что нуклонная плотность внутри каждой α -частицы имеет гауссово распределение

$$\rho^{(a)} = 4c^2 \exp \left\{ -\alpha (\vec{r} - \vec{R}_a)^2 \right\}, \quad c = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/4}, \quad (I8)$$

где \vec{R}_a - положение центра распределения плотности a -й α -частицы ($a = 1, 2$), получим эффективное α - α взаимодействие $V(x)$, $x = |\vec{R}_1 - \vec{R}_2|$, выраженное через параметры скирмовского взаимодействия t_0, t_1, t_2, t_3 :

$$V(x) = k_1 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha x^2 \right\} + k_2 x^2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha x^2 \right\} + k_3 \exp \left\{ -\frac{2}{3} \alpha x^2 \right\}, \quad (I9)$$

$$k_1 = \frac{3}{2} \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^{3/2} (t_0 + \frac{3}{2} \alpha t_1),$$

$$k_2 = \frac{\alpha^2}{8} \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^{3/2} (5t_2 - 3t_1), \quad k_3 = \frac{t_3}{\sqrt{3}} \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^3.$$

Для шести часто используемых наборов параметров, задающих взаимодействие Скирма, эффективный потенциал (I9) - также молекулярного типа, он качественно воспроизводит поведение реалистического потенциала (I3). Эффективный потенциал (I9) чувствителен к параметру α , определяющему размер α -частицы. Вариацией последнего можно добиться и качественного согласия между обоими потенциалами. Отметим, что при выключении скоростных членов ($t_1 = t_2 = 0$) молекулярный характер эффективного взаимодействия сохраняется, выключение части взаимодействия, зависящей от плотности ($t_3 = 0$), приводит к смещению минимума потенциала (I9) в точку $x = 0$.

4. Квазиклассический спектр

Расчет энергетического спектра двумерного гамильтониана (I) с ШЭ (I4) - трудоемкая задача, поэтому можно в качестве первого шага воспользоваться квазиклассическими методами квантования.

Используем степенное разложение потенциальной функции (II) для

вычисления нижних энергетических уровней 3α -системы, после приведения гамильтониана к нормальной форме Биркгофа^{/15/}. Для этого представим гамильтониан трехчастичной α -цепочки в четвертом приближении в виде

$$H = H_0 + \frac{1}{2\sqrt{3}} (x^2y + \frac{1}{3}y^3) + \frac{U_4}{72} (x^4 + 6x^2y^2 + y^4),$$

$$H_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} (p_x^2 + x^2) + \frac{1}{2} (p_y^2 + y^2). \quad (20)$$

Данное выражение получено из гамильтониана (II) обычной заменой $p_x \rightarrow \sqrt{\omega_x} p_x$, $p_y \rightarrow p_y$, $x \rightarrow x/\sqrt{\omega_x}$, $y \rightarrow y (\omega_x = \sqrt{3})$, приводящей квадратичную часть (II) к нормальной форме. В случае выбора $\alpha - \alpha$ взаимодействия, принятого в (13), коэффициент $U_4 = 0,5207$.

Гамильтониан H задан в нормальной форме, если обращается в нуль скобка Пуассона:

$$\{H_0, H\} = 0. \quad (21)$$

Процедура приведения гамильтониана H к нормальной форме Γ осуществляется, см., напр.,^{/16/} серией канонических преобразований $(x, y, p_x, p_y) \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$. В результате гамильтониан Γ в новых переменных зависит только от функций $I_1 = \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \eta_1^2)$ и $I_2 = \frac{1}{2} (\xi_2^2 + \eta_2^2)$, т.е. имеет нормальную форму Биркгофа.

Фактически нормальная форма $\Gamma(I_1, I_2)$ представляет собой асимптотический ряд по степеням переменных I_1 и I_2 , поэтому обычно ограничиваются конечным числом членов ряда.

Нормальная форма гамильтониана (20) в шестом приближении имеет вид

$$\Gamma(I_1, I_2) = 1,73205 I_1 + I_2 - 10^{-2} [8,6776 I_1^2 + 2,3876 I_2^2 + 14,7916 I_1 I_2] - 10^{-3} [2,319 I_1^3 + 0,233 I_2^3 + 1,128 I_1^2 I_2 + 7,744 I_1 I_2^2]. \quad (22)$$

Квантование гамильтониана в нормальной форме Биркгофа легко выполнить^{/17/} заменой $I_1 = n_1 + \frac{1}{2}$ и $I_2 = n_2 + \frac{1}{2}$ (n_1, n_2 - целые положительные числа), поскольку величины I_1 и I_2 есть переменные действия и являются адиабатическими инвариантами. Тогда квазиклассический спектр гамильтониана (20) линейной 3α -системы находится по формуле

$$E_{n_1 n_2} = \Gamma(I_1, I_2), \quad (23)$$

где нормальная форма Γ определяется выражением (22).

5. Численные результаты и выводы

Как известно [10, 12], возникновение в гамильтоновой системе локальной неустойчивости, порождающей стохастические режимы, может быть связано с попаданием частицы в области поверхности потенциальной энергии с отрицательной гауссовой кривизной. Тогда критическая энергия перехода от регулярного движения к хаотическому равна минимальной энергии на линии нулевой гауссовой кривизны. В самом деле, поверхность потенциальной энергии (I4) имеет области отрицательной кривизны, показанные на рис. 2в, г штриховой линией. Определенная согласно принятому правилу критическая энергия для системы (I4) $E_{кр} = 0,3 E_d$ (E_d — энергия диссоциации 3α -системы, $E_d = 11,4855$ МэВ) хорошо согласуется с эмпирическим наблюдением хаоса с помощью сечения Пуанкаре (см. рис. 3). Сечения Пуанкаре, которые представляют собой "следы", оставляемые фазовой траекторией при "протыкании" некоторой плоскости, дают наглядный метод определения характера движения для гамильтоновых задач с двумя степенями свободы.

Как видно из рис. 3, при низких энергиях движение регулярно, но с увеличением энергии возникают области фазового пространства, заполненные хаотическими траекториями, они расширяются. В сечении Пуанкаре на фазовой плоскости (p, y) вместо замкнутых кривых, связанных с дополнительным (кроме энергии) интегралом движения, появляются случайным образом разбросанные точки, отображающие хаотические траектории. В рассматриваемой 3α -системе с реалистическими силами (I3) хаос развивается с увеличением энергии значительно быстрее, чем в системах с полиномиальными потенциалами. Уже при энергии $E = 0,4 E_d$ (рис. 2б) область регулярного движения значительно уменьшилась по сравнению с той же областью при критической энергии $E_{кр} = 0,3 E_d$.

Обнаружена также еще одна интересная особенность в поведении линейной 3α -системы. Численные расчеты показывают, что имеются небольшие области фазового пространства, в которых сохраняется регулярное движение даже при энергиях выше порога диссоциации системы.

Аналогичная ситуация имеет место при исследовании молекулярной системы с морсовскими силами [13]. Как следует из нашего исследования (подробности см. в [6]), гамильтонианы обеих этих систем не являются C_{3v} -инвариантными. Поэтому можно предположить, что наличие областей стабильности при энергиях выше порога диссоциации связано с нарушением C_{3v} -симметрии.

На рис. 4 сравнивается характер поведения во времени хаотических траекторий $x(t)$, изображенных в верхней части каждого из рисунков 4а, 4б и 4в, с регулярными траекториями, нарисованными под ними. Как хаотические, так и регулярные траектории вычислены при одной и



а



б



в

Рис.3. Сечения Пуанкаре в плоскости (φ, y) при $x=0$ для гамильтониана (I) с ШЭ (I4) при энергиях $E=0,3 E_d$ (а), $E=0,4 E_d$ (б) и $E=0,5 E_d$ (в), где E_d - энергия диссоциации 3α -системы.

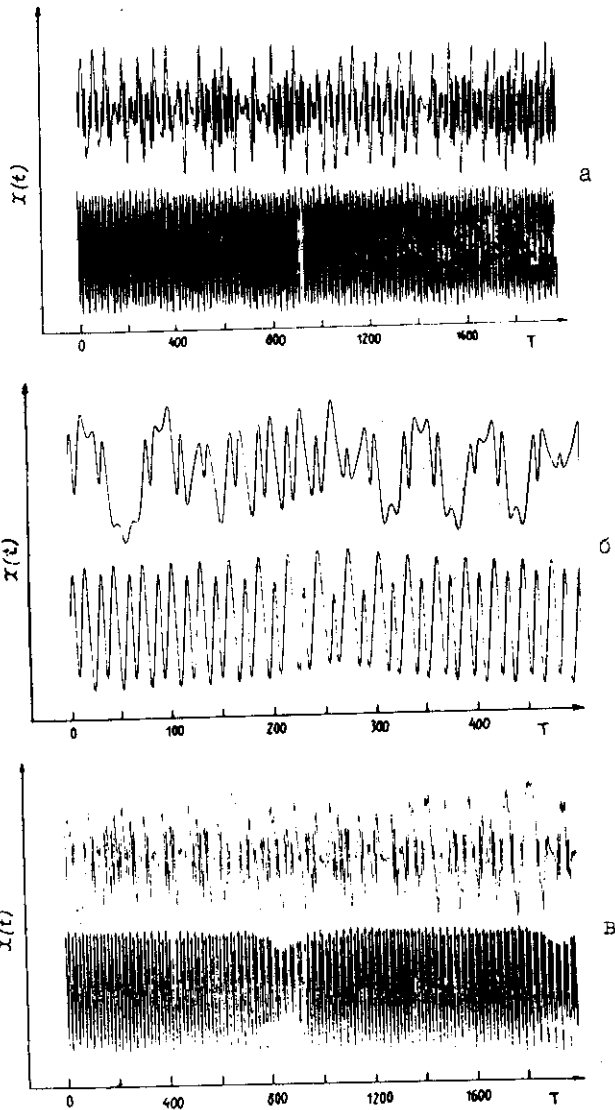


Рис.4. Временная зависимость траекторий $x(T)$ при одной и той же энергии $E=0,5 E_d$, но с разными начальными данными. В каждой строке а,б,в рисунка все верхние графики имеют начальные данные, лежащие в области фазового пространства с хаотическими траекториями, все нижние - с регулярными траекториями.

той же энергии $E=0,5E_d$, но с разными начальными данными. Как видно из рис.4, хаотические траектории имеют хотя и более сложную временную зависимость, но тем не менее большую часть времени ведут себя достаточно регулярно, за исключением очень короткого времени, в течение которого происходит толчок, переводящий систему в другой режим регулярного движения, которое сохраняется до следующего толчка. Толчки или сбои происходят через 20-30 осцилляторных периодов. Это наводит на мысль ввести так называемые V -торы, с помощью которых в работе [14] обоснована правомерность квазиклассического квантования и в области хаотического движения. Однако здесь далеко не все ясно, и вопрос о квантовании хаотических траекторий остается открытым. Что же касается областей энергии, где классическое движение регулярное, то, в принципе, затруднений для использования квазиклассических методов квантования нет. Однако статистические свойства квантового и соответствующего квазиклассического спектров будут, вообще говоря, отличаться.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность В.Н.Тарасову за помощь в проведении численных расчетов. Авторы благодарят В.М.Дубовика и Б.Л.Марковского за интерес к работе и поддержку.

Литература

1. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
2. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
3. Шустер Г.Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
4. Елютин П.В. УФН, 1988, т.155, вып. 3, с.397-442.
5. Болотин Ю.Л., Гончар В.Ю., Чеканов И.А. О существовании хаоса в линейной $3\mathcal{L}$ -системе. II Международное совещание по теории мало-частичных и кварк-адронных систем. ОИЯИ, Дубна, Д4-87-237, 1987.
6. Болотин Ю.Л., Гончар В.Ю., Чеканов И.А. Некоторые динамические свойства линейной трехчастичной цепочки. Препринт ХФТИ АН УССР, ХФТИ 88-36, Москва:ЦНИИатоминформ, 1988.
7. Lunsford G.H., Ford J. Journ. Math.Phys., 1972, v.13, N 5, p.700-705.
8. Ali S., Bodmer A.R. Nucl. Phys., 1966, v.80, n 1, 99-112.
9. Skyrme R.S.T. Nucl.Phys., 1959, v.9, p.615; Phil.Mag., 1965, v.1, 1043.
10. Vantherin D., Brink D.M. Phys.Rev., 25 (1972), 626.
11. Toda M. Phys.Lett. A, 1974, v.48, p.335-336.

- I2. Болотин Ю.Л., Гончар В.Ю., Кривошей И.В. Хим.физ., 1986, т.5, с.309-317.
- I3. Matsushita T., Narita A., Terasaka T. Chem.Phys.Lett., v.92, N 2, 1983, 129-134.
- I4. Zaffe C., Reinhardt W.P. J.Chem.Phys., 1982, v.77, N 10, p.5191-5203.
- I5. Биркгоф Д. Динамические системы. М.: ОГИЗ, 1941.
- I6. Gustavson F.G. Astron. J., 1966, v.71, 670-686.
- I7. Swinn K.T., Delos J.B. J.Chem. Phys., 1979, v.71, p.1706-1716.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 марта 1989 года.