89-125

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4-89-125

Е.Б.Бальбуцев, С.И.Баструков*, И.Н.Михайлов,
В.П.Синичкин*, Л.Ш.Шехтер*

ВИБРАЦИОННЫЕ 1^+-, 2^+-, 3^+- И 4^+-ВОЗБУЖДЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКИХ ЯДРАХ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

*Саратовский государственный университет

1989

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитый в работах [1-3] метод моментов применяется здесь для изучения коллективных 1^--, 2^+-, 3^-- и 4^+-возбуждений атомных ядер. При этом кроме очевидного намерения описать свойства гигантских резонансов более высокой мультипольности преследуются еще по меньшей мере две цели.

Во-первых, опыт расчета квадрупольных и октупольных возбуждений показывает, что по мере увеличения ранга тензоров, привлекаемых для расчетов, уравнения метода наряду с гигантскими резонансами дают и низколежащие моды. В этой работе мы решаем уравнения для тензоров 4-го ранга, поэтому имеются все основания ожидать появления низколежащих 2^+-состояний. Известно, что такие состояния не получаются в методе фазового пространства /МФП/, по крайней мере без специальных его усовершенствований [4-6], но давно уже известны в RPA-расчетах [7,8] и в ТКФС [9]. Тем более интересна эта проблема с точки зрения нашего метода, имеющего много общего как с МФП, так и с RPA.

Заметим в этой связи, что предполагаемое в дальнейшем исследование уравнений для тензоров еще более высокого ранга интересно прежде всего именно в связи с возможностью изучения низколежащих мод, поскольку надежных экспериментальных сведений о гигантских резонансах высших мультипольностей пока нет.

Вторая цель имеет методический характер. Речь идет о ГКР. Раньше [1,2] для его описания мы ограничивались тензорами второго ранга. Теперь же будет решаться система уравнений, содержащая тензоры как 2-го, так и 4-го ранга, так что, в принципе, свойства ГКР могут измениться. Интересно знать - насколько? Фактически, это вопрос устойчивости метода.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Формулировка метода достаточно полно изложена в [3]. Следуя этой работе, сразу выпишем необходимые пять /из бесконечной цепочки/ уравнений для моментов функции Вигнера $f(\vec{r},\vec{p},t)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0, \qquad /1/$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + n\frac{\partial W}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j + P_{ij}) = 0, \qquad /2/$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{ij} + \sum_{k=1}^{3} [P_{jk}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}]_{ij} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(u_k P_{ij} + P_{ijk}) = 0, \qquad /3/$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{ijk} + \sum_{\ell=1}^{3} [P_{jk\ell}\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} - \frac{1}{\rho}P_{jk}\frac{\partial}{\partial x_\ell}P_{i\ell}]_{ijk} + \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\ell}(u_\ell P_{ijk} + P_{ijk\ell}) = \frac{\hbar^2 n}{4m^2}\frac{\partial^3 W}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \qquad /4/$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{ijk\ell} + \sum_{s=1}^{3} [P_{jk\ell s}\frac{\partial}{\partial x_s}u_i - \frac{1}{\rho}P_{jk\ell}\frac{\partial}{\partial x_s}P_{is}]_{ijk\ell} + \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_s}(u_s P_{ijk\ell} + P_{ijk\ell s}) = 0. \qquad /5/$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\rho(\vec{r},t) = mn(\vec{r},t) = m\int f(\vec{r},\vec{p},t)\,d\vec{p},$$

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \int \vec{p} f(\vec{r},\vec{p},t)\,d\vec{p}/\rho(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r},t)/n(\vec{r},t),$$

$$P_{i_1\ldots i_n}(\vec{r},t) = m^{1-n}\int (p_{i_1} - mu_{i_1})\ldots(p_{i_n} - mu_{i_n}) f(\vec{r},\vec{p},t)\,d\vec{p},$$

$$W(\vec{r}) = U(\vec{r}) + \frac{Ze}{A}C(\vec{r}),$$

$U(\vec{r})$ - потенциал ядерных сил, $C(\vec{r})$ - кулоновский потенциал, e - заряд протона, Z - число протонов, A - число нуклонов, m - масса нуклона. Символ $[\ldots]_{i\ldots j}$ означает симметризацию по индексам $i,\ldots j$, например, $[A_{ij,k\ell}]_{ijk\ell} = A_{ij,k\ell} + A_{k\ell,ij} + A_{kj,i\ell} + A_{\ell j,ki} + A_{ik,j\ell} + A_{i\ell,kj}$.

Согласно рецептам работы [3] для описания коллективных возбуждений положительной четности с мультипольностью $\lambda \leq 4$ требуются две системы вириальных уравнений. Первая из них для тензоров второго ранга исследовалась в работах [1,2]. Она получается интегрированием по $\vec{r}$ уравнений /1/-/3/ с весами $x_i x_j$, x_j и 1 соответственно:

$$\frac{\partial}{\partial t} J_{ij} - [\int u_i x_j \rho d\vec{r}]_{ij} = 0, \qquad /6/$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho u_i x_j d\vec{r} - \int \rho u_i u_j d\vec{r} - \Pi_{ij} + \int n x_j \frac{\partial W}{\partial x_i} d\vec{r} = 0, \qquad /7/$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi_{ij} + \sum_{k=1}^{3} [\int P_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\vec{r}]_{ij} = 0, \qquad /8/$$

где

$$J_{ij}(t) = \int x_i x_j \rho(\vec{r}, t) d\vec{r}, \quad \Pi_{ij}(t) = \int P_{ij}(\vec{r}, t) d\vec{r}.$$

Вторая система, для тензоров четвертого ранга, получается интегрированием по $\vec{r}$ уравнений /1/-/5/ с весами $x_i x_j x_k x_\ell$, $x_j x_k x_\ell$, $x_k x_\ell$, x_ℓ и 1 соответственно:

$$\frac{\partial}{\partial t} J_{ijk\ell} - [\int \rho u_i x_j x_k x_\ell d\vec{r}]_{ijk\ell} = 0, \qquad /9/$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho u_i x_j x_k x_\ell d\vec{r} - [\Pi_{ij}^{k\ell} + \int \rho u_i u_j x_k x_\ell d\vec{r}]_{jk\ell} + \int n x_j x_k x_\ell \frac{\partial W}{\partial x_i} d\vec{r} = 0, \qquad /10/$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi_{ij}^{k\ell} - [\Pi_{ijk}^{\ell} + \int P_{ij} u_k x_\ell d\vec{r}]_{k\ell} + \sum_{s=1}^{3} [\int P_{js} \frac{\partial u_i}{\partial x_s} x_k x_\ell d\vec{r}]_{ij} = 0, \qquad /11/$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi_{ijk}^{\ell} + \sum_{s=1}^{3} [\int P_{jks} \frac{\partial u_i}{\partial x_s} x_\ell d\vec{r} - \int \frac{1}{\rho} P_{ij} \frac{\partial P_{ks}}{\partial x_s} x_\ell d\vec{r}]_{ijk} -$$
$$- \Pi_{ijk\ell} - \int P_{ijk} u_\ell d\vec{r} = \frac{\hbar^2}{4m^2} \int n x_\ell \frac{\partial^3 W}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} d\vec{r}, \qquad /12/$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi_{ijk\ell} + \sum_{s=1}^{3} [\int P_{jk\ell s} \frac{\partial u_i}{\partial x_s} d\vec{r} - \int \frac{1}{\rho} P_{jk\ell} \frac{\partial P_{is}}{\partial x_s} d\vec{r}]_{ijk\ell} = 0. \qquad /13/$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Pi_{ij}^{k\ell}(t) = \int P_{ij}(\vec{r}, t) x_k x_\ell d\vec{r}, \quad \Pi_{ijk}^{\ell}(t) = \int P_{ijk}(\vec{r}, t) x_\ell d\vec{r},$$

$$\Pi_{ijk\ell}(t) = \int P_{ijk\ell}(\vec{r},t)\,d\vec{r},\quad J_{ijk\ell}(t) = \int x_i x_j x_k x_\ell \rho(\vec{r},t)\,d\vec{r}.$$

Теперь нужно проварьировать выписанные системы вириальных уравнений в соответствии с правилами вариации интегральных величин [10]. Эти вариации описывают малое отклонение системы от равновесия /основного состояния/ и позволяют после некоторых приближений /см.ниже/ найти ее собственные частоты мультипольности $\lambda \le 4$. При варьировании уравнений /6/-/13/ во многих подынтегральных выражениях появятся следующие вариации: δn, δu_i, δP_{ij}, δP_{ijk}. Для вариации δn с помощью уравнения непрерывности /1/ можно вывести формулу [11]

$$\delta n = -\operatorname{div}(n\vec{\xi}), \tag{/14/}$$

где введено бесконечно малое смещение $\xi_i = u_i\,dt$. Оно очевидным образом [11] связано с δu_i:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \delta u_i. \tag{/15/}$$

Смещение ξ_i и вариации δP_{ij}, δP_{ijk} - неизвестные функции $\vec{r}$ и t. В соответствии с [3] предлагается искать их в следующем виде:

$$\xi_i(\vec{r},t) = L_i(t) + \sum_{j=1}^{3} L_{i,j}(t)x_j + \sum_{j,k=1}^{3} L_{i,jk}(t)x_j x_k + \sum_{j,k,\ell=1}^{3} L_{i,jk\ell}(t)x_j x_k x_\ell, \tag{/16/}$$

$$\delta P_{ij}(\vec{r},t) = n(\vec{r},t)\left[D_{ij}(t) + \sum_{k=1}^{3} D_{ij}^{k}(t)x_k + \sum_{k,\ell=1}^{3} D_{ij}^{k\ell}(t)x_k x_\ell\right], \tag{/17/}$$

$$\delta P_{ijk}(\vec{r},t) = n(\vec{r},t)\left[N_{ijk}(t) + \sum_{\ell=1}^{3} N_{ijk}^{\ell}(t)x_\ell\right]. \tag{/18/}$$

Это наше главное приближение. Оно позволяет получить замкнутую систему уравнений для различных мультипольных моментов. Аргументы в его пользу уже приводились в [2,3,11]. В дополнение к ним отметим, что в случае гексадекапольных колебаний формула /16/ эквивалентна анзацу Тасси [12], а в случае квадрупольных колебаний представляет собой его обобщение. Кроме того, при $\lambda = 4$ формулы /16/-/18/ являются в определенном смысле "длинноволновым приближением", а при $\lambda = 2$ это уже выход за его рамки.

Для упрощения расчетов сделаем еще несколько достаточно очевидных /но, в принципе, не обязательных/ приближений и допущений.

Будем считать, что в состоянии равновесия ядро имеет сферическую форму, для равновесных значений u_i и P_{ijk} примем $u_i^{(0)}=0$, $P_{ijk}^{(0)} = 0$.

Равновесные значения тензоров $P_{ij}^{(0)}$ и $\Pi_{ijk\ell}^{(0)}$ связаны соотношением, следующим из уравнения /12/:

$$\Pi_{ijk\ell}^{(0)} + \left[\sum_{s=1}^{3} \int \frac{1}{\rho^{(0)}} P_{ij}^{(0)} x_\ell \frac{\partial}{\partial x_s} P_{ks}^{(0)} d\vec{r}\right]_{ijk} = -\frac{\hbar^2}{4m^2} \int n^{(0)} x_\ell \frac{\partial^3 W}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} d\vec{r}. \qquad /19/$$

В сферическом ядре тензор $P_{ij}^{(0)}$, очевидно, должен быть диагональным и изотропным: $P_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} P^{(0)}$. Для расчета $P^{(0)}$ мы воспользуемся приближением Томаса - Ферми:

$$P^{(0)} = \frac{\hbar^2}{5m} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{2/3} n^{5/3}.$$

Введем в рассмотрение переменные

$$V_{i,j} = \int \rho \xi_i x_j d\vec{r} \quad \text{и} \quad V_{i,jk\ell} = \int \rho \xi_i x_j x_k x_\ell d\vec{r},$$

через которые наиболее просто выражаются вариации тензоров инерции J_{ij} и $J_{ijk\ell}$: $\delta J_{ij} = [V_{i,j}]_{ij}$, $\delta J_{ijk\ell} = [V_{i,jk\ell}]_{ijk\ell}$. Они линейно связаны с $L_{i,j}$ и $L_{i,jk\ell}$:

$$L_{i,j} = \frac{35}{mAR^4(49\zeta - 45\eta^2)} \left(7R^2 \zeta V_{i,j} - 9\eta \sum_{s=1}^{3} V_{i,jss}\right), \qquad /20/$$

$$L_{i,jk\ell} = \frac{105}{2Am\zeta R^6} \Big\{ V_{i,jk\ell} - \frac{1}{49\zeta - 45\eta^2} \Big[2\eta\zeta R^2 \delta_{k\ell} V_{i,j} + (7\zeta - 9\eta^2) \sum_{s=1}^{3} \delta_{k\ell} V_{i,jss} \Big]_{jk\ell} \Big\}, \qquad /21/$$

где

$$\eta = \frac{21}{25} \frac{\langle r^4 \rangle}{\langle r^2 \rangle^2}, \quad \zeta = \frac{81}{125} \frac{\langle r^6 \rangle}{\langle r^2 \rangle^3}, \quad R^2 = \frac{5}{3} \langle r^2 \rangle,$$

$$<\phi(\vec{r},\vec{p})> = A^{-1}\int f(\vec{r},\vec{p},t)\,\phi(\vec{r},\vec{p})\,d\vec{p}\,d\vec{r}.$$

В приближении резкого края $\eta = \zeta = 1$. Аналогично вариации $\delta\Pi_{ij}$ и $\delta\Pi_{ij}^{k\ell}$ могут быть связаны с функциями D_{ij} и $D_{ij}^{k\ell}$:

$$D_{ij} = \frac{35}{A(25\eta - 21)}\left(\frac{5}{7}\eta\delta\Pi_{ij} - \frac{1}{R^2}\sum_{s=1}^{3}\delta\Pi_{ij}^{ss}\right), \qquad /22/$$

$$D_{ij}^{k\ell} = \frac{35}{2A\eta R^4}\left\{\delta\Pi_{ij}^{k\ell} + \frac{\delta_{k\ell}}{25\eta - 21}\left[(7-5\eta)\sum_{s=1}^{3}\delta\Pi_{ij}^{ss} - 2\eta R^2\delta\Pi_{ij}\right]\right\}. \qquad /23/$$

Функции L, D и N с нечетным числом индексов не войдут в окончательные уравнения из-за трипланарной симметрии ядра.

В итоге вариации вириальных уравнений /6/-/13/ принимают вид

$$\ddot{V}_{i,j} = \delta\Pi_{ij} + \delta C_{ij} - 2\delta\sigma_{ij} + \delta U_{ij}, \qquad /24/$$

$$\delta\dot{\Pi}_{ij} = \frac{<p^2>}{3m^2R^2}\,\frac{35}{49\zeta - 45\eta^2}\left[(9\eta - 7\zeta)\dot{V}_{i,j} - \frac{9(7-5\eta)}{5R^2}\sum_s \dot{V}_{i,jss}\right]_{ij}, \qquad /25/$$

$$\ddot{V}_{i,jk\ell} = \delta C_{i,jk\ell} - \delta\Sigma_{i,jk\ell} + \delta\mathfrak{U}_{i,jk\ell} + [\delta\Pi_{ij}^{k\ell}]_{jk\ell}, \qquad /26/$$

$$\delta\dot{\Pi}_{ij}^{k\ell} = \frac{<p^2>}{3m^2}(\delta_{ij}\dot{V}_{k\ell} - \delta_{k\ell}\dot{V}_{ij}) + \frac{7<p^2><r^4>}{3m^2<r^6>}\left\{\frac{2\eta\zeta R^2}{49\zeta - 45\eta^2}[\delta_{j\ell}\dot{V}_{i,k} +\right.$$

$$+ \delta_{i\ell}\dot{V}_{j,k}]_{k\ell} - [\dot{V}_{i,jk\ell}]_{ij} + \sum_{s=1}^{3}\left(\delta_{k\ell}\dot{V}_{s,sij} - \frac{9\eta^2 - 7\zeta}{49\zeta - 45\eta^2}[\delta_{j\ell}\dot{V}_{i,kss} +\right. \qquad /27/$$

$$\left.\left. + \delta_{i\ell}\dot{V}_{j,kss}]_{k\ell}\right)\right\} + [\delta\Pi_{ijk}^{\ell}]_{k\ell},$$

$$\delta\dot{\Pi}_{ijk}^{\ell} = \frac{<p^2>}{3m^2(25\eta - 21)}\{5(7-5\eta)[\delta_{k\ell}\delta\Pi_{ij}]_{ijk} - 14[\delta_{ij}\delta\Pi_{k\ell}]_{ijk}\} +$$

$$+\delta\Pi_{ijk\ell} + \chi_{ijk,\ell} + \frac{5\langle p^2\rangle\langle r^2\rangle}{3m^2\langle r^4\rangle}\{[\delta_{ij}\sum_{s=1}^{3}\delta\Pi^{\ell s}_{ks} - \delta\Pi^{k\ell}_{ij}]_{ijk} + \qquad /28/$$

$$+\frac{7-5\eta}{25\eta-21}\sum_{s=1}^{3}[\delta_{ij}\,\delta\Pi^{ss}_{k\ell} - \delta_{k\ell}\delta\Pi^{ss}_{ij}]_{ijk},$$

$$\delta\dot{\Pi}_{ijk\ell} = [\frac{\langle p^4\rangle}{5m^2\langle p^2\rangle}\delta_{jk}\,\delta\dot{\Pi}_{i\ell} - \frac{\langle p^2\rangle}{m^2\langle r^2\rangle}\delta\Pi^{i}_{jk\ell}]_{ijk\ell}. \qquad /29/$$

Здесь

$$\chi_{ijk,\ell} = \frac{\hbar^2}{4m^2}\,\delta\int n x_\ell \frac{\partial^3 W}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\,d\vec{r}.$$

Определения тензоров кулоновских сил C_{ij} и $C_{i,jk\ell}$ можно найти в приложении 1. Тензоры ядерных сил так же, как это делалось в работах[1,2,3], разделены на поверхностную и объемную части:

$$\int n x_j \frac{\partial U}{\partial x_i}\,d\vec{r} = 2\sigma_{ij} - U_{ij}, \quad \int n x_j x_k x_\ell \frac{\partial U}{\partial x_i}\,d\vec{r} = \Sigma_{i,jk\ell} - \mathcal{U}_{i,jk\ell},$$

где

$$2\sigma_{ij} = -\int x_j U \frac{\partial n}{\partial x_i}\,d\vec{r}, \quad U_{ij} = \delta_{ij}\int n U d\vec{r}, \quad \Sigma_{i,jk\ell} = 2[\sigma_{ij,k\ell}]_{jk\ell},$$

$$2\sigma_{ij,k\ell} = -\int x_j x_k x_\ell U \frac{\partial n}{\partial x_i}\,d\vec{r}, \quad \mathcal{U}_{i,jk\ell} = [\delta_{ij}\,\mathcal{U}_{k\ell}]_{jk\ell}, \quad \mathcal{U}_{k\ell} = \int n U x_k x_\ell d\vec{r}.$$

С целью дальнейшего упрощения расчетов будем считать ядерное вещество несжимаемым, край ядра - резким. Из уравнения непрерывности при этом возникает условие $\mathrm{div}\vec{\xi} = 0$. Оно приводит к соотношениям

$$\sum_{s=1}^{3} V_{ss} = 0, \quad \sum_{s=1}^{3} V_{ijss} = R^2 V_{ij}, \qquad /30/$$

где

$$V_{ij} = V_{i,j} + V_{j,i}, \quad V_{ijk\ell} = [V_{i,jk\ell}]_{ijk\ell}.$$

В случае резкого края ядра среднее поле на его поверхности имеет смысл аппроксимировать поверхностным натяжением [3,13]. Тогда для тензоров σ_{ij} и $\delta\sigma_{ij}$ получаются выражения, приведенные в [1,13], а для тензора $\delta\Sigma_{i,jk\ell}$ имеем

$$\delta\Sigma_{i,jk\ell} = \frac{24\pi T}{mA} \{V_{i,jk\ell} - \frac{R^2}{9} [\delta_{jk} V_{i\ell}]_{jk\ell}\}, \qquad /31/$$

где $T = b/4\pi r_0^2$ - коэффициент поверхностного натяжения, $b = 17$ МэВ, $r_0 = 1{,}2$ фм. Формулы для тензоров кулоновских сил и для их вариаций можно найти в работах [10,14]. Последний член /квантовая поправка/ в уравнении /28/ вычисляется так же, как в октупольной задаче [3,15]:

$$\chi_{ijk,\ell} = -\frac{5\pi T\hbar^2}{Am^3R^2} [\delta_{ij} \{\frac{3}{5} V_{k\ell} - \frac{1}{R^2} \sum_{s=1}^{3} (V_{k,\ell ss} + V_{\ell,kss})\}]_{ijk\ell} .$$

3. РАСЧЕТ ЭНЕРГИЙ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Учитывая, что индексы i, j, k, ℓ принимают значения 1,2,3, нетрудно подсчитать, что система /24/-/29/ содержит 126 уравнений. Перекомбинируем их так, чтобы получились уравнения для тензоров, неприводимых по группе вращений. Поскольку в сферическом ядре мультипольный момент λ является хорошим квантовым числом, система уравнений должна распасться на пять независимых блоков, соответствующих $\lambda = 4,3,2,1,0$. Декартовы тензоры различной симметрии разбиваются на неприводимые следующим образом [16]:

$$T_{i,j} \Rightarrow \mathcal{T}_{00} + \mathcal{T}_{1\mu} + \mathcal{T}_{2\mu}, \quad T_{ij} \Rightarrow \mathcal{T}_{00} + \mathcal{T}_{2\mu},$$

$$T_{i,jk\ell} \Rightarrow \mathcal{T}_{00} + \mathcal{T}_{1\mu} + 2\mathcal{T}_{2\mu} + \mathcal{T}_{3\mu} + \mathcal{T}_{4\mu},$$

$$T_{ij,k\ell} \Rightarrow 2\mathcal{T}_{00} + \mathcal{T}_{1\mu} + 3\mathcal{T}_{2\mu} + \mathcal{T}_{3\mu} + \mathcal{T}_{4\mu},$$

$$T_{ijk\ell} \Rightarrow \mathcal{T}_{00} + \mathcal{T}_{2\mu} + \mathcal{T}_{4\mu}.$$

Рассмотрим отдельно возбуждения каждой мультипольности /монопольные возбуждения отсутствуют из-за приближения несжимаемости/.

3.1. Гексадекапольные возбуждения /4^+/

Система уравнений для тензоров мультипольности $\lambda = 4$ имеет вид

$$\ddot{\Gamma}^{(1)}_{4\mu} + \beta \Gamma^{(1)}_{4\mu} - 2\Gamma^{(2)}_{4\mu} = 0,$$
$$\dot{\Gamma}^{(2)}_{4\mu} + \frac{27}{10}\gamma^2 \dot{\Gamma}^{(1)}_{4\mu} - 3\Gamma^{(3)}_{4\mu} = 0,$$
$$\dot{\Gamma}^{(3)}_{4\mu} + \frac{7}{5}\gamma^2 \Gamma^{(2)}_{4\mu} - 4\Gamma^{(4)}_{4\mu} = 0, \qquad /32/$$
$$\frac{27}{10}\gamma^4 \dot{\Gamma}^{(1)}_{4\mu} + \gamma^2 \dot{\Gamma}^{(2)}_{4\mu} + 6\dot{\Gamma}^{(4)}_{4\mu} = 0.$$

Здесь

$$\beta = (27 - 10X)\, 32\pi T/9mA, \quad \gamma^2 = \hbar^2 (9\pi/A)^{2/3}/2m^2 r_0^4,$$

X - параметр делимости, $\Gamma^{(1)}_{4\mu}$ - вариация электрического гексадекапольного момента ядра $Q_{4\mu} = (eZ/A)\int n(\vec{r})\, r^4 Y_{4\mu}(\theta,\phi)\, d\vec{r}$. Тензоры $\Gamma^{(i)}_{4\mu}$ являются линейными комбинациями переменных $V_{1,jk\ell}$, $\delta\Pi^{k\ell}_{ij}$, $\delta\Pi^{\ell}_{ijk}$ и $\delta\Pi_{ijk\ell}$ / см.приложение II/. Последнее уравнение системы /32/ дает, очевидно, интеграл движения $\frac{27}{10}\gamma^4\Gamma^{(1)}_{4\mu} + \gamma^2\Gamma^{(2)}_{4\mu} + 6\Gamma^{(4)}_{4\mu} = \text{const}$, а из первых трех получается характеристическое уравнение

$$\omega^4 - \omega^2\left(\frac{58}{5}\gamma^2 + \beta\right) + \frac{\gamma^2}{5}(54\gamma^2 + 31\beta) = 0. \qquad /33/$$

Его решение дает два девятикратно вырожденных уровня энергии: $E^{(1)}_4 \approx 70\ A^{-1/3}$ МэВ и $E^{(2)}_4 \approx 212\ A^{-1/3}$МэВ. Они изображены на рис.1 сплошными линиями /для ядер с дорожки β-стабильности/. Там же представлены экспериментальные данные по гигантским гексадекапольным резонансам /ГГР/ из /17-21/ . Как видно, решение с меньшей энергией неплохо с ними согласуется. Расхождение в легких ядрах должно уменьшиться при учете размытости края ядра и сжимаемости. Этот резонанс приблизительно соответствует ожидаемому переходу с $\Delta N = 2$ и обычно воспроизводится в RPA-расчетах различной степени сложности/7,8,21,22/ . Без учета кулоновских и поверхностных сил $E^{(1)}_4$ опускается к 65 $A^{-1/3}$ МэВ.

Второй 4^+-резонанс /с энергией $\sim 212\ A^{-1/3}$ МэВ/ лежит явно выше ожидаемого возбуждения с $\Delta N = 4$, которое, как правило, и получается в RPA-расчетах/8,21,22/ . Исключение составляет лишь работа/7/ , предсказывающая положение второго 4^+-уровня в том

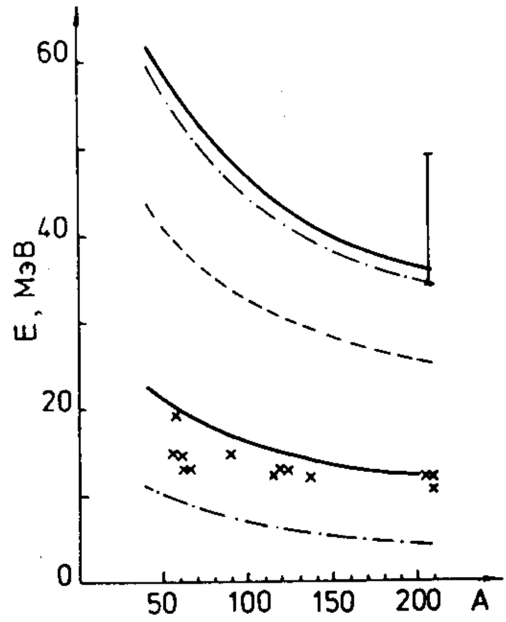

Рис.1. Гексадекапольные возбуждения. Сплошные кривые – точный расчет, штрихпунктирные – учтены квадрупольная и октупольная ДПФ, пунктирная – учтена только квадрупольная ДПФ. Крестики – экспериментальные данные из[17–21]. Экспериментальные границы для верхнего 4^{+}-возбуждения – из работы[20].

же районе, что и мы. Имеющееся одно экспериментальное указание[20] согласуется с нашим расчетом /см. рис.1/.

Если не принимать во внимание переменные $\delta\Pi_{ijk\ell}$ /т.е. $\Gamma^{(4)}_{4\mu}$ / и, соответственно, отбросить последнее уравнение в /32/ /что эквивалентно пренебрежению гексадекапольной деформацией поверхности Ферми /ДПФ//,то решения ощутимо смещаются, удаляясь от эксперимента /штрихпунктирные кривые/. Если же пренебречь еще и октупольной ДПФ /переменные $\delta\Pi^{\ell}_{ijk}$ /, то остается только одно решение /пунктирная кривая/, которое не имеет ничего общего с экспериментом, но совпадает /если пренебречь также кулоновскими и поверхностными силами/ с результатом работы[23]: $E_4 \approx$ $\approx 150\ A^{-1/3}$ МэВ.

3.2. Октупольные возбуждения 3^{+}

Для тензора мультипольности $\lambda = 3$ получается следующая система уравнений:

$$\dot F^{(1)}_{3\mu} - 2F^{(2)}_{3\mu} = 0,$$

$$\dot F^{(2)}_{3\mu} + \frac{9}{10}\gamma^{2}F^{(1)}_{3\mu} + F^{(3)}_{3\mu} = 0, \qquad /34/$$

$$10\,\dot F^{(3)}_{3\mu} - 7\gamma^{2}\dot F^{(1)}_{3\mu} = 0.$$

Здесь $F^{(1)}_{3\mu}$ - вариация магнитного октупольного момента ядра $\mathfrak{M}_{3\mu} = (eZ/4Ac)\int n(\vec{r})\vec{\nabla}(r^3 Y_{3\mu})\cdot[\vec{r}\times\vec{u}]d\vec{r}$, c - скорость света. Тензоры $F^{(i)}_{3\mu}$ являются линейными комбинациями тензоров $V_{i.jk\ell}$, $\delta\Pi^{k\ell}_{ij}$ и $\delta\Pi^{\ell}_{ijk}$ /см.приложение II/.

Последнее уравнение системы /34/ дает, очевидно, интеграл движения $10F^{(3)}_{3\mu} - 7\gamma^2 F^{(1)}_{3\mu} = \mathrm{const}$, а первые два - один семикратно вырожденный уровень с энергией

$$E_3 = \frac{4}{\sqrt{5}}\gamma \approx 116 A^{-1/3} \text{ МэВ}. \qquad /35/$$

По смыслу переменных, входящих в /34/, это магнитный октупольный резонанс. Кулоновские и поверхностные силы, как видно из /35/, не влияют на его положение, которое полностью определяется квадрупольной и октупольной ДПФ. Если пренебречь октупольной ДПФ, уровень опускается к $\tilde{E}_3 = \frac{3}{\sqrt{5}}\gamma \approx 87\ A^{-1/3}$ МэВ. Экспериментальных данных пока нет.

3.3. Квадрупольные возбуждения 2^+

Тензоры мультипольности $\lambda = 2$ описываются следующей системой уравнений:

$$\ddot{B}^{(1)}_{2\mu} + \frac{7}{2}\gamma^2\left(\frac{9}{5}B^{(3)}_{2\mu} - B^{(1)}_{2\mu}\right) + \alpha B^{(1)}_{2\mu} = 0,$$

$$\dot{B}^{(2)}_{2\mu} + \frac{7}{20}\gamma^2\left(9\dot{B}^{(3)}_{2\mu} - 5\dot{B}^{(1)}_{2\mu}\right) = 0,$$

$$\ddot{B}^{(3)}_{2\mu} + \left(\frac{5}{7}\alpha - \gamma^2\right)B^{(1)}_{2\mu} + \frac{9}{5}B^{(3)}_{2\mu} + \frac{2}{7}\left(2B^{(4)}_{2\mu} - 3B^{(5)}_{2\mu} - 5B^{(6)}_{2\mu}\right) = 0,$$

$$\dot{B}^{(4)}_{2\mu} - \frac{3}{10}\gamma^2\dot{B}^{(1)}_{2\mu} - B^{(7)}_{2\mu} = 0, \qquad /36/$$

$$\dot{B}^{(5)}_{2\mu} - \dot{B}^{(4)}_{2\mu} - \dot{B}^{(6)}_{2\mu} = 0,$$

$$\dot{B}^{(6)}_{2\mu} + \frac{3}{20}\gamma^2\left(21\dot{B}^{(3)}_{2\mu} - 13\dot{B}^{(1)}_{2\mu}\right) - 2B^{(8)}_{2\mu} = 0,$$

$$\dot{B}^{(7)}_{2\mu} + \frac{7}{8}\gamma^2\left\{\gamma^2\left[\left(5 + \frac{5}{7}\chi\right)B^{(1)}_{2\mu} - (9+\chi)B^{(3)}_{2\mu}\right] - \frac{4}{5}\left(B^{(4)}_{2\mu} + 6B^{(6)}_{2\mu}\right)\right\} - 2B^{(9)}_{2\mu} = 0,$$

$$\dot{B}^{(8)}_{2\mu} - \frac{7}{400}\gamma^2\left\{\gamma^2\left[\left(55 - \frac{31\cdot 5}{7}\chi\right)B^{(1)}_{2\mu} - (99 - 25\chi)B^{(3)}_{2\mu}\right] - 100B^{(6)}_{2\mu}\right\} - B^{(9)}_{2\mu} = 0,$$

$$2\dot{B}^{(9)}_{2\mu} - \frac{\gamma^4}{200}\left[100\dot{B}^{(1)}_{2\mu} + 7\cdot 17\left(5\dot{B}^{(1)}_{2\mu} - 9\dot{B}^{(3)}_{2\mu}\right)\right] + \gamma^2\dot{B}^{(5)}_{2\mu} = 0.$$

Здесь $\chi = 20\pi T\hbar^2/Am^3R^4\gamma^4$, $a = (1 - X)\,32\pi T/3mA$, $B^{(1)}_{2\mu}$ - вариация квадрупольного момента ядра $Q_{2\mu} = (eZ/A)\int n(\vec{r})\,r^2 Y_{2\mu}(\theta,\phi)\,d\vec{r}$. Определения всех переменных $B^{(l)}_{2\mu}$ в терминах тензоров $V_{i,j}$, $V_{i,jk\ell}$, $\delta\Pi_{ij}$, $\delta\Pi^{k\ell}_{ij}$, $\delta\Pi^{\ell}_{ijk}$, $\delta\Pi_{ijk\ell}$ приведены в приложении II. "Квантовая поправка" содержится в величине $\chi \approx 0{,}032\ A^{-1}$. Как видно, она исчезающе мала. При выводе этих уравнений были использованы соотношения /30/. Второе, пятое и девятое уравнения дают интегралы движения $B^{(2)}_{2\mu} + \frac{7}{20}\gamma^2(9B^{(3)}_{2\mu} - 5B^{(1)}_{2\mu}) = \mathrm{const}$,

$B^{(4)}_{2\mu} - B^{(5)}_{2\mu} + B^{(6)}_{2\mu} = \mathrm{const}$, $2B^{(9)}_{2\mu} - \gamma^4[\frac{1}{2}B^{(1)}_{2\mu} + \frac{7\cdot 17}{200}(5B^{(1)}_{2\mu} - 9B^{(3)}_{2\mu})] + \gamma^2 B^{(5)}_{2\mu} = \mathrm{const}$. Из остальных получается характеристическое уравнение

$$x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0, \qquad /37/$$

где $x = \omega^2/\gamma^2$,

$$c_0 = \frac{7\cdot 9}{100}(3 + 6{,}9\,a/\gamma^2),$$

$$c_1 = -17{,}123 - 16{,}07\,a/\gamma^2,$$

$$c_2 = 24{,}29 + 9{,}3\,a/\gamma^2,$$

$$c_3 = -10{,}3 - a/\gamma^2.$$

Его решение дает четыре пятикратно вырожденных уровня энергии. Их зависимость от A показана на рис.2. Если пренебречь поверхностными и кулоновскими силами, энергии изменяются незначительно и могут быть приближенно записаны как $E^{(1)}_2 \approx 23{,}7\ A^{-1/3}$ МэВ, $E^{(2)}_2 \approx 65{,}9\ A^{-1/3}$ МэВ, $E^{(3)}_2 \approx 87{,}3\ A^{-1/3}$ МэВ, $E^{(4)}_2 \approx 174{,}7\ A^{-1/3}$ МэВ. Уровень

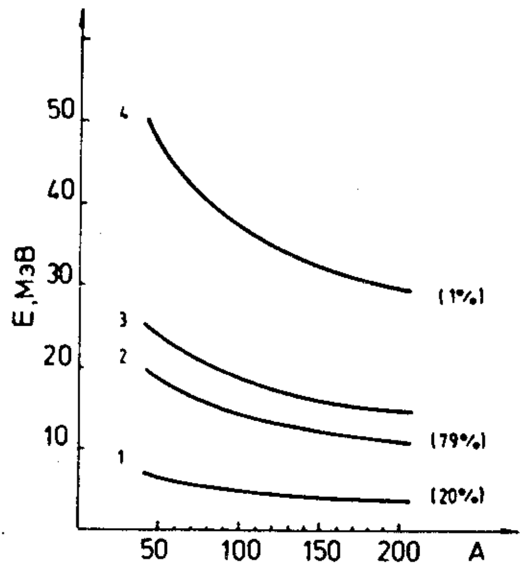

Рис.2. Квадрупольные возбуждения. В скобках указан процент исчерпывания изоскалярного правила сумм.

$E_2^{(2)}$ есть не что иное, как гигантский квадрупольный резонанс /ГКР/. Напомним, что в работах /1,2/ он рассчитывался с помощью системы уравнений только для тензоров второго ранга, и тогда получалось $64{,}7\ A^{-1/3}$МэВ. Как видно, расширение схемы расчета до тензоров четвертого ранга практически не повлияло на энергию ГКР, что говорит об устойчивости метода.

Влияние ДПФ высших мультипольностей нетрудно оценить, опустив переменные $B_{2\mu}^{(7)}$, $B_{2\mu}^{(8)}$ и $B_{2\mu}^{(9)}$ /и три последних уравнения системы /36//. В результате остаются только два уровня: $\tilde{E}_2^{(2)} \approx$ $\approx 54{,}3\ A^{-1/3}$ и $\tilde{E}_2^{(4)} \approx 141{,}7\ A^{-1/3}$. Таким образом, пренебрежение ДПФ с $\lambda > 2$ приводит не только к заметным численным ошибкам при расчете энергий возбуждений, но и /что более важно/ просто к потере некоторых мод! Следовательно, нельзя ими пренебречь!

3.4. Дипольные возбуждения 1^+

Из переменных, фигурирующих в системе уравнений /24/-/29/, можно построить четыре вектора:

$$I_i^{(1)} = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \dot{V}_{k,j}\,, \qquad I_i^{(2)} = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \sum_{s=1}^{3} \dot{V}_{k,jss}\,,$$

$$I_i^{(3)} = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \sum_{s=1}^{3} \delta\Pi_{ks}^{js}, \quad I_i^{(4)} = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \sum_{s=1}^{3} \delta\Pi_{kss}^{j}, \qquad /38/$$

где ϵ_{ijk} - символ Леви - Чивита. Первый вектор суть вариация углового момента ядра. Она, очевидно, сохраняется. Для остальных векторов справедлива следующая система уравнений:

$$\dot{I}_i^{(2)} - 2I_i^{(3)} = 0,$$

$$\dot{I}_i^{(3)} + \frac{63}{20}\gamma^2 I_i^{(2)} - I_i^{(4)} = 0, \qquad /39/$$

$$\dot{I}_i^{(4)} - \frac{21}{20}\gamma^2 \dot{I}_i^{(2)} = 0.$$

Последнее уравнение дает еще один интеграл движения $I_i^{(4)} -$ $- \frac{21}{20}\gamma^2 I_i^{(2)} = \mathrm{const}$, а первые два дают один трехкратно вырожденный уровень с энергией $E_1 = 132{,}6\ A^{-1/3}$ МэВ. Пренебрежение октупольной ДПФ поднимает его до $\tilde{E}_1 = 162{,}4\ A^{-1/3}$, т.е. меняет результат почти на 25%, что еще раз подчеркивает необходимость учета ДПФ высших мультипольностей. О физическом смысле этого возбуждения - в следующей работе.

4. ВЕРОЯТНОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ 2^+- и 4^+-СОСТОЯНИЙ

Для расчета приведенных вероятностей переходов используем теорию линейного отклика системы на возмущение внешним полем

$$\hat{O}(t) = \hat{O}e^{-i\omega t} + \hat{O}^{\dagger} e^{i\omega t}. \qquad /40/$$

Матричные элементы оператора $\hat{O}$ согласно Лейну[24] удовлетворяют соотношению

$$|<\psi_a|\hat{O}|\psi_0>|^2 = \lim_{\omega\to\omega_a} \hbar(\omega-\omega_a)\, \overline{<\psi_0'|\hat{O}e^{-i\omega t}|\psi_0'>}, \qquad /41/$$

где ψ_0 и ψ_a - невозмущенные волновые функции основного и возбужденного стационарных состояний; $\omega_a = (E_a - E_0)/\hbar$ - собственные частоты; черта означает усреднение по интервалу времени большему, чем $1/\omega$, ω - частота внешнего поля.

4.1. 4^+-состояния

Подробности приспособления формулы /41/ к методу моментов были изложены в[3], поэтому здесь промежуточные выкладки не приводятся.

Возмущение ядра внешним полем

$$\hat{O} \equiv q_{4\mu} = \frac{eZ}{A} r^4 Y_{4\mu}$$

делает неоднородным первое уравнение системы /32/:

$$\ddot{\Gamma}^{(1)}_{4\mu} + \beta\Gamma^{(1)}_{4\mu} - 2\Gamma^{(2)}_{4\mu} = -3\frac{e^2Z^2R^6}{\pi mA}(e^{i\omega t} + \delta_{\mu 0}e^{-i\omega t}).$$

Для матричного элемента имеем

$$<\psi_0'|q_{4\mu}|\psi_0'> = \Gamma^{(1)}_{4\mu}.$$

Решая неоднородную систему /32/ относительно $\Gamma^{(1)}_{4\mu}$, находим с помощью /41/

$$B(E4, 4^+_i \to gr) \equiv |<\psi_{4^+}|\hat{O}|\psi_0>|^2 = \frac{3}{2}\,\frac{\hbar e^2Z^2R^6}{\pi mA}\,\frac{(\omega_i^2 - \frac{31}{5}\gamma^2)}{\omega_i(\omega_i^2-\omega_j^2)}, \quad i\neq j.$$

Отсюда получается

$$B(E4,\ 4_2^+ \to gr) = 20{,}5\ \frac{Z^2}{A^{4/3}}\ B_W\ (= 111{,}7\ B_W \text{ для } {}^{208}Pb)\ ,$$

$$B(E4,\ 4_1^+ \to gr) = 57{,}3\ \frac{Z^2}{A^{4/3}}\ B_W\ \ (= 320{,}2\ B_W \text{ для } {}^{208}Pb).$$

Оба уровня дают примерно одинаковый вклад в энергетически взвешенное правило сумм и полностью его исчерпывают.

4.2. 2^+-состояния

Возмущение ядра внешним полем

$$\hat{O} \equiv q_{2\mu} = \frac{eZ}{A} r^2 Y_{2\mu}$$

делает неоднородными первое и третье уравнения системы /36/:

$$-\ddot{B}^{(1)}_{2\mu} + \left(\frac{7}{2}\gamma^2 - \alpha\right) B^{(1)}_{2\mu} - \frac{63}{10}\gamma^2 B^{(3)}_{2\mu} = \frac{3}{2}\kappa\left(e^{i\omega t} + \delta_{\mu 0} e^{-i\omega t}\right),$$

$$-\ddot{B}^{(3)}_{2\mu} + \left(\gamma^2 - \frac{5}{7}\alpha\right) B^{(1)}_{2\mu} - \frac{9}{5}\gamma^2 B^{(3)}_{2\mu} + \frac{2}{7}\left(5B^{(6)}_{2\mu} + 3B^{(5)}_{2\mu} - 2B^{(4)}_{2\mu}\right) =$$

$$= \frac{15}{14}\kappa\left(e^{i\omega t} + \delta_{\mu 0}\, e^{-i\omega t}\right).$$

Здесь $\kappa = e^2 Z^2 R^2/\pi mA$. Матричный элемент $\langle \psi_0' | q_{2\mu} | \psi_0' \rangle = B^{(1)}_{2\mu}$, а для приведенной вероятности перехода имеем

$$B(E2,\ 2_i^+ \to gr) = \frac{3}{4}\ \frac{\hbar\kappa}{\omega_i}\ \frac{\omega_i^3 - \frac{93}{10}\gamma\omega_i^2 + \frac{37}{2}\gamma^2\omega_i - \frac{123}{25}\gamma^3}{\prod\limits_{j \neq i}(\omega_i - \omega_j)}.$$

Отсюда получается

$$B(E2,\ 2_1^+ \to gr) = 10{,}2\ \frac{Z^2}{A^{4/3}}\ B_W\ \ \ (= 55{,}9\ B_W \text{ для } {}^{208}Pb)\ ,$$

$$B(E2, 2_2^+ \to gr) = 14{,}7 \frac{Z^2}{A^{4/3}} B_W \quad (= 80{,}2\ B_W \text{ для } {}^{208}Pb).$$

Нижний уровень $E_2^{(1)}$ исчерпывает 20% энергетически взвешенного правила сумм, а ГКР $(E_2^{(2)})$ - 79%, оставляя на долю двух более высоких 2^+-возбуждений всего 1% правила сумм. Отсюда можно сделать вывод, что низколежащее 2^+-возбуждение является центроидом всех 2^+-состояний ядра, лежащих ниже ГКР. Как видно на рис.3, экспериментальные данные /25-31/ по низколежащим 2^+-состояниям в сферических ядрах не противоречат такой интерпретации, хотя о хорошем согласии теории с экспериментом говорить не приходится /исключение составляет ^{208}Pb /. Ситуация может еще улучшиться при учете размытости края ядра, сжимаемости, спин-изоспиновых степеней свободы, а также при расширении схемы расчета до тензоров шестого ранга и выше. Пока же отметим, что для нашего метода принципиально важен сам факт появления низколежащего 2^+-состояния, которое воспроизводится в микро-

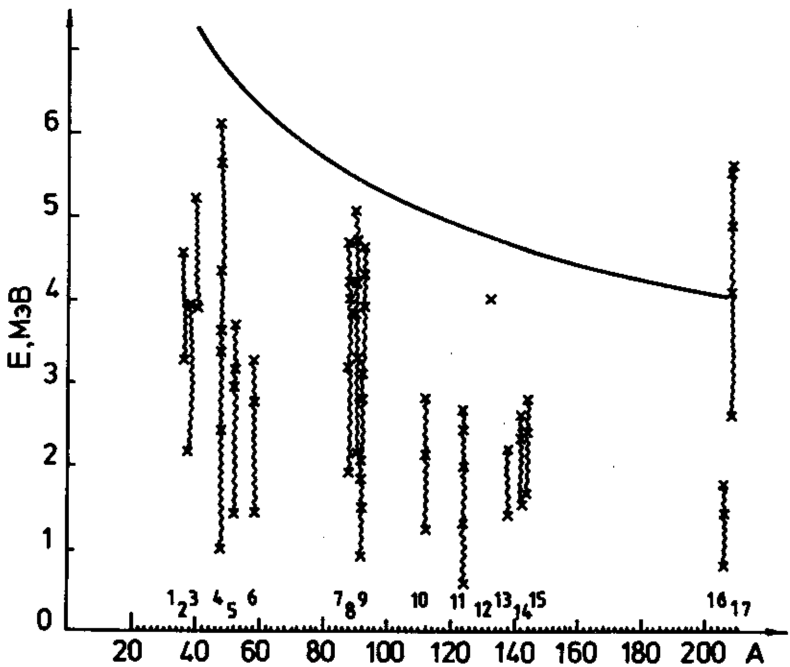

Рис.3. Нижняя ветвь квадрупольных возбуждений. Крестиками отмечены экспериментальные 2^+-уровни различных ядер из работ /25-31/ : 1 - ^{36}S, 2 - ^{38}Ar, 3 - ^{40}Ca, 4 - ^{48}Ti, 5 - ^{52}Cr, 6 - ^{58}Ni, 7 - ^{88}Sr, 8 - ^{90}Zr, 9 - ^{92}Zr и ^{92}Mo, 10 - ^{112}Sn, 11 - ^{124}Te, 12 - ^{132}Cs, 13 - ^{138}Ba, 14 - ^{142}Nd, 15 - ^{144}Sm, 16 - ^{206}Pb, 17 - ^{208}Pb.

скопических расчетах [7-9] и не получается в методе фазового пространства [4-6].

Природу по крайней мере одного из двух высоколежащих 2^+-возбуждений можно, по-видимому, связать с динамикой тороидного квадрупольного момента [32]

$$T_{ij} = \frac{1}{28} \int n(\vec{r}) [2(\vec{r}\cdot\vec{u}) (r^2\delta_{ij} + 2x_i x_j) - 5r^2(x_i u_j + x_j u_i)] d\vec{r}, \qquad /42/$$

поскольку его вариация является линейной комбинацией переменных, представленных в системе /36/:

$$\delta T_{ij} = \frac{eZR^2}{28mcA} \{ 2\dot{V}_{ij} - \frac{7}{R^2} \sum_{s=1}^{3} [\dot{V}_{i,jss}]_{ij} \}.$$

В пользу этого предположения говорит упрощенный RPA-расчет [33], который предсказывает 2^+-уровень вихревой природы при энергии ~93 $A^{-1/3}$ МэВ, что очень близко к нашему результату для $E_2^{(3)}$. Там же предсказывается и низколежащий "тороидный" 2^+-уровень, поэтому не исключено, что наш уровень при 23,7 $A^{-1/3}$ МэВ имеет заметную примесь вихревой компоненты.

Для окончательного вывода о природе высоколежащих 2^+-возбуждений следует вычислить квадрат матричного элемента $|\langle 0 | T_{ij} | 2^+ \rangle|^2$, что будет сделано в следующей работе. Там же будет вычислена вероятность возбуждения и другой токовой моды - октупольного магнитного резонанса.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем кратко итоги. Метод моментов впервые применен для описания коллективных возбуждений с $\lambda \leq 4$. Получено неплохое согласие с экспериментальными данными по энергиям ГГР. Предсказано положение октупольного магнитного резонанса, а также 1^+-состояния сложной структуры.

На примере 2^+-возбуждений продемонстрирована устойчивость метода к расширению схемы расчета. А именно, показано, что энергия ГКР, рассчитанная в схеме с тензорами второго и четвертого ранга, практически совпадает с рассчитанной ранее [1,2] в схеме с тензорами только второго ранга. Расширение схемы до тензоров четвертого ранга при расчете ГКР эквивалентно выходу за рамки длинноволнового приближения, а также учету октупольной и гексадекапольной деформации поверхности Ферми. Соответственно возрастает число принимаемых во внимание степеней свободы, что ведет к появлению новых 2^+-уровней. Особенно интересен факт появления низколежащего 2^+-уровня - он позволяет надеяться все более подробно описывать низколежащую часть спектра по мере дальнейшего увеличения числа степеней свободы /по мере изучения динамики тензоров все более высокого ранга/. Тем самым подчеркивается также необходимость учета ДПФ высших мультипольностей.

Показано, что "квантовая поправка" входит только в уравнения для 2^+-возбуждений, но численно практически не сказывается на энергиях.

Чтобы не увеличивать чрезмерно размеры этой работы, освещение некоторых вопросов /это видно было по ходу изложения/ отложено до следующей публикации. К ним относятся детальное исследование природы всех возбуждений с демонстрацией распределения токов; расчет вероятностей возбуждения 1^+- и 3^+-уровней; систематизация экспериментальных данных по B(E)-факторам всех известных 2^+-уровней ниже ГКР, анализ вклада квадрупольного тороидного движения в 2^+-возбуждения.

Большой интерес, конечно, представляют моды сжатия, для изучения которых требуется провести расчеты с каким-нибудь реалистическим взаимодействием. Но это уже задача более отдаленного будущего.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Тензоры кулоновских сил:

$$C_{ij} = \frac{eZ}{A}\int n(\vec{r})\, x_j \frac{\partial \mathcal{C}(\vec{r})}{\partial x_i}\, d\vec{r} = \left(\frac{eZ}{A}\right)^2 \iint n(\vec{r})\, n(\vec{r}')\, \frac{(x_i - x_i')\,(x_j - x_j')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, d\vec{r}\, d\vec{r}',$$

$$C_{i,jk\ell} = \frac{1}{3}\{2[C_{ij,k\ell}]_{jk\ell} + C_{ik;j,\ell} + C_{i\ell;j,k} + C_{ij;k,\ell}\},$$

$$2C_{ij,k\ell} = \left(\frac{eZ}{A}\right)^2 \iint n(\vec{r})\, n(\vec{r}')\, x_k x_\ell\, \frac{(x_i - x_i')\,(x_j - x_j')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, d\vec{r}\, d\vec{r}',$$

$$2C_{ij;k,\ell} = \left(\frac{eZ}{A}\right)^2 \iint n(\vec{r})\, n(\vec{r}')\, x_k x_\ell'\, \frac{(x_i - x_i')\,(x_j - x_j')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, d\vec{r}\, d\vec{r}'.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Вариация электрического гексадекапольного момента получается с помощью формулы /14/. Например,

$$\Gamma_{44}^{(1)} \equiv \delta Q_{44} = \frac{eZ}{A} \int (\delta n)\, r^4 Y_{44}(\theta, \phi) d\vec{r} = \frac{eZ}{A} \int n \sum_{s=1}^{3} \xi_s \frac{\partial}{\partial x_s} (r^4 Y_{44})\, d\vec{r} =$$

$$= \frac{Ze}{mA} \frac{3}{16} \sqrt{\frac{35}{2\pi}} \,[\, V_{1111} + V_{2222} - 6V_{1122} + 4i(V_{1112} - V_{1222})\,].$$

Здесь $V_{ijk\ell} = [\, V_{i,jk\ell}\,]_{ijk\ell}$. Неприводимые тензоры $\Gamma_{4\mu}^{(2)}$, $\Gamma_{4\mu}^{(3)}$ и $\Gamma_{4\mu}^{(4)}$ получаются из $\Gamma_{4\mu}^{(1)}$ заменой переменных $V_{ijk\ell}$ на переменные $[\delta\Pi_{ij}^{k\ell}]_{ijk\ell}$, $[\delta\Pi_{ijk}^{\ell}]_{ijk\ell}$ и $\delta\Pi_{ijk\ell}$ соответственно.

Вариация магнитного октупольного момента ядра вычисляется аналогично $\delta Q_{4\mu}$. Например:

$$F_{33}^{(1)} \equiv \delta\mathfrak{M}_{33} = \frac{eZ}{4Ac} \int (\delta n)\, \vec{\nabla}(r^3 Y_{3\mu}) \cdot [\,\vec{r} \times \vec{u}\,]\, d\vec{r} =$$

$$= -\frac{3eZ}{32Amc} \sqrt{\frac{35}{\pi}} \,[\, 3\dot{V}_{3,112} - \dot{V}_{3,222} - \dot{V}_{2,113} + \dot{V}_{2,223} - 2\dot{V}_{1,123} +$$

$$+ i(3\dot{V}_{3,122} - \dot{V}_{3,111} - 2\dot{V}_{2,123} + \dot{V}_{1,113} - \dot{V}_{1,223})\,].$$

Неприводимые тензоры $F_{3\mu}^{(2)}$ и $F_{3\mu}^{(3)}$ получаются из $F_{3\mu}^{(1)}$ заменой переменных $V_{i,jk\ell}$ на переменные $\delta\Pi_{ij}^{k\ell}$ и $\delta\Pi_{ijk}^{\ell}$ соответственно.

Вариация электрического квадрупольного момента ядра вычисляется аналогично $\delta Q_{4\mu}$. Например,

$$B_{22}^{(1)} \equiv \delta Q_{22} = \frac{Ze}{4Am} \sqrt{\frac{15}{2\pi}}\, (V_{11} - V_{22} + 2iV_{12}).$$

Неприводимые тензоры $B_{2\mu}^{(2)}$, $B_{2\mu}^{(3)}$, $B_{2\mu}^{(4)}$, $B_{2\mu}^{(5)}$, $B_{2\mu}^{(6)}$, $B_{2\mu}^{(7)}$, $B_{2\mu}^{(8)}$ и $B_{2\mu}^{(9)}$ получаются из $B_{2\mu}^{(1)}$ заменой переменных V_{ij} на переменные $\delta\Pi_{ij}$, $\frac{1}{R^2}\sum_{s=1}^{3} [\, V_{i,jss}\,]_{ij}$, $\frac{1}{R^2}\sum_{s=1}^{3} \delta\Pi_{ss}^{ij}$, $\frac{1}{R^2}\sum_{s=1}^{3} [\,\delta\Pi_{is}^{js}]_{ij}$,

$\frac{1}{R^2}\sum_{s=1}^{3} \delta\Pi_{ij}^{ss}$, $\frac{1}{R^2}\sum_{s=1}^{3} [\,\delta\Pi_{ssi}^{j}\,]_{ij}$, $\frac{1}{R^2}\sum_{s=1}^{3} \delta\Pi_{ijs,s}$ и $\frac{1}{R^2}\sum_{s=1}^{3} \delta\Pi_{ijss}$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бальбуцев Е.Б., Вайшвила З., Михайлов И.Н. - ЯФ, 1982, т.35, с.836; т.36, с.1109.
2. Balbutsev E.B., Mikhailov I.N., Vaishvila Z. - Nucl.Phys., 1986, v.A457, p.222.
3. Balbutsev E.B., Mikhailov I.N. - J.Phys. G.: Nucl.Phys., 1988, v.14, p.545.
4. Da Providencia J.P., Holzwarth G. - Nucl.Phys, 1985, v.A439, p.477.
5. Kohl H., Schuck P., Stringari S. - Nucl.Phys., 1986, v.A459, p.265.
6. Коломиец В.М. - Изв. АН СССР, сер. физ., 1987, т.51, с.2006.
7. Liu K.F., Brown G.E. - Nucl. Phys., 1976, v.A265, p.385.
8. De Haro R., Krewald S., Speth S. - Nucl.Phys., 1982, A388, p.265.
9. Khodel V.A., Saperstein E.E. - Phys.Rep., 1982, v.92, p.185.
10. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973.
11. Бальбуцев Е.Б., Пиперова Й. - Препринт ОИЯИ Е4-88-886, Дубна, 1988.
12. Tassie L.J. - Austr. J. Phys., 1956, v.9, p.408.
13. Rosenkilde C.E. -J.Math.Phys., 1967, v.8, pp.84, 88, 98.
14. Chandrasekhar S. - Astr. J., 1968, v.152, p.293.
15. Balbutsev E.B., Mikhailov I.N., Di Toro M. - Europhys. Lett., 1988, v.6, p.317.
16. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. - Квантовая теория углового момента. Ленинград: Наука, 1975.
17. Савицкий Г.А. и др. - Вопр. ат.науки и техн. сер.общ. и яд. физ., 1986, вып.I(34), с.120.
18. Morsch H.-P. - J. de Phys., 1984, v.45, p.C4-185.
19. Bertrand F.E., Beene J.R., Sjoreen T.P. - J. de Phys., 1984, v.45, p.C4-99.
20. Buenerd M. - J. de Phys., 1984, v.45, p.C4-115.
21. Малов Л.А., Соловьев В.Г. - ЭЧАЯ, 1980, т.11, с.301.
22. Семенко С.Ф. - ЯФ, 1984, т.39, с.351.
23. Nix J.R., Sierk A.J. - Phys.Rev., 1980, v.C21, p.326.
24. Лейн А.М. - Теория ядра. М.: Атомиздат, 1967.
25. Sakai M., Rester A.C. - At.Data and Nucl. Data Tables, 1977, v.20, p.441.
26. Авотина М.П., Кондуров И.А., Сбитнева О.Н. - Таблицы ядерных моментов и параметров деформации атомных ядер. Л.: ЛИЯФ АН СССР, 1982.
27. Heisenberg J. et al. - Phys.Rev., 1984, v.C29, p.28.
28. Van der Bijl L.T. et al. - Nucl.Phys., 1983, v.A393, p.173.

29. Mariscotti M.A.J. et al. - Nucl.Phys., 1984, v.A407, p.98.
30. Scott A. et al. - Nucl.Phys., 1977, v.A285, p.222.
31. Oakley D.S., Smithson M.J. et al. - Phys.Rev., 1987, v.C35, p.1392.
32. Дубовик В.М., Чешков А.А. - ЭЧАЯ, 1974, т.5, № 3, с.792.
33. Семенко С.Ф. - ЯФ, 1981, т.34, с.639; Препринт ФИАН, Москва, 1986, № 76.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 февраля 1989 года.