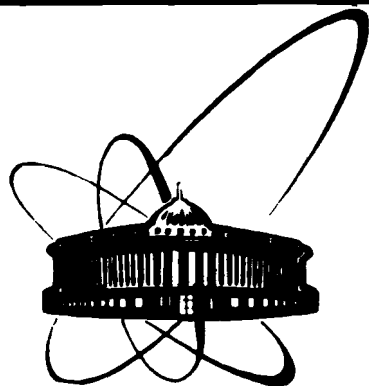


89-178



**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

В 486

Р4-89-178

С. И. Виноцкий, В. Л. Дербов ¹, В. М. Дубовик,
Б. Л. Марковски, Ю. П. Степановский ²

**ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ФАЗА ВЛАДИМИРСКОГО -
- БЕРРИ В ОПТИЧЕСКИХ
ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ**

Направлено в журнал "Успехи физических наук"

¹Саратовский государственный университет
²Харьковский физико-технический институт
АН УССР

1989

I. Введение

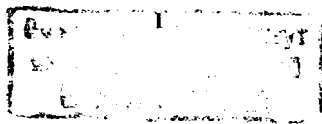
При переходе от теории квантов Планка и Эйнштейна к квантовой механике де Бройля-Гейзенберга-Борна-Шредингера-Дирака большую роль сыграла адиабатическая гипотеза П.Эренфеста (1913 г.): всякое определенное с точки зрения квантовой теории состояние переходит при адиабатическом изменении параметров системы снова в определенное состояние с теми же квантовыми числами, которые, таким образом, являются адиабатическими инвариантами. В рамках квантовой механики адиабатическая гипотеза Эренфеста была доказана для невырожденных квантовомеханических систем в 1928 году Борном и Фоком^{1/}. С тех пор этот вопрос казался исчерпанным на теоретическом уровне^{*}). Однако в 1984 году М.Берри^{3/} вновь привлек внимание к адиабатической теореме. Он указал, что волновая функция системы при циклическом изменении параметров в общем случае приобретает фазовый множитель, содержащий кроме тривиальной (динамической) еще и дополнительную топологическую фазу. Б.Саймон^{4/} дал простую геометрическую интерпретацию топологической фазы Берри^{4/}. В геометрическом подходе исходное гильбертово пространство состояний системы рассматривается как расслоение над пространством лучей (эквивалентных классов состояний, отличающихся фазой). Это расслоение имеет естественную связность, которая определяется условием параллельного переноса: изменение вектора состояния $d\psi$ ортогонально ψ :

$$(\psi, d\psi) = 0. \quad (I)$$

В ряде случаев связность тривиальна, т.е. ее кривизна отлична от нуля. Поэтому согласно (I) в результате циклической эволюции системы (возврата на исходный луч) конечное состояние отличается от начального дополнительной топологической фазой, равной интегралу от кривизны.

Следующий шаг был сделан Ф.Вильчеком и А.Зи^{5/}, показавшими, как при описании адиабатической эволюции простых динамических систем возникают неабелевы калибровочные поля, обобщающие векторный потенциал, введенный Берри. Борн и Фок доказали адиабатическую теорему при условии, что спектр гамильтониана эволюциони-

^{*}) Подробнее о адиабатических инвариантах Эренфеста и их роли в развитии квантовых представлений см.^{1/2/}



рущей системы не вырожден и не вырождается в процессе эволюции. Их доказательство обобщается и на случай, когда спектр гамильтониана вырожден, но в процессе эволюции состояния, относящиеся к различным уровням энергии, не перемешиваются. Согласно адиабатической теореме, дополнительные квантовые числа, характеризующие вырожденное состояние, не изменяются, но при этом система не обязательно возвращается к исходному состоянию, а в общем случае подвергается некоторому унитарному преобразованию, обобщающему фазовое $U(1)$ -преобразование Берри. Так, например, если состояние вырождено по угловому моменту, то проекция момента при адиабатической эволюции не изменяется, но ось квантовая может изменить свое направление.

В своей работе^{/1/} Борн и Фок, решая уравнение Шредингера ($\hbar = 1$)

$$i \dot{\psi} = H(t) \psi \quad (2)$$

с гамильтонианом $H(t)$, бесконечно медленно изменяющимся со временем, ввели полный набор ортонормированных собственных функций $\varphi_n(t)$ гамильтониана $H(t)$

$$H(t) \varphi_n(t) = E_n(t) \varphi_n(t) \quad (3)$$

в предположении, что спектр $H(t)$ не вырожден. Фазы функций для упрощения вычислений были выбраны так, что выполняется условие

$$(\varphi_n, \dot{\varphi}_n) = 0. \quad (4)$$

Далее Борн и Фок представили решение уравнения Шредингера в виде

$$\psi(t) = \sum_n C_n(t) \varphi_n(t) \exp(-i \int_0^t E_n(t) dt), \quad (5)$$

и, используя (4), получили следующее уравнение для определения величин $C_n(t)$:

$$\dot{C}_n = \sum_{m \neq n} C_m (\varphi_n, \dot{\varphi}_m) \exp(i \int_0^t (E_n - E_m) dt). \quad (6)$$

Из уравнений (6) следует, что в адиабатическом пределе все величины C_n остаются неизменными, т.е. функции $\varphi_n(t) \exp(-i \int_0^t E_n(t) dt)$ удовлетворяют уравнению Шредингера^{*}). Таким образом, Борн и Фок доказали, что изменение фазы собственной функции $\varphi_n(t)$ гамильтониана $H(t)$ (дополняющее динамическую фазу $-i \int_0^t E_n(t) dt$) определяется условием (4), совпадающим с правилом параллельного переноса (1).

^{*}) Более подробный пересказ работы^{/1/} см. в^{/2,6/}.

До сих пор мы не конкретизировали зависимость гамильтониана от времени. Будем считать теперь, следуя Берри, что гамильтониан зависит от набора параметров $\lambda : \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^N$, каждый из которых изменяется во времени. Рассмотрим базисный набор ортонормированных волновых функций $\chi_n(\lambda)$, определяемых

$$H(\lambda) \chi_n(\lambda) = E_n(\lambda) \chi_n(\lambda) \quad (7)$$

с произвольными (фиксированными) фазами. Если λ пробегает некоторый контур в пространстве параметров $\lambda(t)$, $0 \leq t \leq T$, то ясно, что в любой момент времени выполняется соотношение

$$\varphi_n(\lambda(t)) = \mathcal{U}(\lambda(t)) \chi_n(\lambda(t)) = e^{i \Theta(\lambda(t))} \chi_n(\lambda(t)). \quad (8)$$

Для замкнутого контура C в пространстве параметров $\lambda(T) = \lambda(0)$ фаза Берри равна

$$\Theta(C) = \Theta(\lambda(T)) - \Theta(\lambda(0)). \quad (9)$$

Подставляя (8) в (4), получим соотношение

$$d\Theta = i (\chi_n, d\chi_n) = i (\chi_n, \frac{\partial \chi_n}{\partial \lambda^i}) d\lambda^i. \quad (10)$$

Введем "векторный потенциал"

$$A_i = i (\chi_n, \frac{\partial \chi_n}{\partial \lambda^i}), \quad (11)$$

тогда

$$d\Theta = A_i d\lambda^i. \quad (12)$$

При "калибровочных преобразованиях I рода"

$$\chi_n \rightarrow \exp(i\alpha(\lambda)) \chi_n \quad (13)$$

"потенциал" трансформируется "калибровочным преобразованием II рода"

$$A_i \rightarrow A_i + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda^i}, \quad (14)$$

не влияющим, очевидно, на величину фазы Берри /3/

$$\Theta(C) = \oint_C A_i d\lambda^i = \int F_{ik} ds^k. \quad (15)$$

Здесь $F_{ik} = \partial A_k / \partial \lambda^i - \partial A_i / \partial \lambda^k$ - "тензор калибровочного поля"; ds^{ik} - элемент поверхности, охваченной контуром C .

Доказательство адиабатической теоремы Борна-Фока легко распространяется и на случай вырожденных систем. Введем дополнительные квантовые числа a , нумерующие состояния ψ_{na} вырожденного уровня энергии n . Как показал Фок^{/7/}, ортонормированные собственные функции ψ_{na} всегда можно подчинить условию, обобщающему правило параллельного переноса (4):

$$(\psi_{na}, \dot{\psi}_{nb}) = 0 \quad (16)$$

при любых a и b . Соблюдение условия (16) приводит к тому, что при адиабатической эволюции собственные функции

$$\psi_{na}(t) \exp(-i \int_0^t E_n(t) dt) \quad (17)$$

удовлетворяют уравнению Шредингера. Вводя базисный набор ортонормированных собственных функций $X_{na}(\lambda)$, можно определить неабелев калибровочный потенциал^{/5/}

$$(A_i)_{ab} = i \left(X_{nb}, \frac{\partial X_{na}}{\partial \lambda^i} \right), \quad (18)$$

обобщающий векторный потенциал, введенный Берри. Переход к другому базису в (18)

$$X'_{na} = \Lambda_{ab} X_{nb} \quad (19)$$

приводит к неабелеву калибровочному преобразованию (для упрощения записи опустим матричные индексы)

$$A_i' = \Lambda A_i \Lambda^{-1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda^i} \Lambda^{-1}. \quad (20)$$

Теперь решения уравнения Шредингера $\psi_{na}(t)$ связаны с базисными функциями унитарным преобразованием

$$\psi_{na}(\lambda(t)) = U_{ab}(\lambda(t)) X_{nb}(\lambda(t)). \quad (21)$$

Формула (12) обобщается следующим образом:

$$dU_{ab} = -U_{bc} (A_i)_{ca} d\lambda^i. \quad (22)$$

Вместо (15) получим неабелево обобщение множителя Берри в виде Т-экспоненты

$$U(C_T) = T \exp(i \oint A_i d\lambda^i). \quad (23)$$

В настоящее время имеется обширная литература, относящаяся к фазе Берри и ее неабелевым обобщениям^{/8-12/}. В ряде работ^{/9,13-15/} снято ограничение, связанное с адиабатичностью эволюции системы. Более того, вовсе не обязательно требовать от эволюции унитарности, сохранения нормы, или цикличности - возврата на исходный луч^{/14,15/}. В этом обзоре мы ограничиваемся рассмотрением циклических эволюций системы, которые позволяют дать простое и наглядное геометрическое представление о фазе Берри на примере оптических поляризационных экспериментов с применением волоконных световодов и лазерных интерферометров.

2. Параллельный перенос вектора поляризации в геометрической оптике неоднородных сред

Открытие закона параллельного переноса векторов $\hat{e} = \vec{E}/E$ и $\hat{h} = \vec{H}/H$ электрического и магнитного поля, характеризующих поляризацию электромагнитной волны в среде с медленно меняющимся показателем преломления, восходит к работе С.М.Рытова "О переходе от волновой к геометрической оптике", выполненной в 1938 году^{/16/}. С.М.Рытов показал, что для луча света, имеющего форму неплоской кривой, происходит поворот векторов \hat{e} , \hat{h} относительно естественного трехгранника \hat{k} , \hat{n} , \hat{b} , образованного векторами касательной \hat{k} , нормали \hat{n} и бинормали \hat{b} к искривленному лучу:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}} &= \hat{n} \cos \varphi + \hat{b} \sin \varphi, \\ \dot{\hat{h}} &= -\hat{h} \sin \varphi + \hat{b} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (24)$$

Причем производная угла поворота φ по длине дуги s равна кручению кривой

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{T}, \quad (25)$$

где T - радиус кручения луча.

Эта формула известна как "закон Рытова"^{/17/} и может быть получена из условия поперечности световой волны:

$$(\hat{e}, \hat{k}) = 0, \quad \hat{e}^2 = 1. \quad (26)$$

Дифференцируя эти соотношения, получим

$$(\dot{\hat{e}}, \hat{k}) + (\hat{e}, \dot{\hat{k}}) = 0, \quad (\hat{e}, \dot{\hat{e}}) = 0. \quad (27)$$

Разложим $\dot{\hat{e}}$ по полному набору векторов, ортогональных \hat{e} ,

$$\dot{\hat{e}} = \alpha \hat{k} + \beta [\hat{k}, \hat{e}]. \quad (28)$$

Считаем, что среда негиротропна, т.е. что $\beta = 0$. Используя (27), получим "закон Рytова"

$$\dot{\hat{e}} = -(\hat{e}, \dot{\hat{k}}) \hat{k}. \quad (29)$$

Дифференцируя по длине дуги s луча и используя формулы Френе

$$\frac{d\hat{k}}{ds} = \frac{\hat{n}}{R}, \quad \frac{d\hat{n}}{ds} = -\frac{\hat{k}}{R} - \frac{\hat{b}}{T}, \quad \frac{d\hat{b}}{ds} = \frac{\hat{n}}{T}, \quad (30)$$

где R и T - радиусы кривизны и кручения луча, приходим к формуле (25).

Как было отмечено в последующей работе В.В.Владимирского^{18/}, хотя мгновенная скорость трехгранника \hat{k} , \hat{e} и \hat{n} направлена всегда перпендикулярно лучу и, следовательно, никакого вращения векторов поля вокруг луча не происходит, плоскость поляризации не будет в общем случае возвращаться к своему исходному положению всякий раз, когда касательная луча совпадает со своим исходным направлением, так как ось вращения \hat{b} все время изменяет свою ориентацию в пространстве, если луч обладает кручением. Работа В.В.Владимирского "О вращении плоскости поляризации в искривленном световом луче" была выполнена в 1941 году и практически осталась неизвестной. Однако именно в ней на основе "закона Рytова" был предсказан глобальный (топологический) эффект: угол поворота Θ плоскости поляризации светового луча, путь которого в оптически неоднородной среде представляет собой неплоскую кривую, равен интегралу от гауссовой кривизны по области, ограниченной контуром C , который прочерчивает конец вектора \hat{k} на единичной сфере. Угол Θ равен телесному углу Ω , заключенному внутри конуса, описываемого вектором \hat{k} ; знак угла Θ определяется направлением обхода телесного угла

$$\Theta = -\Omega. \quad (31)$$

Таким образом, когда касательная к лучу возвращается к своему исходному направлению, плоскость поляризации поворачивается на угол, равный телесному углу, описанному касательной^{18/}. Этот угол совпадает

с фазой Берри для спиральных фотонов, экспериментально обнаруженной в недавних экспериментах Томита и Чао^{19/} в спирально изогнутых оптических световодах. Если луч представляет собой плоскую кривую, то $\Theta = 0$, и при возвращении луча к исходному направлению векторы поля принимают прежнее положение. Угол между электрическим полем и касательной плоскостью будет в этом случае сохраняться вдоль всего луча, так как кривая Γ при этом совпадает с геодезической линией - дугой большого круга, лежащего в плоскости луча...

Если касательные к лучу в начальной и конечных точках имеют различные направления, то векторы \hat{e} и \hat{n} для этих точек лежат в разных плоскостях, и состояния поляризации не могут сравниваться непосредственно. Целесообразно условиться приводить луч при сравнении поляризации к прежнему направлению с помощью плоской кривой или посредством отражения от идеального зеркала, не изменяющего поляризации. Кривая Γ при этом замкнется дугой большого круга, и угол поворота плоскости поляризации может быть снова получен по формуле $\Theta = \Omega$ ^{18/}. Подобная методика использована в дальнейших экспериментах Чао и др.^{20/} на модифицированном интерферометре Маха-Цендера.

Таким образом, после длительного перерыва интерес к фазовым и поляризационным свойствам искривленных световых пучков возродился в связи с открытием топологической фазы Берри в квантовой механике, развитием лазерной техники и волоконной оптики. В результате удалось измерить топологическую фазу, предсказанную В.В.Владимирским на основе "закона Рytова".

3. Вращение плоскости поляризации излучения в спирально изогнутом волоконном световоде

Чао и Ву^{21/} предложили способ измерений фазы Берри по эффективной оптической активности, возникающей при прохождении линейно поляризованного света через спирально-изогнутый одномодовый волоконный световод. Для интерпретации наблюдаемого эффекта Чао и Ву первоначально использовали аналогию между адиабатическим изменением волнового вектора фотонов в световоде и адиабатическим изменением магнитного поля, действующего на спин в примере, рассмотренном Берри^{3/}.

а) Фаза Берри для фотонов с заданной спиральностью

Эволюция волновой функции частицы со спином \vec{S} , находящейся в медленно изменяющемся магнитном поле $\vec{H}(t)$, описывается уравнением

$$i \dot{\psi} = \alpha \vec{H} \vec{S} \psi, \quad (32)$$

(α - константа, включающая гиромангнитное отношение). Берри^{/3/} показал, что при циклическом изменении магнитного поля $\vec{H}(\tau) = \vec{H}(0)$ волновая функция приобретает геометрический множитель с топологической фазой

$$\theta = -m \Omega(\mathcal{C}),$$

где m - сохраняющаяся проекция спина частицы на направление магнитного поля $\hat{h} = \vec{H}/H$, $\Omega(\mathcal{C})$ - телесный угол, который вектор \hat{h} очерчивает на единичной сфере, пролебая контур \mathcal{C} .

Эволюция фотонов с определенной спиральностью описывается уравнениями Максвелла, которые могут быть записаны в виде, аналогичном (32)*). В приближении геометрической оптики аналогом вектора \hat{h} для фотонов является касательный вектор к лучу света $\hat{k} = \vec{k}^*/k$, где \vec{k}^* - волновой вектор фотона. Пусть волновой вектор \vec{k}^* в момент времени $t=0$ направлен по оси z , а вектор линейной поляризации $\hat{e}(0) = \hat{e}$ направлен по оси x

$$\hat{e}(0) = \frac{1}{2} (\hat{e}_+ - \hat{e}_-),$$

где

$$\hat{e}_\pm = \hat{e}_1 \pm i \hat{e}_2$$

- векторы круговой поляризации. При циклическом изменении волнового вектора \vec{k}^* : $\vec{k}^*(\tau) = \vec{k}^*(0)$

$$\begin{aligned} \hat{e}(\tau) &= \frac{1}{2} (e^{-i\Omega} \hat{e}_+ + e^{i\Omega} \hat{e}_-) = \\ &= \hat{e}_1 \cos \Omega + \hat{e}_2 \sin \Omega. \end{aligned}$$

Таким образом, топологическая фаза Берри, появляющаяся у поляризованных по кругу фотонов, проявляется в виде поворота вектора линейной поляризации на угол $\theta = \Omega$

и совпадает с топологической фазой В.В.Владимирского (31).

* Действительно, уравнения Максвелла для фотонов в вакууме представляемы в виде^{/22/}

$$i \vec{\psi} = \pm \vec{k}^* \vec{S} \psi, \quad \text{div } \vec{\psi} = 0,$$

где $(S_i)_{\alpha\beta} = -i \epsilon_{ikl} \delta_{\alpha\beta}$, $\psi_\alpha = E_\alpha \pm i H_\alpha$, $\vec{k}^* = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{x}}$.

Формулу для поворота вектора поляризации (31) нужно модифицировать с учетом того факта, что время распространения T может зависеть от m за счет естественной оптической активности среды, тогда как энергия $E_m = \omega$ от m не зависит. В результате имеем

$$\omega_m(T_m) = \int_0^{T_m} \omega dt = \frac{\omega L}{c} n_m, \quad (33)$$

где $n_m = n_\pm$ - показатели преломления для правой и левой круговых компонент. С учетом (33) угол поворота плоскости поляризации равен

$$\theta = \Omega(\mathcal{C}) + \theta_0, \quad (34)$$

где θ_0/L - естественная оптическая активность среды

$$\theta_0/L = \omega/2c \cdot (n_+ - n_-). \quad (35)$$

б) Эксперимент Томита и Чао^{/19/}

Эксперимент по проверке соотношения (34) был реализован по схеме, изображенной на рис. I. Световод помещается для уменьше-

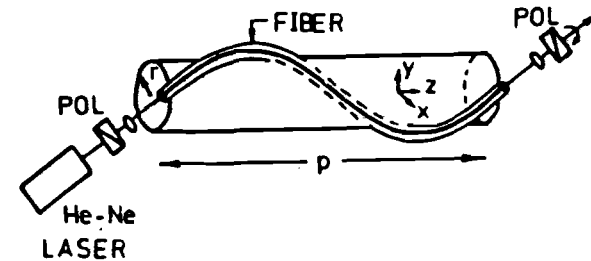


Рис. I. Схема установки Томита и Чао^{/19/}.
L - He-Ne - лазер; P₁, P₂ - поляризаторы, F - одномодовый волоконный световод, намотанный на цилиндр.
Параметры установки:

длина световода - 180 см
диаметр сердцевин - 2,6 мкм
диаметр оболочки - 70 мкм
показатель преломления оболочки - 1,45
относительная разность показателей преломления оболочки и сердцевин $\Delta n/n = 0,6\%$ (профиль показателя преломления ступенчатый)
естественная оптическая активность, связанная с технологией изготовления световода $\theta_0/L = 0,436$ рад/м.

ния торсионных напряжений в тефлоновую трубку так, что его выходной конец может свободно вращаться и наматывается на поверхность цилиндра длиной l и радиуса r в виде витка спирали (рис. 1). Направления распространения излучения на входе и выходе световода в установке совпадают, что обеспечивает замкнутость контура C , описываемого вектором \hat{k} .

В первой серии опытов спираль равномерная, т.е. ее контур на развертке цилиндра (рис. 2а) представляет собой диагональ прямоугольника. Вариация телесного угла, описываемого вектором \hat{k} за один оборот, достигается изменением длины l и радиуса r цилиндра, причем длина световода $L = \sqrt{l^2 + (2\pi r)^2}$ остается неизменной. Предсказываемый теорией дополнительный угол поворота плоскости поляризации равен в этом случае $\Theta - \Theta_0 = -\Omega = 2\pi(1 - l/L)$.

Во второй стадии опытов при фиксированной длине волокна L и размерах цилиндра l и r используются неравномерные спирали различной формы, моделируемой на компьютере. Телесный угол, описываемый вектором \hat{k} , в этом случае вычисляется по формуле

$$-\Omega(\epsilon) = \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta(\varphi)) d\varphi.$$

Как видно из рис. 2б: $\theta(\varphi) = \arctg(r \frac{d\varphi}{dz})$, что позволяет рассчитать $\Omega(\epsilon)$ при известной зависимости $\varphi(z)$, которая задается в виде сумм различного числа гармоник. Каждой такой зависимости соответствует замкнутая кривая C , охватывающая телесный угол Ω , описываемый вектором \hat{k} на единичной сфере (рис. 3). Равномерной спирали соответствует окружность C . Плоским контурам световода отвечает движение по экватору сферы; описываемый при этом вектором \hat{k} телесный угол Ω равен 2π , так что добавочная фаза является тривиальной.

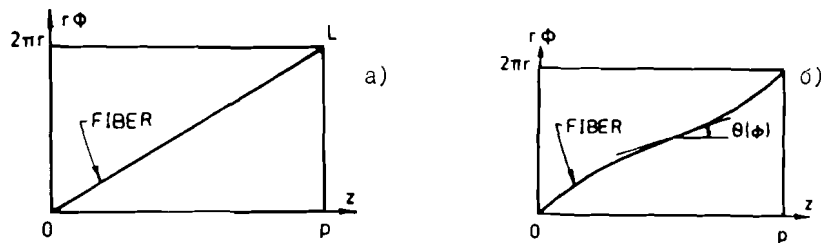


Рис. 2. Развертка цилиндра на плоскость для вычисления телесного угла, описываемого вектором \hat{k} , а) при равномерной и б) при неравномерной намотке световода.

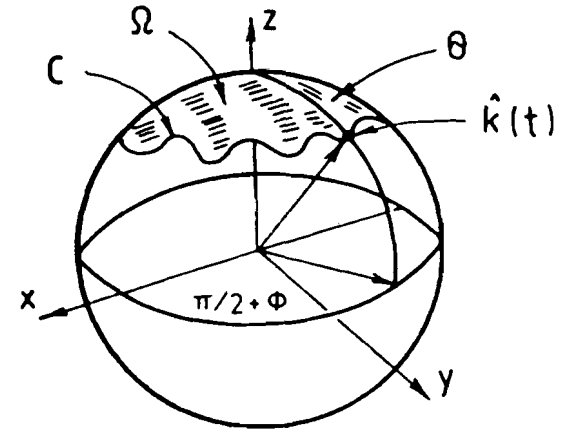


Рис. 3. Движение вектора $\hat{k} = k/k$ на единичной сфере $S^2(\theta, \phi)$ при распространении излучения по витку световода сложной формы.

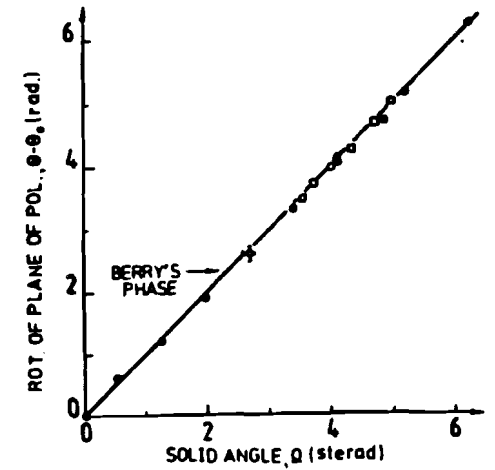


Рис. 4. Результаты измерения угла поворота плоскости поляризации $\Theta - \Theta_0$ при различных телесных углах $\Omega/19^\circ$. Кружки, квадраты и треугольники соответствуют спиральям различной формы. Прямая линия - предсказание теории.

На рис. 4 сравниваются экспериментальная и теоретическая зависимости дополнительного угла поворота $\Theta - \Theta_0$ плоскости поляризации излучения на выходе световода от телесного угла $\Omega(\epsilon)$, описываемого вектором \hat{k} и определяемого, как указано выше. Предсказание теории: $\Theta - \Theta_0 = -\Omega(\epsilon)$ с точностью не хуже (3+4)% подтверждается экспериментом.

в) Обсуждение эксперимента Томита и Чао

Простота эксперимента Томита и Чао и открываемая им возможность наглядной интерпретации фундаментальных геометрических аспектов теории поля привлекли внимание ряда авторов (см., например, [23-25]). Критика работ [19, 21] в замечании Хелдейна [26] касалась преимущественно двух вопросов: новизны эффекта и правомерности его квантовой трактовки. Действительно, о повороте плоскости поляризации в изогнутом световоде сообщалось в работах [27-30]. Однако целенаправленная проверка инвариантного характера величины $\theta - \theta_0 = \int \Omega(s)$ осуществлена в [19] впервые, причем именно рассмотрение, основанное на фазе Берри, сыграло здесь стимулирующую роль.

К сожалению, пионерские работы Рытова [16] и Владимирского [18] не цитируются перечисленными здесь авторами и не получили должной известности. Вместо этого в ряде позднейших работ даются свои варианты классической теории опытов Томита и Чао. [31-33]

Так, например, Берри [33] нашел решение классических волновых уравнений для изогнутого световода с использованием локальной системы координат, что позволило выразить дополнительный поворот плоскости поляризации через кручение световода, а также оценить вклад неадиабатических переходов. Используя идеи связанных локальных мод и приближение слабонаправленного световода [34], Берри записывает электрическое поле световой волны в виде

$$\vec{E}(p, s) = \exp\{i p s\} f(p) [C_n(s) \hat{n}(s) + C_b(s) \hat{b}(s)] \quad (36)$$

где p - радиальная координата (расстояние до оси), s - продольная координата, отсчитываемая вдоль оси световода; p - константа распространения; $f(p)$ - функция радиального распределения амплитуды поля; $\hat{n}(s)$ и $\hat{b}(s)$ - векторы нормали и бинормали к оси световода (см. рис.5).

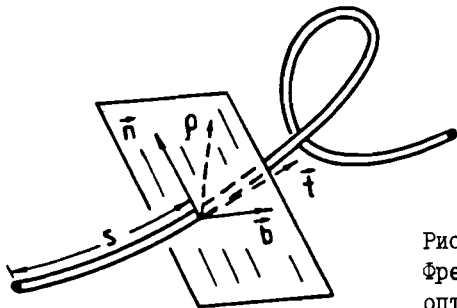


Рис.5. Сопровождающий трехгранный Френе для спирально изогнутого оптического световода.

Плавность изгиба позволяет выбрать величины β и $f(p)$ теми же, что и для прямого световода. В результате подстановки (36) в уравнения Максвелла Берри приходит к основному уравнению эволюции для коэффициентов $C_n(s)$, $C_b(s)$, аналогичному уравнению Шредингера:

$$i \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} C_n(s) \\ C_b(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa^2(s)/2\beta & i\tau(s) \\ -i\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n(s) \\ C_b(s) \end{pmatrix} \quad (37)$$

где $\tau(s)$ и $\kappa(s)$ - кручение и кривизна световода. При получении (37) не учитывались радиационная утечка, связь с отраженными модами и эласто-оптические эффекты.

Поскольку $\beta = 2\pi/\lambda$, а κ^{-1} и τ^{-1} - порядка радиуса изгиба, то член $\kappa^2/2\beta$ мал по сравнению с кручением τ . Пренебрежение $\kappa^2/2\beta$ соответствует адиабатическому характеру эволюции (сохранению типа круговой поляризации). Если первоначально свет имел линейную поляризацию и вектор \vec{E} образовывал угол φ_0 с нормалью \hat{n} , то

$$C_b(s)/C_n(s) = \tan \varphi(s) = \tan(\varphi_0 - \int_0^s ds' \tau(s')) \quad (38)$$

Такой закон параллельного переноса для \vec{E} приводит после полного оборота спирали к повороту плоскости поляризации на угол θ , равный телесному углу

$$\Omega = \int_0^L \frac{ds}{T(s)} \quad (39)$$

где $T = \tau^{-1}$ - радиус кручения световода. Как мы видели, этот же результат был получен Владимирским с помощью "закона Рытова" (25). Учет члена $\kappa^2/2\beta$ в уравнении (37) позволяет описать неадиабатические переходы. В первом порядке малости он приводит к следующему выражению для вероятности $P_{(+ \rightarrow -)}$ изменения характера круговой поляризации:

$$P_{(+ \rightarrow -)} = \left| \int_0^L ds \kappa^2(s) \exp\{2i \int_0^s ds' \tau(s')\} \right|^2 / 16\beta^2 \quad (40)$$

Для спирали, равномерно намотанной на цилиндр радиуса r , выражение (40) дает

$$P_{(+ \rightarrow -)} = \left[\Omega / 2\pi (2 - \Omega / 2\pi) \right]^2 \sin^2 \Omega / (1 - \Omega / 2\pi) / 16\beta^2 r^2$$

Даже при $r \sim 1$ мм величина $P_{(+ \rightarrow -)}$ не превышает $\sim 10^{-8}$. Отметим, что поскольку для плоских изгибов волокна $\tau = 0$, вращения плоскости поляризации не возникает.

До сих пор мы рассматривали одномодовые световоды. Распространение света в многомодовом световоде можно представить как последовательность многократных отражений. Остановимся подробнее на этом вопросе.

Спиральность безмассовой частицы с произвольным спином - релятивистский инвариант. Состояние безмассовой частицы с определенной спиральностью полностью определяется импульсом частицы. (Каждое из этих двух утверждений эквивалентно релятивистским волновым уравнениям соответствующих безмассовых полей^{/35,36/}). Если импульс частицы подвергается последовательности собственных преобразований Лоренца и возвращается к исходному значению, то частица также возвращается в исходное состояние, волновая функция которого определена с точностью до фазового множителя. В работе^{/37/} показано, что в случае непрерывных преобразований эта геометрическая фаза совпадает с фазой Берри^{/38/}. В отличие от этих работ мы рассмотрим сейчас дискретную последовательность преобразований Лоренца, которая переводит k_1 в k_2 , k_2 в k_3 , ... и k_n снова в k_1 . Каждое преобразование $k_i \rightarrow k_{i+1}$ представляет собой лоренцевский буст $\mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_{i+1}$ и вращение $K_i \rightarrow K_{i+1}$, где $K = k/\mathcal{E}$ а \mathcal{E} - энергия частицы. Лоренцевский буст не меняет фазы волновой функции. Поэтому достаточно рассмотреть последовательность вращений $k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow \dots \rightarrow k_n \rightarrow k_1$. При вращении $K_i \rightarrow K_{i+1}$ любой вектор \vec{a}_i (ортогональный k_i) преобразуется согласно формуле

$$\vec{a}_{i+1} = \vec{a}_i - 2(\vec{a}_i \cdot K_{i+1}) \frac{K_i + K_{i+1}}{(K_i + K_{i+1})^2}. \quad (41)$$

Возникает вопрос: "Имеет ли эта формула отношение к реальным физическим процессам?". Чтобы ответить на него, рассмотрим луч света, изображенный на рис.6. Изменение поляризации света при полной отражении определяется формулами Френеля

$$\hat{e}_2 = \hat{e}_1 - (\hat{e}_1 \cdot k_2) [\alpha k_1 + \beta k_2] / [1 - (k_1 k_2)], \quad (42)$$

$$\alpha = e^{i\chi} - (k_1 k_2), \quad \beta = 1 - e^{i\chi} (k_1 k_2),$$

где k_1, k_2 - единичные векторы в направлении движения падающего и отраженного фотонов. Для полного внутреннего отражения χ хорошо известно^{/39/}, но эта формула справедлива также и для полного отражения света от идеальных металлических зеркал.

Спиральность фотона не сохраняется при отражениях. Действительно, в случае постоянных электрической и магнитной проницаемостей однородной среды мы можем представить уравнения Максвелла в форме

$$i \frac{\partial \vec{\Psi}_\pm}{\partial t} = \pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \text{rot } \vec{\Psi}_\pm, \quad \text{div } \vec{\Psi}_\pm = 0, \quad (43)$$

где $\vec{\Psi}_\pm = \sqrt{\epsilon} \vec{E} \pm i \sqrt{\mu} \vec{H}$. Уравнения (43) описывают фотоны со спиральностями ± 1 , но для неоднородной среды мы должны дополнить эти уравнения несохраняющими спиральность членами, содержащими градиенты ϵ и μ , которые существенны при отражениях. Спиральность приближенно сохраняется, если эти градиенты малы. В этом смысле спиральность - адиабатический инвариант.

Рис.6. Распространение луча света в оптическом световоде.

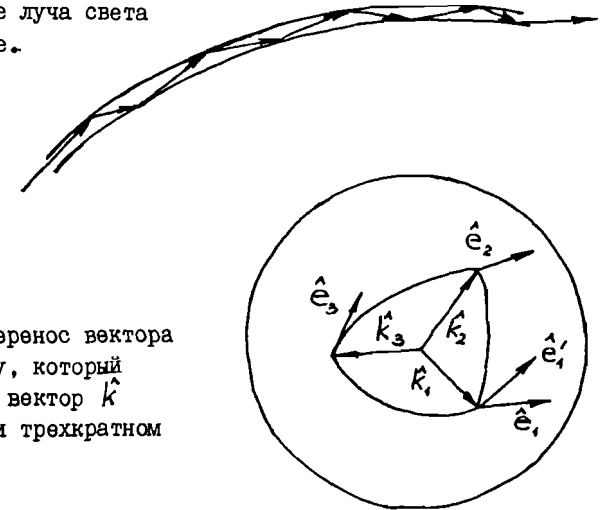


Рис.7. Параллельный перенос вектора поляризации по контуру, который прочерчивает волновой вектор k на единичной сфере при трехкратном отражении.

Если в (42) угол падения стремится к $\pi/2$ (скользящее падение), то $\chi \rightarrow 0$, и, пренебрегая членами порядка $\sin^2 \chi$, получаем "закон Рytова"

$$S \hat{e} = -(\hat{e} \cdot k) k. \quad (44)$$

При распространении света в световоде отражение практически скользящее, т.е. $\chi=0$ (спиральность точно сохраняется); формула (42) упрощается

$$\hat{e}_2 = \hat{e}_1 - (2 \hat{e}_1 \cdot k_2) \frac{k_1 + k_2}{(k_1 + k_2)^2} \quad (45)$$

и полностью совпадает с формулой (41). Таким образом, мы показали, что формула(41) имеет прямое отношение к распространению света в оптическом волоконном световоде. Формула(45) имеет простой геометрический смысл (см. рис.7). Рассмотрим три последовательных отражения $k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow k_3 \rightarrow k_1$. Тогда формула(45) определяет параллельный перенос вектора поляризации \hat{e} по контуру сферического треугольника с углами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Угол поворота θ вектора \hat{e} при этом равен $-\Omega$, где $-\Omega = \sum_{i=1}^3 (\pi - \alpha_i)$, т.е. с точностью до 2π : $-\Omega = \pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = -S_A$, где S_A - площадь сферического треугольника. Это означает, что вектор поляризации повернулся против часовой стрелки на угол θ , равный телесному углу $-\Omega$, ограниченному сферическим треугольником, который прочерчивает конец векто-

ра k на единичной сфере. Заменяем теперь треугольник многоугольником с произвольно большим числом сторон. Очевидно, что параллельный перенос вектора \vec{e} вдоль сторон этого многоугольника сопровождается поворотом вектора поляризации на угол $\theta = \Omega$.

4. Наблюдение топологической фазы с помощью неплоского интерферометра Маха-Цендера^{/20/}

В работе^{/21/} был предложен эксперимент с интерференцией фотонов, прошедших через два одинаковых световода, один из которых закручен по правой спирали, а другой - по левой. Разность фаз при этом равна удвоенной фазе Берри. На практике^{/20/} оказалось удобнее использовать в качестве плеч интерферометра не световоды, а неплоские конфигурации зеркал. Ход лучей в таком неплоском интерферометре схематически показан на рис.8. Лучи, относящиеся к верхней и нижней частям схемы лежат в двух различных параллельных плоскостях, расстояние между которыми 4Г мм.

Направим ось X вдоль исходного лазерного луча, ось Y - к зеркалу $M6$, а ось Z - перпендикулярно плоскости чертежа. Неполаризованное излучение $He-Ne$ лазера расщепляется на два пучка делителем специальной конструкции $B1$, сохраняющим поляризацию. Делитель выполнен в виде стеклянного куба, внутри которого по диагонали расположен тонкий полупрозрачный слой серебра. Рассмотрим на входе интерферометра состояние фотона $|+\rangle$ с положительной спиралью $\langle \vec{S}_0 \cdot \vec{k}_0 \rangle = +1$, где $\langle \vec{S}_0 \rangle = \vec{k}_0 = (1, 0, 0)$ - начальный спин и направление распространения фотона. При отражении от всех металлических поверхностей спираль-

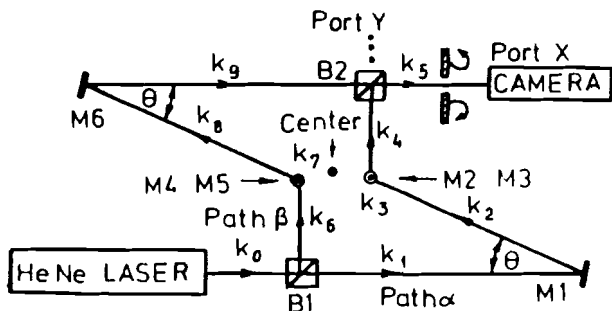


Рис.8. Схема установки^{/20/} для наблюдения топологической фазы с помощью неплоского интерферометра Маха-Цендера.

ность меняет знак, а при прохождении через полупрозрачный делитель нет. Коэффициенты пропускания и отражения $B1$ примерно равны. Прошедший через $B1$ фотон попадает в плечо интерферометра, обозначенное на рис.8 как *path alpha*. После отражения от зеркала $M1$ он распространяется в направлении $\vec{k}_2 = (-\cos\theta, \sin\theta, 0)$ и имеет спин $\langle \vec{S}_2 \rangle = -\vec{k}_2$. Затем с помощью системы двух поворотных 45° зеркал $M2$ и $M3$ (*beam elevator*) направление распространения и спин меняются сначала на $\vec{k}_3 = (0, 0, 1)$, $\langle \vec{S}_3 \rangle = \vec{k}_3$, а затем на $\vec{k}_4 = (0, 1, 0)$, $\langle \vec{S}_4 \rangle = -\vec{k}_4$, что соответствует переводу луча в верхнюю плоскость. С помощью второго делителя $B2$, аналогичного $B1$, отраженная часть излучения посылается на приемник (*port x*) в направлении $\vec{k}_5 = (1, 0, 0)$, причем $\langle \vec{S}_5 \rangle = \vec{k}_5$. Поскольку $\vec{k}_5 = \vec{k}_0$, $\langle \vec{S}_5 \rangle = \langle \vec{S}_0 \rangle$, эволюция спина циклическая.

Другое плечо интерферометра (*path beta*) отличается тем, что фотон, отраженный от $B1$ в направлении $\vec{k}_6 = (0, 1, 0)$, $\langle \vec{S}_6 \rangle = -\vec{k}_6$, сначала переводится в верхнюю плоскость системой зеркал $M4$ и $M5$, а уже затем отклоняется зеркалом $M6$ и, частично, проходя делитель $B2$, интерферирует со своим *alter ego*, пришедшим по пути α . Плечи α и β интерферометра преобразуются друг в друга при инверсии относительно центра, указанного на рис.8.

Перед регистрирующей камерой помещены рядом два фильтра круговой поляризации, позволяющие получать две интерференционные картины, одна

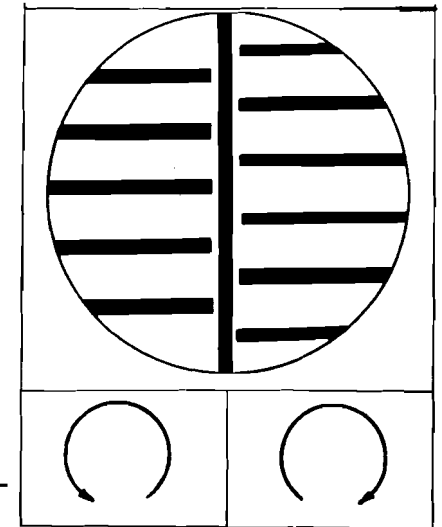


Рис.9. Интерферограмма для левой и правой круговой поляризации излучения при повороте на $\theta = 45^\circ$.

из которых формируется правополяризованным, а другая левополяризованным излучением (рис. 9). Полосы образуются за счет слабой разъюстировки делителя В2. Фильтры представляют собой комбинацию пластинки $\lambda/4$ и полъроида. Поскольку фаза Берри меняет знак на противоположный как при замене правой поляризации фотона на левую, так и при пространственной инверсии (замене $\hat{p} \rightarrow -\hat{p}$ на $\hat{p} \rightarrow \hat{p}$), то, очевидно, фазовый сдвиг, определяющий относительное смещение полос, равен фазе Берри, умноженной на 4. Динамические фазы при такой методике измерения компенсируются.

Геометрическая трактовка эксперимента^{/20/} строится на основании представлений Берри^{/33/}, Аронова и Анандана^{/9/} о неадиабатической циклической эволюции. В частности, замкнутый контур, отображающий циклическую эволюцию, следует^{/9,15,40/} строить не в пространстве параметров, а в проективном гильбертовом пространстве лучей, которое в данном конкретном случае представляет собой единичную сферу направлений вектора $\langle \vec{s} \rangle$, а не \vec{k} . Приведенное выше рассмотрение эффекта Томита и Чао на \vec{k} -сфере остается при этом справедливым, поскольку при адиабатической эволюции спиральность сохраняется, в силу чего $\langle \vec{s} \rangle$ и \vec{k} -сферы "совпадают". Изобразим на $\langle \vec{s} \rangle$ -сфере (рис. 10) положения векторов $\langle \vec{s}_i \rangle$, $i=0,1,\dots,5$. Возникает вопрос, как же происходит эволюция вектора $\langle \vec{s} \rangle$ между этими положениями? Чао и др.^{/20/} априори считают, что движение $\langle \vec{s} \rangle$ между двумя точками происходит по геодезической, в данном случае — по дуге большого круга. Подтверждением этого авторы^{/20/} считают совпадение теории с экспериментом. Действительно, телесный угол, ограниченный сферической ломаной $ABCD$, состоящей из дуг больших кругов (рис. 10), очевидно, равен $\Omega = \pi/2 - \theta$ и легко определяется экспериментально. Фаза Берри γ находится по

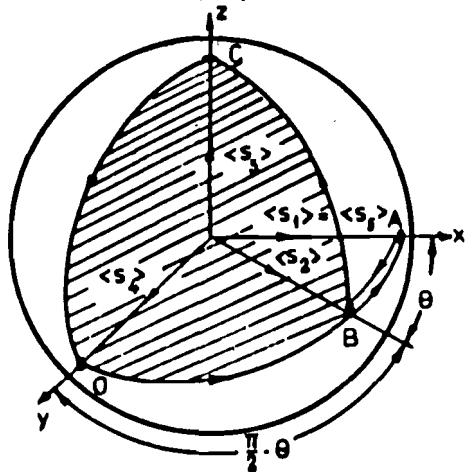


Рис. 10. Единичная сфера направлений вектора спина $\langle \vec{s} \rangle$ фотона. Точки ABCD соответствуют дискретным положениям вектора спина при изменении направления волнового вектора.

сдвигу полос. Экспериментально полученный график зависимости γ от Ω имеет вид прямой $\gamma = \Omega$ с точностью до нескольких процентов. Обоснование эволюции вдоль геодезических в проективном гильбертовом пространстве, фактически, содержится в общей теории Сэмьюэла и Бхандари^{/15/}.

5. Эксперименты с изменением состояния поляризации неискривленных световых пучков

- а) Наблюдение топологической фазы для эволюции поляризации светового пучка с помощью лазерного интерферометра. Линейный случай^{/41/}

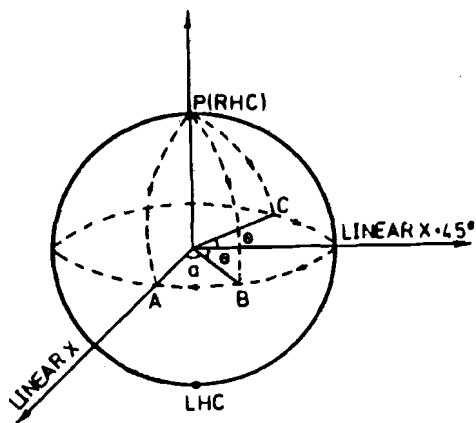
Оптический эксперимент Чао и Томита по наблюдению фазы Берри не только привлек внимание оптиков, но позволил по-новому переосмыслить исследования, выполненные в пятидесятых годах Панчаратнамом^{/42/} и посвященные изучению интерференции поляризованных пучков света на основе классических уравнений Максвелла. В отличие от рассмотренных выше работ, речь идет об изменении состояния поляризации света в условиях прямолинейного распространения. Как принято в оптике^{/39/}, описание состояний поляризации света здесь осуществляется с помощью параметров Стокса и их естественной параметризации на сфере Пуанкаре (см. рис. 11). Такой подход позволяет рассматривать широкий класс явлений и, в отличие от квантовомеханических концепций, не связан с такими обременительными ограничениями, как унитарность и цикличность эволюции в пространстве параметров. В рассматриваемой картине исходной фазе Берри соответствует циклическая фаза в пространстве параметров состояний поляризации света на сфере Пуанкаре. С учетом того, что удвоенный угол поворота в плоскости экватора на этой сфере (см. рис. 11) соответствует углу поворота плоскости поляризации в реальном пространстве R^3 , циклическая топологическая фаза задается, как и для спинорного представления группы вращений, половиной телесного угла Ω , т.е. величиной $\Omega/2$. Удобство такой параметризации очевидно, поскольку здесь для описания состояний правой и левой поляризаций требуется одна карта, тогда как для параметризации сферы направлений волнового вектора \vec{k} (см. рис. 3), связанной с тензорным представлением группы вращений в реальном R^3 , необходимо использовать две карты^{*)}.

*) Параметризация на сфере Пуанкаре оказывается полезной не только при рассмотрении оптических явлений. Ее, в частности, можно использовать и для решения квантовомеханических задач рассеяния в системе нескольких частиц в рамках адиабатического подхода, см., например,^{/43/}.

Рассматриваемый эксперимент Бхандери и Самуэла^{/41/} посвящен изучению топологической фазы Панчаратнама-Берри (на сфере Пуанкаре) для неунитарной циклической эволюции средствами лазерной интерферометрии.

Рассмотрим контур APBA (рис. II). AP изображает изменение поляризации света, вначале линейно поляризованного вдоль оси X, при прохождении через четвертьволновую пластинку QWP1 (рис. I2), ось которой ориентирована под углом 45° к оси X. Пластинка переводит свет в состояние правой циркулярной поляризации X. PB соответствует прохождению пучка через вторую четвертьволновую пластинку QWP2, ось которой расположена под углом $(\alpha - 90^\circ)/2$ к оси X. Эта пластинка переводит пучок в состояние B с линейной поляризацией под углом $\alpha/2$ к оси X. От точки B состояние поляризации возвращается снова к точке A с помощью оптически активной среды надлежащей толщины. Другая возможность - пропустить луч через поляроид (линейный поляризатор), ось которого наклонена относительно оси X. Эти два варианта качественно различны: во втором пучок света подвергается "неунитарному" преобразованию, т.к. интенсивность света в этом случае не сохраняется*). Именно эта альтернативная постановка реализована в дан-

Рис. II. Состояния поляризации света на сфере Пуанкаре^{/39/}. Поллюса соответствуют циркулярным поляризациям, а экватор соответствует состояниям линейной поляризации. Угол 2θ на экваторе отвечает повороту плоскости поляризации на угол θ в реальном пространстве R^3 . Все другие точки представляют состояния эллиптической поляризации.



*) Изменение поляризации при этом может быть адиабатическим или неадиабатическим в зависимости от толщины поляроида в отношении к длине волны света. В данном эксперименте изменение является в достаточной мере адиабатическим.

ном эксперименте. В любом случае пучок света возвращается с дополнительной топологической фазой, которая равняется половине центрального телесного угла, опирающегося на контур APB, т.е. $\alpha/2$. Она возникает в дополнение к большой по величине динамической фазе, которая возникает на всех стадиях прохождения света. Как указали Биттер и Дабберс, а также Берри, существование этой доминирующей части фазы затрудняет измерение ее дополнительной топологической составляющей. Однако величиной, которую можно уловить с помощью лазерного интерферометра, является изменение топологической фазы при медленном преобразовании контура APBA и APCA. Оно осуществляется в результате поворота пластинки QWP2 на угол θ при непрерывном контроле длины оптического пути интерферометром. При этом, однако, надо быть уверенным, что не происходит изменения динамической фазы при повороте пластинки QWP2. Это действительно справедливо при следующих условиях: (i) контуры на сфере Пуанкаре имеют форму, показанную на рис. II, т.е. луч света выходит из A и возвращается назад; (ii) пластина, осуществляющая повороты луча оптически однородна и имеет параллельные грани; и (iii) ось поворота совпадает с направлением лазерного пучка.

Проверка выполнения условий (ii) и (iii) осуществляется с помощью контрольного эксперимента, в котором QWP1 отсутствует, а QWP2 поворачивается в том же диапазоне углов, что и в основном эксперименте. Как показывает анализ этого эксперимента, если для пластины QWP2 выполняются условия (ii) и (iii), то полное изменение фазы Φ при повороте оси пластины на угол β определяется из соотношения $\tan \Phi = \tan^2 \beta$, где $\beta = 0^\circ$, отвечает случаю, когда быстрая ось QWP2 совпадает с направлением линейной поляризации падающего пучка света. Кривая зависимости Φ от β , определяемая вышеуказанным соотношением, имеет минимумы при $\beta = 0^\circ$ и 180° и максимумы при $\beta = 90^\circ$ и 270° и симметрична относительно этих четырех точек. Обозначим через β_m один из этих максимумов или минимумов. Тогда если выбрать диапазон углов поворота QWP2 таким, что β изменяется от $\beta_m - \theta/2$ до $\beta_m + \theta/2$, то можно ожидать, что никаких изменений фазы при поворотах наблюдаться не будет. Нулевой результат, полученный в этом контрольном эксперименте, говорит о том, что условия (ii) и (iii) выполнены. Тогда в основном эксперименте можно использовать тот же диапазон угла поворота, приводящий к изменению контура от APBA к APCA (рис. II). На рис. I2 дана схема экспериментальной установки. Стандартный лазерный интерферометр, предназначенный для промышленного использования, был слегка модифицирован в целях данного эксперимента. Предельное разрешение этого прибора $1/40$ длины волны. Оптическая длина пути непрерывно контролировалась и вычерчивалась автоматически компьютером в режиме *on line*. В некоторое время t_1 пластинка QWP2 (изолирован-

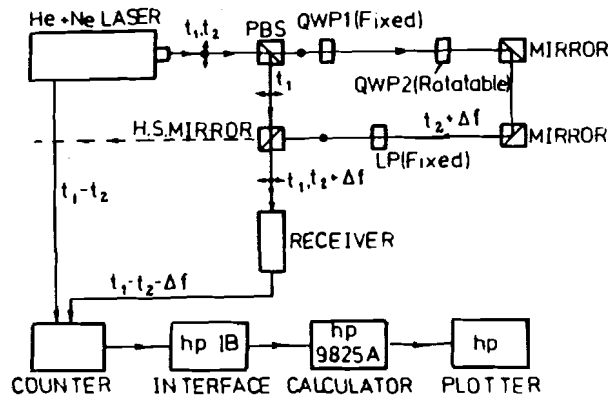


Рис.12. Схема экспериментальной установки^{/41/}. Использовался двух-частотный одномодовый He-Ne зеемановский лазер (6328 Å). При измерении длины оптического пути в одном из плеч интерферометра возникает изменение фазы, которое можно наблюдать как интеграл по времени от мгновенного сдвига частоты Δf . Для нахождения полного изменения фазы применяется счетчик, интегрирующий Δf . PBS - поляризующий делитель пучка; H. S. MIRROR - полупрозрачное серебряное зеркало; - линейный поляризатор (поляроид).

ная от вибраций установки) мягко поворачивалась вручную на угол θ . В следующий момент времени t_2 пластинка QWP2 возвращалась назад в исходное положение. Как это сказывалось на длине оптического пути, показано на рис.13а, для нескольких значений угла $\theta = 6^\circ, 30^\circ, 54^\circ$. Результаты контрольного эксперимента (без QWP1) для тех же углов показаны на рис.13б.

Рис.14 демонстрирует количественное согласие между ожидаемыми значениями топологической фазы (сплошная линия) и измеренными значениями (крестики). Шум, в основном, определяется температурными колебаниями в лаборатории. Разброс экспериментальных точек относительно прямой линии уменьшался, когда температура стабилизировалась. Представленные здесь данные получены в оптимальных условиях.

В настоящее время этот эксперимент, по-видимому, наиболее прямо демонстрирует проявление топологической фазы (поворот QWP2, вызывает сдвиг изображающей точки на сфере Пуанкаре).

Со времени открытия фазы Берри постепенно выяснялось, что это явление носит более общий характер, чем предполагалось в^{/3/}. Например, Аронов и Анандан^{/3/} показали, что для проявления фазы Берри не существенно предположение адиабатичности. По мнению авторов^{/41/}, дан-

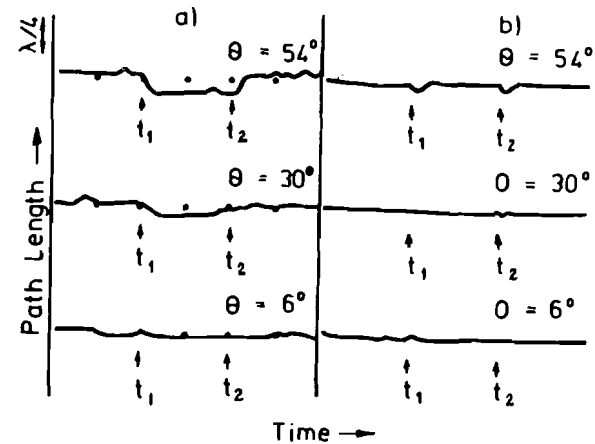


Рис.13. Экспериментальные зависимости длины оптического пути от времени для нескольких значений углов θ . Одно деление на вертикальной оси соответствует четверти длины волны. Дискретный шаг по времени равен $1/10$ горизонтального деления, соответствующего примерно 20 сек.

- Основной эксперимент, когда в момент времени t_1 четвертьволновая пластинка QWP2 поворачивается на угол θ , а в момент t_2 - на угол $-\theta$.
- Контрольный эксперимент (без QWP2), в котором в моменты времени t_1 и t_2 четвертьволновая пластинка QWP2 поворачивается на тот же самый угол, как и в основном эксперименте.

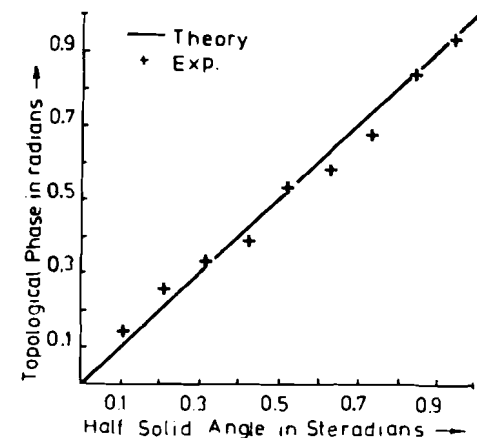


Рис.14. Зависимость наблюдаемой топологической фазы от телесного угла.

ный опыт подтверждает другое не менее важное обобщение: необязательность предположения об унитарности временной эволюции системы для появления этой фазы. Заметим, однако, что эволюционирующим состоянием здесь является состояние поляризации пучка, которое не зависит от интенсивности в линейном случае. Поэтому потеря интенсивности на поляроиде, очевидно, и не должна сказываться на формировании как динамической, так и топологической фаз.

б) Топологическая фаза при самоиндуцированном вращении эллипса поляризации света в нелинейной среде

Циклическая эволюция состояния поляризации светового пучка может быть осуществлена не только с помощью дискретных оптических элементов (пластинки $\lambda/4$, поляроиды), но и в распределенных оптических системах (сплошные среды). В частности, известно явление самоиндуцированной прецессии эллипса поляризации света в среде с нелинейностью керровского типа. Гаррисон и Чао впервые указали на связь этого нелинейного эффекта с топологической фазой Берри. Рассмотрим распространение интенсивного излучения с эллиптической поляризацией в среде с керровской нелинейностью. Медленно меняющаяся амплитуда $\vec{E}(\vec{r}, t)$ электрического поля $\vec{E} = R e \{ (\vec{E}(\vec{r}, t)) e^{i(kz - \omega t)} \}$ удовлетворяет укороченному волновому уравнению

$$i \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -\frac{1}{2k} \nabla_{\perp}^2 - G_0 \left\{ (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{3} (\vec{E}^* \cdot \vec{E}) \vec{E} \right\}, \quad (46)$$

где $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ - поперечная часть лапласиана; z - ось пучка; $G_0 = 3k n_2 / 8 n_0$, n_0 и n_2 - линейный показатель преломления и коэффициент нелинейной добавки к нему; $n = n_0 + n_2 |\vec{E}|^2$. Уравнение (46) представляет собой частный случай уравнения эволюции, причем z играет роль времени. Если пренебречь дифракцией и считать волны плоскими, то соответствующее гильбертово пространство $\mathcal{H} \ni \vec{E}$ есть пространство \mathbb{C}^2 комплексных двухкомпонентных векторов, описывающих состояние поляризации излучения. Если на входе ($z=0$) поле с эллиптической поляризацией задать в виде

$$\vec{E}(0) = E_0 (i\vec{e}^1), \quad (47)$$

то в произвольной точке (см. /45/) решение уравнения (46) выражается формулой

$$\vec{E}(z) = \exp(i\alpha z) R(\Gamma z) \vec{E}(0), \quad (48)$$

где $R(\gamma)$ - матрица поворота вокруг оси z на угол γ ,

$$\alpha = 4 G_0 E_0^2 (1 + \epsilon^2) / 3, \quad (49)$$

$$\Gamma = -2 G_0 E_0^2 \epsilon. \quad (50)$$

Таким образом, с ростом z поле вращается с постоянной угловой скоростью Γ и приобретает равномерно увеличивающийся фазовый сдвиг αz . Явление самоиндуцированной прецессии эллипса поляризации является примером циклической эволюции, причем полный оборот происходит при изменении z на величину $2\pi/|\Gamma| = \lambda$. На этом же интервале фазовый сдвиг, согласно (48), составляет $\Phi = 2\pi\alpha/\Gamma$. С другой стороны, для рассматриваемого примера можно вычислить динамическую и геометрическую фазы ω и δ . Согласно общему определению динамической фазы /40/

$$\omega = -\frac{G_0}{Q} \int_0^{\lambda} dz \left\{ |\vec{E} \cdot \vec{E}|^2 + \frac{1}{3} (\vec{E}^* \cdot \vec{E})^2 \right\} = -\frac{4\pi(1 - \epsilon^2 + \epsilon^4)}{3|\epsilon|(1 + \epsilon^2)}, \quad (51)$$

где использованы вытекающие из (48) соотношения:

$$|\vec{E}(z) \cdot \vec{E}(z)|^2 = |\vec{E}(0) \cdot \vec{E}(0)|^2 = E_0^4 (1 - \epsilon^2)^2, \\ [\vec{E}(z) \cdot \vec{E}(z)]^2 = Q^2 = E_0^4 (1 + \epsilon^2)^2.$$

Для вычисления δ нужно заметить, что в данном случае контур C , соответствующий решению (48), на сфере Пуанкаре представляет собой окружность с постоянным полярным углом $\theta = \theta_0$, где $\cos \theta_0 = -2\epsilon/(1 + \epsilon^2)$. Один период решения (48) соответствует обходу сферы Пуанкаре дважды по этой окружности. В результате вычислений получается (с точностью до 2π)

$$\delta = \text{sgn}(\epsilon) \Omega(C) = \frac{4\pi|\epsilon|}{1 + \epsilon^2}, \quad (52)$$

где $\Omega(C)$ - телесный угол, определяемый кривой C (с учетом двойного обхода сферы). Разность независимо найденных δ (52) и ω (51); с учетом $\Phi = 2\pi\alpha/\Gamma$ и соотношений (49), (50), равна

$$\Phi = \delta - \omega. \quad (53)$$

Таким образом, фазовый сдвиг поля при одном обороте эллипса поляризации складывается из геометрической и динамической частей. Гар-

рисон и Чао^{/40/} предлагают способ экспериментальной проверки этого факта. Поскольку измерение полного фазового сдвига Φ не представляет труда, достаточно измерить какую-либо одну из величин δ и ω . С этой целью предлагается использовать интерферометр, в одном из плеч которого находится керровская среда с описанным выше нелинейным механизмом вращения эллипса поляризации. В другом плече находится оптически линейная среда, сделанная одновременно изотропной и двулучепреломляющей путем наложения статических электрического и магнитного полей. В такой среде собственным типом поляризации является эллиптическая поляризация. Осуществляя адиабатически медленное вращение статического электрического поля, эллипсу поляризации можно придать вращение, точно совпадающее с вращением в первом плече интерферометра. Тогда контуры C и, следовательно, геометрические фазы δ , в обоих плечах будут одинаковы. При этом динамические фазы ω , связанные с динамической природой вращения эллипса поляризации, будут различны. В результате интерференции пучков на выходе получается картина, зависящая от разности динамических фаз. Отсюда, зная Φ и ω , несложно найти и δ . Отметим, что геометрическая фаза δ , о которой идет речь в разделе 4, отлична от геометрической фазы Томита и Чао^{/19/}.

6. Заключительные замечания

Интерес к фазе Берри объясняется как простотой и общностью рассматриваемых теоретических вопросов, так и большим количеством практических задач, в которых проявляются топологические фазы. В настоящее время геометрические представления, связанные с фазой Берри, находят применение в различных областях атомной и молекулярной физики, в оптике и в физике элементарных частиц.^{/8/}

Учет проявлений нетривиальных фаз, в частности, фазы Берри, в экспериментах необходим для их правильной интерпретации. Четкое разделение динамических и геометрических свойств эволюционирующих систем позволяет выделять их инвариантные характеристики, подобные топологическому заряду. Для описания ряда явлений топологические фазы являются единственно адекватным физическим языком. Наряду с прямой количественной проверкой предсказаний теории экспериментальные работы в этом направлении могут натолкнуть на обнаружение новых динамических эффектов, в свою очередь стимулирующих развитие теории.

Литература

1. Born M., Fock V. - Z.Phys.1928, 51, N.3, s.165.
2. Бакай А.С., Степановский Ю.П. Адиабатические инварианты, Киев, Наукова думка, 1981, 283 с.
3. Berry M.V. Proc. Roy. Soc. 1984, A392, p. 45. Scientific American 1988, v.259, N 6, p.26.
4. B.Simon B. Phys.Rev.Lett. 1983, v.51, 2167.
5. Wilczek F., Zee A. Phys.Rev.Lett., 1984, v.52, 2111.
6. Шифф Л. Квантовая механика. М. ИЛ. 1959, 474 с.
7. Fock V. Zeitschr. f.Phys. B49, H5 and 6, s.323, 1928.
8. Jackiw R. Comments on Atomic and Molecular Physics, 1988, v.21, N 2, p.71.
9. Aharonov Y., Anandan J. Phase change during a cyclic quantum evolution. Phys.Rev.Letters, 1987, v.58, N 16, 1593.
10. Anandan J. Phys.Lett.A, 1988, v.133, N 4-5, p.171.
11. Narasimhan M.S. and Ramanan S. Am.J.Math. 1961, v.83, p.563.
12. Kiritsis E. Commun.Math. Phys. 1988, v.III, p.417.
13. Berry M.V. Proc.Roy.Soc. London, 1987, v.414, p.31.
14. Berry M.V. J.Mood.Opt. 1987, v.34, N , p.1401.
15. Samuel J., Bhandari R. Phys.Rev.Lett. 1988, v.60, N 23, p.2339.
16. Ритов С.М. ДАН СССР, 1938, т.28, № 4-5, с.263.
17. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред, М., Наука, 1980, с.304.
18. Владимирский В.В. ДАН СССР, 1941, т.31, № 3, с.222.
19. Tomita A. and Chiao R.V. Phys.Rev.Lett. 1986, v.57, N 8, p.937.
20. Chiao R.Y., Antaramian A., Ganga K.M., Jiao H., Wilkinson S.R. Phys.Rev.Lett. 1988, v.60, N 13, p.1214.
21. Chiao R.Y. and Wu Y.S. Phys.Rev.Lett. 1986, v.57, N 8, p.933.
22. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика (4 издание). М., Наука, 1981, с.432.
23. Robinson A.L. Science, 1986, v.234, N 4775, p.424.
24. McCallum M. New Scientist, 1986, 20 November, p.22.
25. Maddox John. Nature, 1986, v.323, 18 September, p.199.
26. Haldane F.D. Phys.Rev.Lett. 1987, v.59, N 15, p.1788.
27. Ross J.N. Opt. Quant. Electron, 1984, v.16, p.455.
28. Varnham M.P., Birch R.D., Payne D.N. Tech.Dig.Int.Conf. Integrated Optics, Optical Fiber Commun. Eur. Conf.Opt.Communs., p.135, Geneva, 1985.
29. Varnham M.P., Birch R.D., Payne D.N., Love J.D. Tech.Dig.Conf. Opt.Fiber Commun., Atlanta, p.68, OSA, 1986.

30. Haldane F.D.M. Opt.Letters, 1986, v.11, p.730.
31. Segert J. Phys.Rev.A. 1987, v.36, N 1, p.10.
32. Kugler M., Shtrikman S. Berry's phase, Locally Inertial Frames, and Classical Analogues. Preprint WIS-87/49/June-PH, 1987, p.33.
33. Berry M.V. Nature, 1987, v.326, N 6110, p.277.
34. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. Мир, 1987.
35. Степановский Ю.П. Укр.физич.журнал, 1964, т.9, № II, с.1165.
36. Степановский Ю.П. ТМФ, 1981, т.47, № 3, с.343.
37. Bialynicki-Birula I. and Bialynicki-Birula S. Phys.Rev.D, 1987, v.35, N 8, p.2383.
38. Jordan T.F. J.Math.Phys. 1987, v.28, N 8, p.1759.
39. Борн М., Вольф Е. Основы оптики. М., Наука, 1970.
40. Garrison J.C., Chiao R.Y. Phys.Rev.Lett. 1988, v.60, N 3, p.165.
41. Bhandari R., Samuel J. Phys.Rev.Lett., 1988, v.60, N 13, p.1211.
42. Pancharatnam S. Proc.Ind. Acad.Sci., 1956, v.A44, p.247. Collected Work of S.Pancharatnam ed. by G.W.Series (Oxford Univ.Press, New-York, 1975).
43. Pack R.T. and Parker G.A. J.Chem.Phys. 1987, v.87, N 7, p.3888.
44. Marker P.D., Terhune R.W. and Savage C.M. Phys.Rev.Lett. 1964, v.12, p.507.
45. Chiao R.Y. and Godine J. Phys. Rev., 1969, v.185, p.430.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 марта 1989 года.

Виницкий С.И. и др.

P4-89-178

Топологическая фаза Владимирского - Берри
в оптических поляризационных экспериментах

Рассмотрены теоретические и экспериментальные проблемы, связанные с топологической фазой Владимирского - Берри. Эта фаза возникает при циклическом изменении состояния некоторых оптических и квантовомеханических систем. Анализируются недавние специальные эксперименты по измерению поляризации световой волны, распространяющейся по неплоскому замкнутому контуру. Проверка классического предсказания Владимирского /1941/ стала возможной в настоящее время в связи с появлением высококачественных одномодовых оптических световодов и лазерных интерферометров.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод авторов

Vinitsky S.I. et al.

P4-89-178

Topological Phase of Vladimirsky - Berry
in Optical Polarization Experiments

In the review, the theoretical and experimental problems connected with the topological Vladimirsky - Berry phase, are considered. This phase arises under cyclic changes of states of some optical and quantum-mechanical systems. The recent special experiments on the measurement of light polarization are analysed. The check of the classical prediction of Vladimirsky (1941) has become possible only in our days when the high-quality one-mode guides and laser interferometers appeared.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989