ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 8895

В.Н.Ефимов, Г.Шульц

ОДНОМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И ВОЗМОЖНЫЙ ВАРИАНТ УЧЕТА ТРЕХЧАСТИЧНЫХ СИЛ

1975

P4 - 8895

В.Н.Ефимов, Г.Шульц*

ОДНОМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И ВОЗМОЖНЫЙ ВАРИАНТ УЧЕТА ТРЕХЧАСТИЧНЫХ СИЛ

Направлено в Nuclear Physics

* ЦИЯИ, Россендорф, ГДР.

§1. Введение

В решении вопроса о виде нуклон-нуклонных потенциалов находит широкое применение феноменологический подход, основанный на использовании экспериментальных данных по фазам упругого NN-рассеяния /до энергий ≈400 *МэВ*/ и данных по дейтону. Примером получаемых таким способом реалистических потенциалов служат потенциалы Рейда[1], содержащие наряду с хорошо обоснованным в мезонной теории OPEP-потенциалом ряд компонент, феноменологически описывающих взаимодействие на малых расстояниях с помощью введения или сильных отталкивательных потенциалов с малым радиусом действия, или твердого кора.

Одной из простых возможностей учета короткодействующих сил в феноменологических потенциалах является использование модели граничных условий /М.Г.У./ [2,3]. Согласно этой модели, область взаимодействия делится на внешнюю ($r > c$) и внутреннюю области ($r < c$). Во внешней области взаимодействие может описываться сравнительно простым потенциалом, а эффект короткодействующих сил, которые в принципе могут иметь весьма сложный характер, учитывается путем введения при $r = c$ граничного условия для логарифмической производной волновой функции. Радиус граничных условий c и значение логарифмической производной f при $r = c$ являются параметрами модели, которые должны определяться из экспериментальных данных. Заметим, что потенциал с твердым кором является частным случаем М.Г.У. при $f \to \infty$. Для интерпретации нуклон-нуклонного взаимодействия с успехом использовалась как простая М.Г.У. без внешнего потенциала[2,4-6], так и М.Г.У. с потенциалом во внешней области[7,8].

Введение феноменологических нуклон-нуклонных потенциалов связано с известной неоднозначностью, обусловленной тем, что с экспериментальными данными в принципе совместимо много потенциалов различной формы, содержащих достаточное число параметров. Дополнительным критерием отбора таких потенциалов может служить сопоставление экспериментальных и теоретических данных, касающихся системы трех нуклонов. Корректные уравнения для системы трех сильно взаимодействующих частиц были получены Фаддеевым [9]. Как известно, в случае парных взаимодействий ядра интегральных трехчастичных уравнений Фаддеева выражаются через двухчастичные внемассовые t -матрицы. Эти уравнения безмодельны на трехчастичном уровне, так как если известны двухчастичные t -матрицы, то они являются точными. Следовательно, возникает вопрос об определении внемассовой t -матрицы для потенциалов, учитывающих короткодействующие силы по М.Г.У., так как в этом случае ее нельзя найти из обычного уравнения Липпмана-Швингера. Одним из методов обхода этой трудности является введение псевдопотенциала во внутренней области $r < c$ [6,10].

В работах [11,12] развит метод построения внемассовой t-матрицы в М.Г.У., основанный на том, что заданное значение не зависящей от энергии логарифмической производной волновой функции на радиусе граничных условий может быть получено с помощью некоторого предельного перехода для локального потенциала специального вида, действующего во внутренней области:

$$V(r) = V_0\theta(c-r) - cV_1\,\delta(r-c), \qquad /1.1/$$

где

$$\theta(x) = 1,\ x > 0;\quad \theta(x) = 0,\ x < 0.$$

Для этого потенциала легко найти в аналитическом виде внемассовые волновые функции $\Psi_p(r,Z)$ *. Последующий предельный переход

* Далее для простоты мы будем рассматриваться только s -состояние, и индекс $\ell = 0$ будет всюду опускаться.

$$V_0 \to \infty,\ V_1 \to \infty,\ c(\sqrt{V_0} - cV_1) = f, \qquad /1.2/$$

где f - константа, показывает, что предельное выражение для волновой функции $\Psi_p(r,Z)$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\Psi_p(r,Z) = 0,\quad r \le c_-, \qquad /1.3/$$

$$c\left[\frac{d}{dr} r\Psi_p(r,Z)\right]_{r=c_+} = f\left[r\Psi_p(r,Z)\right]_{r=c_+}, \qquad /1.4/$$

где $c_\pm = c \pm \epsilon$, $\epsilon \to 0$, $Z = E \pm i\epsilon$, E - энергия. Условия /1.3/ и /1.4/, как показано в работах [13,14], могут служить исходным моментом для получения внемассовой t -матрицы в М.Г.У., причем дополнительно используются два следствия, вытекающие из уравнения Липпмана-Швингера для "нормальных" потенциалов:

1/ для потенциала $V(r)$ с конечным радиусом действия c внемассовая волновая функция $\Psi_p(r,Z)$ в области $r > c$ имеет вид:

$$\Psi_p(r,Z) = j_0(pr) + i\sqrt{Z}\,t(\sqrt{Z},p,Z)\,h_0^{(1)}(r\sqrt{Z}), \qquad /1.5/$$

где $j_0(x)$, $h_0^{(1)}(x)$, соответственно, сферические функции Бесселя и Ганкеля первого рода;

2/ внемассовая t -матрица связана с фурье-компонентой $\Psi_p(k,Z)$ волновой функции $\Psi_p(r,Z)$ соотношением:

$$t(k,p,Z) = (k^2 - Z)\left[\Psi_p(k,Z) - \frac{\pi}{2k^2}\delta(k-p)\right]. \qquad /1.6/$$

Выражения /1.5/ и /1.6/ не содержат в явном виде потенциала и считается, что они справедливы и в случае М.Г.У. Из соотношений /1.4/ и /1.5/ непосредственно определяется полумассовая t -матрица:

$$t(\sqrt{Z},p,Z) = \frac{c e^{-ic\sqrt{Z}}}{f - ic\sqrt{Z}}\left[\cos pc - f j_0(pc)\right], \qquad /1.7/$$

тогда как полностью внемассовая t -матрица находится из /1.6/ с использованием условия /1.3/. Предложенный в [13,14] метод является в некотором смысле "чистым" методом граничных условий, так как он основан только на условиях /1.3/ и /1.4/ для волновых функций и в соответствии со смыслом М.Г.У. не требует введения в явном виде каких-либо потенциалов во внутренней области. С этой точки зрения в /1.4/ в принципе можно считать параметр f зависящим от энергии E. Однако в этом случае, как легко убедиться, массовые волновые функции $(E = p^2)$, соответствующие физическим состояниям двух нуклонов при разных энергиях, при сохранении условия /1.3/, будут неортогональны. Тем не менее для энергий $E < -\epsilon_d$ / ϵ_d - энергия связи дейтона/ f вполне можно рассматривать как некоторую произвольную функцию от E, так как массовые волновые функции в этом случае не связаны с реальными состояниями двух нуклонов, а нарушение условия ортогональности для них не имеет особого физического смысла. Возможность введения зависимости f от E для нефизических энергий будет более детально обсуждена ниже в связи с трехчастичными уравнениями.

Использование внемассовых t -матриц, соответствующих М.Г.У., непосредственно в трехчастичных уравнениях Фаддеева приводит к определенным трудностям, обусловленных тем, что эти уравнения уже не имеют однозначных решений [15]. Последнее обстоятельство связано со специфическими свойствами двухчастичных t -матриц в М.Г.У., и в [15] показано, что на основании этих свойств уравнения Фаддеева могут быть модифицированы и приведены к уравнениям, имеющим однозначные решения. В частности, для М.Г.У. без внешнего потенциала эти уравнения представляют собой интегральные уравнения для функций от одной векторной переменной.

Ниже будет изложен метод решения уравнения Шредингера для системы трех частиц с парными взаимодействиями, описываемыми М.Г.У. Рассматриваемый метод основан на том, что трехчастичная волновая функция должна удовлетворять определенным граничным условиям, вытекающим из условий /1.3/ и /1.4/, которым подчиняются двухчастичные внемассовые волновые функции в М.Г.У. Ради простоты будет рассмотрен частный случай трехчастичной задачи - связанное состояние с нулевым полным моментом трех бесспиновых тождественных частиц, взаимодействующих только в относительных s -состояниях. Рассмотрение более общих случаев приведет только к алгебраическим усложнениям получаемых ниже уравнений . В §§2,3 будут сформулированы необходимые граничные условия для трехчастичной волновой функции и будет показано, что на основе этих условий в указанном выше простейшем случае трехчастичное уравнение Шредингера в М.Г.У. без внешнего потенциала точным образом сводится к одномерному интегральному уравнению. В §4 будут приведены результаты численного решения полученных уравнений и будет рассмотрен возможный способ приближенного учета трехчастичных эффектов, таких, например, как вклад трехчастичных сил. Заключительный §5 посвящен обсуждению полученных результатов.

§2. Модель граничных условий для системы трех частиц

Рассмотрим, как было указано во *Введении /§1/*, простейший вариант трехчастичной задачи с парными взаимодействиями - связанное состояние трех бесспиновых тождественных частиц. Такое ограничение не принципиально и в то же время позволяет наиболее простым способом изложить предлагаемый метод получения трехчастичных одномерных уравнений в случае, когда взаимодействия описываются М.Г.У. без внешнего потенциала. Для вывода необходимых в дальнейшем соотношений предположим сначала, что взаимодействия между частицами определяются потенциалами $\hat{V}(\vec{r})$, такими, что имеют место как двухчастичные уравнения Липпманна-Швингера, так и трехчастичные уравнения Фаддеева. Запись потенциалов в виде $\hat{V}(\vec{r})$ подразумевает зависимость взаимодействия от относительного орбитального момента пары частиц.

Введем, как обычно, в системе центра масс координаты Якоби:

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_2 - \vec{R}_3, \quad \vec{\rho}_1 = -\vec{R}_1 + \frac{1}{2}(\vec{R}_2 + \vec{R}_3), \qquad /2.1/$$

где $\vec{R}_i$ - радиус-вектор i-ой частицы. Наряду с координатами /2.1/ в дальнейшем будут использоваться также координаты $\vec{r}_2$, $\vec{\rho}_2$ и $\vec{r}_3$, $\vec{\rho}_3$, получающиеся из /2.1/ путем циклических перестановок индексов. Волновая функция системы трех тождественных бозонов $\Psi(\vec{r}_1,\vec{\rho}_1)$ симметрична относительно любых перестановок двух частиц:

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{\rho}_1) = \Psi(-\vec{r}_1,\vec{\rho}_1) = \Psi(\vec{r}_2,\vec{\rho}_2) = \Psi(\vec{r}_3,\vec{\rho}_3) \qquad /2.2/$$

и выражается через функцию канала $\psi(\vec{r},\vec{\rho})$ / в данном случае одну/:

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{\rho}_1) = \psi(\vec{r}_1,\vec{\rho}_1) + \psi(\vec{r}_2,\vec{\rho}_2) + \psi(\vec{r}_3,\vec{\rho}_3). \qquad /2.3/$$

В импульсном представлении функция канала $\psi(\vec{k},\vec{q})$ удовлетворяет интегральному уравнению Фаддеева:

$$\psi(\vec{k},\vec{q}) = [2\pi^2(k^2 + \frac{3}{4}q^2 - E)]^{-1} \int d\vec{q}\,'[t(\vec{k}, \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{q}\,', E - \frac{3}{4}q^2) \times$$

$$\times \psi(-\vec{q} - \frac{1}{2}\vec{q}\,', \vec{q}\,') + t(\vec{k}, -\frac{1}{2}\vec{q} - \vec{q}\,', E - \frac{3}{4}q^2)\psi(\vec{q} + \frac{1}{2}\vec{q}\,', \vec{q}\,')], \qquad /2.4/$$

где $E<0$ - полная энергия системы /энергия связи/, $t(\vec{k},\vec{p},Z)$ - двухчастичная внемассовая t-матрица, которая, как известно, следующим образом связана с фурье-компонентой $\Psi_{\vec{p}}(\vec{k},Z)$ двухчастичной внемассовой волновой функции:

$$t(\vec{k},\vec{p},Z) = \frac{1}{4\pi}(k^2 - Z)[\Psi_{\vec{p}}(\vec{k},Z) - (2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{p})]. \qquad /2.5/$$

Подстановка выражения /2.5/ в уравнение /2.4/ приводит к следующему соотношению:

$$\Psi(\vec{r},\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\,\Psi_{\vec{p}}(\vec{r}, E - \frac{3}{4}q^2) \times$$

$$\times [\psi(-\frac{1}{2}\vec{p} + \frac{3}{4}\vec{q}, -\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q}) + \psi(-\frac{1}{2}\vec{p} - \frac{3}{4}\vec{q}, \vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q})], \qquad /2.6/$$

которое связывает зависимость от $\vec{r}$ фурье-компоненты по переменной $\vec{\rho}$ $\Psi(\vec{r},\vec{q})$ трехчастичной волновой функции с зависимостью от $\vec{r}$ двухчастичной внемассовой функции $\Psi_{\vec{p}}(\vec{r}, E - \frac{3}{4}q^2)$.

Соотношение /2.6/ получено, как указывалось выше, для "нормальных" двухчастичных потенциалов $\hat{V}(\vec{r})$, однако оно не содержит в явном виде этих потенциалов. В М.Г.У. внемассовые двухчастичные волновые функции $\Psi_{\vec{p}}(\vec{r},Z)$, как показано в[13,14], однозначно определяются граничными условиями и асимптотическим видом для этих функций. В частности, s-компонента волновой функции вполне определяется выражениями /1.3/-/1.5/. Поэтому логично считать, что в случае, когда взаимодействия частиц описываются с помощью М.Г.У., соотношение /2.6/ может быть использовано при получении граничных условий для трехчастичной волновой функции $\Psi(\vec{r},\vec{q})$[16].

Для простоты далее будем считать, что частицы взаимодействуют только в s-состоянии и что полный орбитальный момент L системы трех частиц равен нулю: $L=0$. В этом случае трехчастичная волновая функция $\Psi(\vec{r},\vec{\rho})$ зависит только от r, ρ и угла между $\vec{r}$ и $\vec{\rho}$ и имеет вид:

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{\rho}_1) = \psi(r_1,\rho_1) + \psi(r_2,\rho_2) + \psi(r_3,\rho_3), \qquad /2.7/$$

причем результат воздействия $\hat{V}(\vec{r})$ на $\Psi(\vec{r},\vec{\rho})$ будет определяться соотношением

$$\hat{V}(\vec{r})\Psi(\vec{r},\vec{\rho}) = V(r)\frac{1}{4\pi}\int d\Omega_{\vec{r}}\Psi(\vec{r},\vec{\rho}) = V(r)\Psi_0(r,\rho), \qquad /2.8/$$

а функция канала $\psi(r,\rho)$ в /2.7/ связана с $V(r)\Psi_0(r,\rho)$ следующим образом:

$$\psi(r,\rho) = \int_0^\infty r'^2 dr' \int_0^\infty \rho'^2 d\rho'\, G_0(r,\rho;r',\rho';E)V(r')\Psi_0(r',\rho'), \qquad /2.9/$$

$$G_0(r,\rho;r',\rho';E) = -\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty k^2 dk \int_0^\infty q^2 dq \frac{j_0(kr)j_0(kr')j_0(q\rho)j_0(q\rho')}{k^2 + \frac{3}{4}q^2 - E}. \qquad /2.10/$$

Таким образом, из /2.7/ и /2.9/ следует, что как функция канала $\psi(r,\rho)$, так и полная функция $\Psi(\vec{r},\vec{\rho})$ будут однозначно определены, если будет определено произведение $V(r)\Psi_0(r,\rho)$. Это обстоятельство, как будет показано ниже, весьма существенно при получении одномерного трехчастичного уравнения в М.Г.У. без внешнего потенциала, так в М.Г.У. произведение $V(r)\Psi_0(r,\rho)$ имеет вполне определенный и однозначный смысл.

Уравнение для s-компоненты $\Psi_0(r,\rho)$ полной волновой функции $\Psi(\vec{r},\vec{\rho})$ непосредственно следует из трехчастичного уравнения Шредингера и с учетом симметрии /2.2/ и соотношения /2.8/ имеет вид:

$$\frac{1}{r_1\rho_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}+\frac{3}{4}\frac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}+E\right)r_1\rho_1\Psi_0(r_1,\rho_1)=V(r_1)\Psi_0(r_1,\rho_1)+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int d\Omega_{\vec{r}_1}\left[V(r_2)\Psi_0(r_2,\rho_2)+V(r_3)\Psi_0(r_3,\rho_3)\right]. \qquad /2.11/$$

Из /2.11/ следует, что фурье-компонента $\Psi_0(r,q)$ по переменной ρ от $\Psi_0(r,\rho)$ будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{1}{r_1}\left[\frac{d^2}{dr_1^2}+E_q-V(r_1)\right]r_1\Psi_0(r_1,q)=S(r_1,q), \qquad /2.12/$$

где

$$E_q=E-\frac{3}{4}q^2, \qquad /2.13/$$

$$S(r_1,q)=\frac{1}{4\pi}\int d\Omega_{\vec{r}_1}d\vec{\rho}_1 e^{-i\vec{q}\vec{\rho}_1}\left[V(r_2)\Psi_0(r_2,\rho_2)+V(r_3)\Psi_0(r_3,\rho_3)\right]. \qquad /2.14/$$

С помощью функции Грина $H(r,r',E)$ решение уравнения /2.12/ формально может быть записано в виде:

$$\Psi_0(r,q)=\int_0^\infty r'^2dr'H(r,r',E_q)S(r',q), \qquad /2.15/$$

где

$$H(r,r',E)=\begin{cases}-i\sqrt{E}\,\Psi_{\sqrt{E}}(r,E)\Phi(r',E), & r<r',\\ -i\sqrt{E}\,\Phi(r,E)\Psi_{\sqrt{E}}(r',E), & r>r',\end{cases} \qquad /2.16/$$

если считать, что известны два линейно-независимых решения однородного уравнения /2.12/ $\Psi_{\sqrt{E}}(r,E)$ и $\Phi(r,E)$ со следующей асимптотикой при $r\to\infty$:

$$\begin{aligned}&\Psi_{\sqrt{E}}(r,E)\sim j_0(r\sqrt{E})+i\sqrt{E}\,t(\sqrt{E},\sqrt{E},E)h_0^{(1)}(r\sqrt{E}),\\ &\Phi(r,E)\sim h_0^{(1)}(r\sqrt{E}),\end{aligned} \qquad /2.17/$$

где $t(\sqrt{E},\sqrt{E},E)$ - s - компонента двухчастичной t-матрицы на массовой поверхности. Для потенциалов $V(r)$ с конечным радиусом действия c ($V(r)=0$ при $r>c$) из выражений /2.15/-/2.17/ следует, что произведение $V(r)\Psi_0(r,q)$, необходимое для определения трехчастичной волновой функции, можно представить в виде, не содержащем явным образом потенциала $V(r)$:

$$V(r)\Psi_0(r,q)=g(r,E_q)Y(q)+$$

$$+\theta(c-r)\int_0^\infty\rho^2d\rho\, j_0(q\rho)D(r,\rho), \qquad /2.18/$$

где

$$\theta(x)=1,\ x>0;\quad \theta(x)=0,\ x<0,$$

$$Y(q)=i\sqrt{E_q}\int_c^\infty r^2dr\,h_0^{(1)}(r\sqrt{E_q})S(r,q), \qquad /2.19/$$

$$g(r,E)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty p^2dp\, j_0(pr)t(p,\sqrt{E},E). \qquad /2.20/$$

В модели граничных условий двухчастичная t -матрица в /2.2О/ имеет, с учетом условия симметрии $t(p,\sqrt{E},E) = t(\sqrt{E},p,E)$, вполне определенное значение /1.7/, поэтому будем считать, что соотношение /2.18/ имеет место и в случае, когда взаимодействие частиц описывается М.Г.У. Таким образом, задача нахождения трехчастичной волновой функции в М.Г.У. без внешнего потенциала свелась к определению одномерной функции $Y(q)$ и двухмерной функции $D(r,\rho)$. Уравнения для этих функций могут быть получены на основе соотношения /2.6/ и граничных условий /1.3/ и /1.4/ для s -компоненты внемассовой двухчастичной волновой функции[17], согласно которым для s-компоненты $\Psi_0(r,q)$ трехчастичной волновой функции будем иметь:

$$\Psi_0(r,q) = 0, \quad r \le c_-, \qquad /2.21/$$

$$c\left[\frac{d}{dr} r\Psi_0(r,q)\right]_{r=c_+} = f(E_q)[r\Psi(r,q)]_{r=c_+}, \qquad /2.22/$$

где явным образом указана возможная зависимость логарифмической производной f от энергии E_q /2.13/ для нефизических значений E_q. Условие /2.21/ можно записать в координатном представлении, и тогда из /2.11/ следует, что при $r_1 < c$ будет иметь место следующее уравнение:

$$V(r_1)\Psi_0(r_1,\rho_1) + \frac{1}{4\pi}\int d\Omega_{\vec{r}_1}[V(r_2)\Psi_0(r_2,\rho_2) + V(r_3)\Psi_0(r_3,\rho_3)] = 0. \qquad /2.23/$$

Заметим, что если в области $r_1 < c$ выполнено уравнение /2.23/, то это с необходимостью приводит к тому, что $\Psi_0(r_1,\rho_1) = 0$ в этой области, так как отличное от нуля решение однородного уравнения /2.11/, конечное при $\rho_1 \to 0$,несовместимо с граничным условием при $\rho_1 \to \infty$.

Первое уравнение для функций $D(r,\rho)$ и $Y(q)$ следует из /2.23/, если выразить $V(r)\Psi_0(r,\rho)$ с помощью /2.18/ и использовать явное выражение для $g(r,E)$, которое, согласно /2.2О/ и /1.7/, имеет следующий вид:

$$g(r,E) = -\frac{1}{r}\,\frac{e^{-ic\sqrt{E}}}{f(E) - ic\sqrt{E}}[f(E)\,\delta(r-c) + c\,\delta'(r-c)], \qquad /2.24/$$

что приводит к результату:

$$\theta(c-r_1)D(r_1,\rho_1) + \frac{1}{4\pi}\int d\Omega_{\vec{r}_1}\theta(c-r_1)[\theta(c-r_2)D(r_2,\rho_2) + \theta(c-r_3)D(r_3,\rho_3)] = -\theta(c-r_1)F(r_1,\rho_1), \qquad /2.25/$$

$$F(r_1,\rho_1) = \frac{1}{2\pi^2}\int d\Omega_{\vec{r}_1}\int_0^\infty q^2 dq[g(r_2,E_q)j_0(q\rho_2) + g(r_3,E_q)j_0(q\rho_3)]Y(q). \qquad /2.26/$$

При получении уравнения /2.25/ было использовано соотношение

$$\theta(c-r)g(r,E) = 0,$$

которое следует из того факта, что в М.Г.У., согласно /2.2О/, /1.7/ и /1.4/, в выражении /2.24/ для $g(r,E)$ с следует понимать как $c_+ = c+\epsilon$, $\epsilon \to 0$. Заметим, что при выводе уравнения /2.25/, а также и условия /2.22/, совершенно не возникает вопроса о конкретном рассмотрении потенциала $V(r)$ в области $r < c$, а используются только граничные условия /1.3/ и /1.4/ для внемассовых двухчастичных волновых функций.

Второе уравнение для $D(r,\rho)$ и $Y(q)$ получается из граничного условия /2.22/, если полную волновую функцию выразить через функцию канала согласно соотношению /2.7/. В соответствии с /2.18/ из выражений /2.9/ и /2.1О/ следует, что в импульсном представлении функция канала $\psi(k,q)$ имеет вид:

$$\psi(k,q)=-\frac{4\pi c}{k^2+\frac{3}{4}q^2-E}\,\frac{\cos kc-f(E_q)j_0(kc)}{f(E_q)-ic\sqrt{E_q}}\,e^{-ic\sqrt{E_q}}Y(q)-$$

/2.27/

$$-\frac{1}{4\pi(k^2+\frac{3}{4}q^2-E)}\int d\vec{r}\,d\vec{\rho}\,e^{i\vec{k}\vec{r}+i\vec{q}\vec{\rho}}\,\theta(c-r)D(r,\rho).$$

Окончательно легко показать, что условие /2.22/ приводит к следующему уравнению:

$$e^{-ic\sqrt{E_q}}Y(q)-\frac{c}{\pi^2}\int d\vec{q}'\,\frac{\cos p_1c-f(E_{q'})j_0(p_1c)}{q^2+q'^2+\vec{q}\vec{q}'-E}\times$$

/2.28/

$$\times\frac{[\cos p_2c-f(E_q)j_0(p_2c)]e^{-ic\sqrt{E_{q'}}}}{L(E_q)[f(E_q)-ic\sqrt{E_q}][f(E_{q'})-ic\sqrt{E_{q'}}]}Y(q')+$$

$$+\frac{1}{cL(E_q)[f(E_q)-ic\sqrt{E_q}]}\{c[\frac{d}{dr}r\Psi_0^{(1)}(r,q)]_{r=c_+}-$$

$$-f(E_q)[r\Psi_0^{(1)}(r,q)]_{r=c_+}\}=0,$$

где

$$\vec{p}_1=\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{q}',\ \vec{p}_2=\frac{1}{2}\vec{q}+\vec{q}',$$

$$L(E)=\frac{1}{2ic\sqrt{E}}\left[\frac{f(E)+ic\sqrt{E}}{f(E)-ic\sqrt{E}}-e^{2ic\sqrt{E}}\right],$$

$$\Psi_0^{(1)}(r,q)=-\frac{1}{(4\pi)^2}\int d\vec{r}_1\,d\vec{\rho}_1\,K_0(r,r_1,E_q)j_0(q\rho_1)\times$$

$$\times[\theta(c-r_1)D(r_1,\rho_1)+\theta(c-r_2)D(r_2,\rho_2)+\theta(c-r_3)D(r_3,\rho_3)],$$

$$K_0(r,r',E)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty k^2dk\,\frac{j_0(kr)j_0(kr')}{k^2-E}.$$

Альтернативное второе уравнение для $D(r,\rho)$ и $Y(q)$ можно получить из соотношения /2.19/, если, как и прежде, $V(r)\Psi_0(r,\rho)$ выразить с помощью /2.18/ и использовать выражение /2.14/ для $S(r,q)$. Это уравнение имеет вид:

$$e^{-ic\sqrt{E_q}}Y(q)-\frac{c}{\pi^2}\int d\vec{q}'\,\frac{\cos p_1c-f(E_{q'})j_0(p_1c)}{q^2+q'^2+\vec{q}\vec{q}'-E}\times$$

$$\times\frac{\cos p_2c-ic\sqrt{E_q}j_0(p_2c)}{f(E_{q'})-ic\sqrt{E_{q'}}}e^{-ic\sqrt{E_{q'}}}Y(q')-$$

/2.29/

$$-\frac{i\sqrt{E_q}}{(4\pi)^2}e^{-ic\sqrt{E_q}}\int d\vec{r}_1\,d\vec{\rho}_1\,\theta(r_1-c)h_0^{(1)}(r_1\sqrt{E_q})j_0(q\rho_1)\times$$

$$\times[\theta(c-r_2)D(r_2,\rho_2)+\theta(c-r_3)D(r_3,\rho_3)]-$$

§3. Одномерное уравнение

Уравнения /2.28/ и /2.29/ содержат неизвестную двухмерную функцию $D(r,\rho)$, которая в свою очередь удовлетворяет уравнению /2.25/. В работе /18/ * было показано, что в случае твердого кора для этого уравнения можно найти точное аналитическое решение. С помощью метода, предложенного в /18/, уравнение /2.25/ может быть решено аналитически и для более общего случая модели граничных условий /17/. Это обстоятельство совместно с выражение /2.26/ позволяет точным образом, без каких-либо приближений, привести двухмерные уравнения /2.18/ и /2.29/ к одномерным уравнениям для одной функции $Y(q)$, что является характерной особенностью трехчастичной задачи в случае двухчастичных взаимодействий, описываемых с помощью М.Г.У. /15,19/.

Правая часть уравнения /2.25/ согласно /2.24/ и /2.26/, имеет вид:

$$\theta(c-r_1)F(r_1,\rho_1) = -\frac{1}{r_1\rho_1}\theta(c-r_1)\chi(R) - \qquad /3.1/$$

$$-\frac{c}{r_1\rho_1}\theta(c-r_1)[\delta(\tfrac{1}{2}r_1+\rho_1-c)-\delta(|\tfrac{1}{2}r_1-\rho_1|-c)]\phi(R),$$

где

$$\chi(R) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty q^2 dq\, Y(q) b(E_q) F_0(q,R), \qquad /3.2/$$

$$\phi(R) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty q^2 dq\, Y(q) b(E_q) j_0(q\rho_0), \qquad /3.3/$$

$$b(E) = \frac{e^{-ic\sqrt{E}}}{f(E)-ic\sqrt{E}}, \qquad /3.4/$$

* Автор работы /18/ В.Ефимов /ИЯФ, Ленинград/ - однофамилец одного из авторов /В.Н.Е./ данной работы.

$$F_0(q,R) = f(E_q) j_0(q\rho_0) - \frac{3}{4}\frac{qc^2}{\rho_0} j_1(q\rho_0), \qquad /3.5/$$

$$R^2 = r_1^2 + \frac{4}{3}\rho_1^2, \quad \rho_0^2 = \frac{3}{4}(R^2-c^2),$$

причем функция $F_0(q,R)$ отлична от нуля только в области

$$|\tfrac{1}{2}r_1-\rho_1| < c < \tfrac{1}{2}r_1+\rho_1. \qquad /3.6/$$

В соответствии с /3.1/, решение уравнения /2.25/ будем искать в виде:

$$\theta(c-r)D(r,\rho) = \theta(c-r)\frac{1}{r\rho}A(r,\rho) + \qquad /3.7/$$

$$+\theta(c-r)\frac{c}{r\rho}[\delta(\tfrac{1}{2}r+\rho-c)-\delta(|\tfrac{1}{2}r-\rho|-c)]\phi(R),$$

где функция $A(r,\rho)$ в области $r<c$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$A(r,\rho)+2\int_{|\frac{1}{2}r-\rho|}^{\frac{1}{2}r+\rho}\frac{dr'}{\rho'}\theta(c-r')A(r',\rho') = \chi(R)-2c\phi(R)\,G(r,\rho), \qquad /3.8/$$

$$G(r,\rho) = \int_{|\frac{1}{2}r-\rho|}^{\frac{1}{2}r+\rho}\frac{dr'}{\rho'}\theta(c-r')[\delta(\tfrac{1}{2}r'+\rho'-c)-\delta(|\tfrac{1}{2}r'-\rho'|-c)], \qquad /3.9/$$

$$R^2 = r^2 + \frac{4}{3}\rho^2, \quad \rho'^2 = \frac{3}{4}(R^2-r'^2),$$

которое будет одномерным, если R рассматривать как фиксированный параметр.

Введем далее, как и в работе[18], новые переменные α и α':

$$r = R\sin\alpha\,, \quad \rho = \frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\alpha,$$

$$r' = R\sin\alpha', \quad \rho' = \frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\alpha', \qquad /3.10/$$

$$R^2 = r^2 + \frac{4}{3}\rho^2 = r'^2 + \frac{4}{3}\rho'^2.$$

В этих переменных уравнение /3.8/ и выражение /3.9/ приобретают вид:

$$A(R,\alpha) + \frac{4}{\sqrt{3}}\int\limits_{|\frac{\pi}{3}-\alpha|}^{\min(\frac{\pi}{3}+\alpha,\frac{2\pi}{3}-\alpha)} d\alpha'\,\theta(c - R\sin\alpha')A(R,\alpha') = \qquad /3.11/$$

$$= \chi(R) - 2c\,\phi(R)G(R,\alpha),$$

$$G(R,\alpha) = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_{|\frac{\pi}{3}-\alpha|}^{\min(\frac{\pi}{3}+\alpha,\frac{2\pi}{3}-\alpha)} d\alpha'\,\theta(c - R\sin\alpha')\{\,\delta[R\theta(\frac{\pi}{6}-\alpha')\times \qquad /3.12/$$

$$\times\sin(\alpha'+\frac{\pi}{3}) + R\theta(\alpha'-\frac{\pi}{6})\sin(\frac{2\pi}{3}-\alpha') - c\,] - \delta[R\sin|\frac{\pi}{3}-\alpha'| - c]\}.$$

В зависимости от значения параметра R в уравнении /3.11/ вся область $r<c$ делится, согласно /3.10/ и /3.6/, на ряд областей, изображенных на *рис. 1,* в которых как правая часть /3.12/, так и пределы интегрирования в /3.11/ имеют разные значения. Получающиеся уравнения отличаются от уравнений работы[18] только правыми

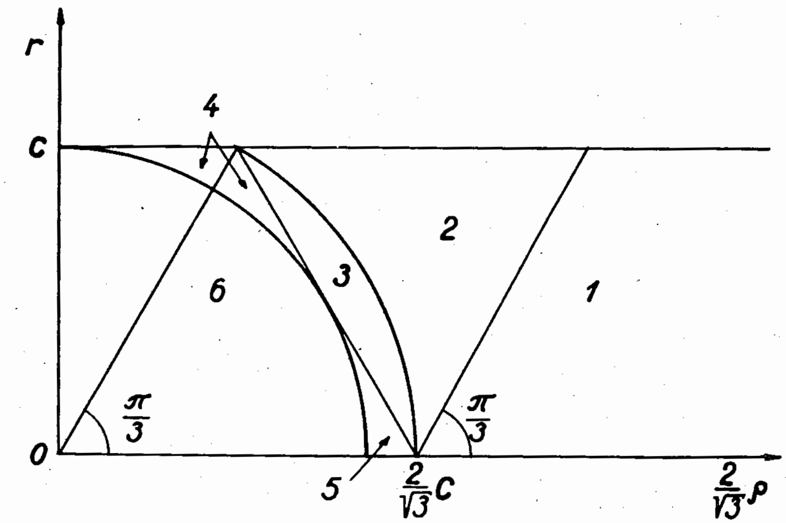

Рис. 1. Области определения функции $A(R,\alpha)$.

частями, и для их решения вполне можно использовать метод, предложенный в[18]. Этот метод заключается в последовательном двукратном дифференцировании исходных уравнений и в последующем использовании этих же уравнений для исключения функций $A(R,\alpha)$ и $A'(R,\alpha)$ от сдвинутых аргументов α.

Применение изложенной выше процедуры приводит к решению уравнения /3.11/, которое для различных областей 1-6, изображенных на *рис. 1,* имеет вид:

$$A_1(R,\alpha) = 0,$$

$$A_2(R,\alpha) = B(R)\sin(\gamma - \frac{\pi}{4}), \qquad /3.13/$$

$$A_3(R,\alpha) = C(R)\sin(\gamma - \frac{\pi}{4}),$$

$$A_4(R,\alpha) = A_5(R,\alpha) = D(R)\sin 4\alpha,$$

где

$$B(R) = -\frac{\chi(R)}{\sin(\gamma_0 + \frac{\pi}{4})},$$

$$C(R) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\frac{1}{Q(R)}[\chi(R)\sin 4\kappa_0 + \frac{4c}{R\cos\alpha_0}\phi(R)\cos 4\kappa_0],$$

$$D(R) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{Q(R)}[\chi(R)\sin\frac{4}{\sqrt{3}}\kappa_0 + \frac{4c}{\sqrt{3}\,R\cos\alpha_0}\phi(R)\cos\frac{4}{\sqrt{3}}\kappa_0],$$

$$Q(R) = \frac{\sin(4 + \frac{4}{\sqrt{3}})\kappa_0}{4 + \frac{4}{\sqrt{3}}} - \frac{\sin(4 - \frac{4}{\sqrt{3}})\kappa_0}{4 - \frac{4}{\sqrt{3}}},$$

$$\gamma = \frac{4}{\sqrt{3}}(\alpha - \frac{\pi}{6}), \quad \gamma_0 = \frac{4}{\sqrt{3}}(\alpha_0 - \frac{\pi}{6}),$$

$$\alpha_0 = \arcsin\frac{c}{R}, \quad \kappa_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha_0.$$

В области 6 решение $A_6(R,\alpha)$ уравнения /3.11/ будет иметь вид:

$$A_6(R,\alpha) = F(R)\sin 4\alpha, \qquad /3.14/$$

где $F(R)$ - произвольная функция R. Наличие такого произвола соответствует указанному в работах[/15,19/] факту, что в М.Г.У. трехчастичная волновая функция определяется неоднозначно. Для устранения этой неоднозначности в этих работах вводится дополнительное условие, содержащее существенно трехчастичный параметр, причем введение такого параметра оказывается необходимым также и для простейшей трехчастичной системы - системы трех тождественных бозонов[/19/]. Однако в этом случае из условия /2.2/ симметрии полной волновой функции следует, что в /3.14/ необходимо положить $F(R) \equiv 0$, как это показано в работе[/18/], если М.Г.У. считать предельным случаем потенциала /1.1/ при выполнении условий /1.2/. Таким образом, уравнения /2.28/ и /2.29/ совместно с соотношением /2.27/ однозначно определяют волновую функцию системы трех тождественных бозонов без введения какого-либо дополнительного условия или параметра. Аналогичные соображения применимы также и к системе трех нуклонов, для которой компоненты волновой функции в случае зарядовой инвариантности ядерных сил обладают определенной перестановочной симметрией. Заметим, что указанная выше неоднозначность решения /3.14/ в области 6 совершенно несущественна, если энергию связи вычислять с помощью альтернативного уравнения /2.29/. Подобная ситуация будет иметь место и при определении амплитуд переходов. Неоднозначность должна быть устранена только в том случае, если с помощью /2.7/ и /2.27/ отыскивается волновая функция.

Уравнения /2.28/ и /2.29/ с помощью /3.7/ и явных выражений /3.13/ для функции $A(R,\alpha)$ могут быть записаны в виде:

$$\psi(q) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty q'^2 dq'[T_1(q,q') + V_1(q,q')]\psi(q') = 0, \qquad /3.15/$$

$$\psi(q) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty q'^2 dq'[T_2(q,q') + V_2(q,q')]\psi(q') = 0, \qquad /3.16/$$

где

$$\psi(q) = e^{-ic\sqrt{E_q}}\,Y(q),$$

$$T_1(q,q') = \frac{c}{L(E_q)}\int_{-1}^{+1} dx\, \frac{[\cos p_1 c - f(E_{q'})j_0(p_1 c)][\cos p_2 c - f(E_q)j_0(p_2 c)]}{[f(E_q) - ic\sqrt{E_q}][f(E_{q'}) - ic\sqrt{E_{q'}}]} \times$$

$$\times (q^2 + q'^2 - qq'x - E)^{-1}, \qquad /3.17/$$

$$T_2(q,q') = \frac{c}{f(E_{q'})-ic\sqrt{E_{q'}}} \times$$

$$\times \int_{-1}^{+1} dx \frac{[\cos p_1 c - f(E_{q'}) j_0(p_1 c)][\cos p_2 c - ic\sqrt{E_q}\, j_0(p_2 c)]}{q^2 + q'^2 - qq'x - E},$$

$$p_1^2 = q^2 + \frac{1}{4} q'^2 - qq'x, \quad p_2^2 = \frac{1}{4} q^2 + q'^2 - qq'x. \qquad /3.18/$$

Явные выражения для $V_1(q,q')$ и $V_2(q,q')$ приведены в *Приложении*.

§4. Возможный способ учета трехчастичных сил. Результаты

В ядрах уравнений /3.15/ и /3.16/, определяемых выражениями /3.17/, /3.18/, и /П.5/, /П.11/, параметр f, входящий в граничное условие /1.4/, рассматривается как функция энергии. Как было указано выше, введение зависимости f от E в /1.4/ при сохранении условия /1.3/ приводит к неортогональности волновых функций, описывающих состояния двух нуклонов при различных энергиях. Однако для энергий $E<-\epsilon_d$ / ϵ_d - энергия связи дейтона/ f вполне можно считать зависящим от E, так как таким энергиям не будут соответствовать физические состояния двух нуклонов. Это обстоятельство формально учтено в условии /2.22/, что можно считать возможным способом учета роли трехчастичных эффектов, таких, как трехчастичные силы. Действительно, если в системе трех частиц существенную роль играют трехчастичные силы /см. по этому поводу, напр., работу [20]/, то как уравнение Шредингера /2.11/, так и уравнение Фаддеева /2.4/ должны быть видоизменены с учетом этих сил. В этом случае нельзя уже будет получить на

основе /1.3/ и /1.4/ граничных условий для трехчастичной волновой функции типа /2.21/ и /2.22/. Использование этих условий с f=const. и таким же, как и в /1.4/, соответствует полному пренебрежению ролью трехчастичных эффектов. Поэтому введение для $E<-\epsilon_d$ зависимости f от E, не затрагивающей ортогональности волновых функций реальных состояний двух нуклонов, можно рассматривать как приближенный способ учета трехчастичных эффектов на языке парных взаимодействий. Такой подход напоминает метод, используемый в теории конечных ферми-систем, когда для парных взаимодействий вводятся два типа констант - вакуумные константы и константы взаимодействия в среде [21]. Конкретно зависимость f от E при $E<-\epsilon_d$ бралась в виде:

$$f(E) = c_1 + c_2\left(-\frac{E}{\epsilon_d}\right)^{c_3}. \qquad /4.1/$$

Для $E \geq -\epsilon_d$ параметр f необходимо считать постоянным, а его значение вместе со значением c в /1.3/ и /1.4/ определять из экспериментальных данных для двух нуклонов. В частности, для триплетного состояния из значений энергии связи дейтона ϵ_d = 2,225 *МэВ* и длины рассеяния a_t = 5,42 *Ф* следует:

f = -0,253, c = 1,095 *Ф*.

Численное решение уравнений /3.15/ и /3.16/ связано с определенными математическими трудностями, обусловленными медленным затуханием ядер этих уравнений. Последнее обстоятельство не позволяет применить для их решения прямой способ трансформации бесконечного интервала интегрирования в конечный с последующим использованием гауссовских узлов. Нами были использованы два метода решения уравнений /3.15/ и /3.16/. Первый метод основан на разложении функций $j_0(q\rho_0)$ и $j_1(q\rho_0)$, входящих в ядра $V(q,q')$ /см. *Приложение*/ и в $F_0(q,R)$ /3.5/, в ряд по полной системе ортогональных функций $\phi_n^{(\ell)}(\rho_0)(\ell=0,1)$. Параметр ρ_0 меняется в пределах $0<\rho_0<a$, $a=3/2\,c$, и для получения необ-

ходимого разложения нужно ввести функции $\phi_n^{(\ell)}(\rho)$, , удовлетворяющие условию ортогональности и нормировки:

$$\int_0^a \rho^2 d\rho\, \phi_n^{(\ell)}(\rho)\phi_{n'}^{(\ell)}(\rho) = \delta_{nn'}, \quad /4.3/$$

Такие функции, образующие полные системы, всегда можно построить, если их выбирать в виде полиномов. Функции $\phi_n^{(0)}(\rho)$ и $\phi_n^{(1)}(\rho)$, удовлетворяющие условию /4.3/ и учитывающие четность и поведение при $\rho \to 0$ $j_0(q\rho)$ и $j_1(q\rho)$, простым образом связаны с полиномами Якоби и определяются следующим образом:

$$\phi_n^{(0)}(\rho) = \frac{(4n-1)^{1/2}}{2^{n-1}a^{3/2}} \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu}^{(0)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\nu-2}, \quad n=1,2,3,\ldots \quad /4.4/$$

$$\phi_n^{(1)}(\rho) = \frac{(4n+1)^{1/2}}{2^{n-1}a^{3/2}} \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu}^{(1)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\nu-1}, \quad n=1,2,3,\ldots \quad /4.5/$$

где

$$a_{n\nu}^{(0)} = (-1)^{n+\nu} \frac{(2n+2\nu-3)!!}{(2\nu-1)!!(\nu-1)!(n-\nu)!},$$

$$a_{n\nu}^{(1)} = (-1)^{n+\nu} \frac{(2n+2\nu-1)!!}{(2\nu+1)!!(\nu-1)!(n-\nu)!}.$$

Разложения $j_0(q\rho_0)$ и $j_1(q\rho_0)$ соответственно по функциям /4.4/ и /4.5/ имеют вид:

$$\begin{aligned} j_0(q\rho_0) &= \sum_n C_n^{(0)}(q)\,\phi_n^{(0)}(\rho_0), \\ j_1(q\rho_0) &= \sum_n C_n^{(1)}(q)\,\phi_n^{(1)}(\rho_0), \end{aligned} \quad /4.6/$$

где

$$C_n^{(0)}(q) = (-1)^{n+1} a^{3/2}(4n-1)^{1/2} \frac{1}{x} j_{2n-1}(x),$$

$$C_n^{(1)}(q) = (-1)^{n+1} a^{3/2}(4n+1)^{1/2} \frac{1}{x} j_{2n}(x), \quad x = qa.$$

Использование разложений /4.6/ с конечным числом N слагаемых в /3.5/, /П.6/ - /П.9/ и /П.12/ - /П.13,/ позволяет привести ядра $V_1(q,q')$ /П.5/ и $V_2(q,q')$ /П.11/ уравнений /3.15/ и /3.16/ к вырожденному виду /2N сепарабельных слагаемых/. Для таких ядер легко находятся резольвенты, и в результате вместо исходных уравнений /3.15/ и /3.16/ могут быть написаны новые уравнения с перенормированными ядрами, к которым вполне применим стандартный метод использования гауссовских узлов для конечного интервала интегрирования.

Второй метод решения уравнений /3.15/ и /3.16/ основан на разбиении интервала интегрирования на два участка

$$q\psi(q) = \frac{2}{\pi}\int_0^{q_0} qq'dq'[T(q,q') + V(q,q')]q'\psi(q') +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{q_0}^{\infty} q d(q'^2)[T(q,q') + V(q,q')]q'\psi(q')$$

и на введении во втором интеграле новой переменной $x = q'^2 - q_0^2$ и формального веса $e^{-\alpha x}$, в результате чего уравнения /3.15/ и /3.16/ приобретают вид:

$$q\psi(q) = \frac{2}{\pi}\int_0^{q_0} qq'dq'[T(q,q') + V(q,q')]q'\psi(q') + \quad /4.7/$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} q e^{-\alpha x} dx[T(q,\sqrt{x+q_0^2}) + V(q,\sqrt{x+q_0^2})]\sqrt{x+q_0^2}\,\psi(\sqrt{x+q_0^2}).$$

При конечных a для решения уравнения /4.7/ можно применять стандартный метод использования гауссовских узлов /во втором интеграле - узлы для веса e^{-ax} /, а решения уравнений /3.15/ и /3.16/ будут соответствовать пределу решений уравнений типа /4.7/ при $a \to 0$.

Изложенные выше два метода были использованы нами при решении уравнений /3.15/ и /3.16/, причем уравнение /3.16/ решалось первым методом, а уравнение /3.15/ - с помощью второго метода. Уравнения были решены для $c = 1{,}095$ *Ф* и для $c_1 = -0{,}253$, $c_2 = 0$ в /4.1/, что соответствует М.Г.У. с триплетными параметрами /4.2/, не зависящими от энергии. Для энергии связи было получено значение $E_0 = 7{,}70$ *МэВ*, которое значительно отличается от значения $E_0 = 18{,}4$ *МэВ*, полученного в[19] для той же модельной задачи и для тех же параметров. Весьма существенным фактом является то, что два альтернативных уравнения /3.15/ и /3.16/ при применении двух различных методов решения привели к одному и тому же значению E_0. В действительности, однако, имеется разброс $\Delta E = \pm 0{,}2$ *МэВ*, который мы приписываем ограниченной точности вычислений, связанной с тем, что в первом методе было ограничено в разложениях /4.6/ число функций /4.4/ и /4.5/($N \leq 8$), а во втором методе в уравнении /4.7/ были ограничены значения $a(a \geq 0{,}01)$. Однако наблюдаемый разброс незначителен и не предпринималось специальных усилий для его уменьшения, а совпадение результатов /в пределах указанного разброса/ может служить указанием на адэкватность как уравнений /3.15/ и /3.16/, так и используемых численных методов.

Из двух уравнений /3.15/ и /3.16/ по двум обстоятельствам особый интерес представляет уравнение /3.16/. Во-первых, при использовании этого уравнения для вычисления энергии связи E_0 совершенно не требуется рассматривать область 6 /см. *рис. 1*/, то есть единственную область, которая, согласно /3.14/, может внести неоднозначность, устранимую только с привлечением дополнительных соображений. Второе обстоятельство заключается в следующем. Если в t-матрице, соответствующей М.Г.У. и имеющей вид[14]

$$t(k,p,Z) = t(p,k,Z) = -(p^2 - Z)\int_0^c r^2 dr\, j_0(pr)\, j_0(kr) + \qquad /4.8/$$

$$+ c\,\frac{\cos kc - f j_0(kc)}{f - ic\sqrt{Z}}\left[\cos pc - ic\sqrt{Z}\, j_0(pc)\right],$$

отбросить первое слагаемое, то получим некоторое факторизованное приближение:

$$\bar{t}(k,p,Z) = c\,\frac{\cos kc - f j_0(kc)}{f - ic\sqrt{Z}}\left[\cos pc - ic\sqrt{Z}\, j_0(pc)\right]. \qquad /4.9/$$

Для приближенной t-матрицы /4.9/ не имеют места соотношения, из которых следует неоднозначность уравнений Фаддеева[15]. Непосредственная подстановка /4.9/ в уравнение Фаддеева для нашего модельного случая приводит его к одномерному интегральному уравнению с ядром /3.18/, то есть фактически к уравнению /3.16/ с $V_2(q,q') = 0$, которое дает значение $\bar{E}_0 = 12{,}7$ *МэВ*.

Ядро $T_2(q,q')$ /3.18/ уравнения /3.16/ очень простое и достаточно быстро убывает, что дает возможность использовать для решения /3.16/ при учете только $T_2(q,q')$ стандартный метод гауссовских узлов для конечных интервалов. Зная t-матрицу, мы может согласно /1.6/ определить волновые функции, соответствующие приближенному выражению /4.9/. Так, для массовой волновой функции будем иметь:

$$\Psi_p(r, p^2 + i0) = 0, \quad r < c,$$

$$\Psi_p(r, p^2 + i0) = j_0(pr) + t(p,p,p^2 + i0)\,\frac{e^{ipr}}{r}, \qquad /4.10/$$

где $t(p,p,p^2 + i0)$ определяется согласно /1.7/, тогда как в области $r < c$ внемассовая функция отлична от нуля и имеет вид:

$$\Psi_p(r,Z) = j_0(pr) - e^{ic\sqrt{Z}}[\cos pc - ic\sqrt{Z}\, j_0(pc)]\, j_0(r\sqrt{Z}). \quad /4.11/$$

Таким образом, переход от точной t -матрицы /4.8/ в М.Г.У. к приближенной /4.9/ соответствует согласно /4.10/ и /4.11/ переходу от потенциала /1.1/ в его предельной форме /1.2/ к некоторому квазипотенциалу, действующему при $r=c$. Этот квазипотенциал дает ту же амплитуду рассеяния, что и М.Г.У., но в соответствии с /4.11/ и /1.3/ не содержит кора в области $r<c$. Следовательно, переход от решения уравнения /3.16/ только с одним $T_2(q,q')$ к решению этого уравнения с учетом $T_2(q,q')$ и $V_2(q,q')$ будет соответствовать переходу от квазипотенциала без кора к предельной форме потенциала /1.1/ с бесконечным отталкивательным кором при $r<c$. Очевидно, что такая процедура может только уменьшить энергию связи E_0, что подтверждается нашими результатами. С этой точки зрения результат работы /19/ кажется, на наш взгляд, несколько странным, так же, как и результат работы /22/. Действительно, в работе /23/ рассчитывалась энергия связи трития E_T для потенциала

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r<c, \\ -V_0 e^{-\beta(r-c)}, & r>c, \end{cases} \qquad /4.12/$$

для значений радиуса кора c = 0;0,4, и 0,6 *Ф*. Параметры потенциала /4.12/ выбирались в соответствии с экспериментальными данными для двух нуклонов. Результаты работы /23/ указывают на монотонное уменьшение E_T с увеличением c и дают для c = 0,6 *Ф* E_T= 6,78 *МэВ*, что несколько меньше значения E_T= 7,05 *МэВ*, полученного в /22/ для предельной формы потенциала /1.1/ с бо́льшими значениями c / c = 1,095 *Ф* и 1,283 *Ф*, соответственно, для триплетного и синглетного состояний/. Грубая экстраполяция данных работы /23/ на значение $c \approx 1$ *Ф* приводит к $V_0 \approx 90$ $Ф^{-2}$ и $\beta \approx 8$ $Ф^{-1}$. При таких значениях параметров потенциал /4.12/ будет мало отличаться от предельной формы потенциала /1.1/, если учесть δ -образный характер /11/ функции $e^{-\beta(r-c)}$ при $\beta c \gg 1$. Однако подобная экстраполяция результатов /23/ дает $E_T \approx 3$ *МэВ* при $c \approx 1$ *Ф*, что не согласуется с результатами работы /22/.

По поводу работы /19/ можно сделать следующее замечание. Используемые в этой работе уравнения содержат параметр W_0, имеющий смысл энергии и вводимый для устранения неоднозначности при определении трехчастичной волновой функции в М.Г.У. По смыслу этот параметр произволен /15/, однако в /19/ исследована только область его значений $W_0 < -\epsilon_d$ и показана слабая зависимость энергии связи трех частиц от W_0. Для полноты необходимо было бы рассмотреть также области $-\epsilon_d < W_0 < 0$ и $W_0 > 0$, так как выбор W_0 в этих областях будет существенно менять вид уравнений.

Из явных выражений /3.18/ и /П.11/-/П.13/ для ядер $T_2(q,q')$ и $V_2(q,q')$ уравнения /3.16/ видно, что $T_2(q,q')$ пропорционально c, $V_2(q,q') \sim c^3$. Таким образом, относительный вклад в E_0, связанный с учетом в /3.16/ $V_2(q,q')$, будет уменьшаться с уменьшением c. В таблице 1 представлены результаты расчетов E_0 для разных c. При этом f считалось константой /не зависящей от энергии/ и варьировалось, а c определялось из условия $c = -f/0{,}231$ Ф, что обеспечивало для различных наборов f и c постоянство энергии связи дейтона ϵ_d = 2,22 *МэВ*. В *табл. 1* приведены также значения $\bar{E}_0$, получающиеся при учете в /3.16/ только ядра $T_2(q,q')$. Из *табл. 1* видно, что для всех значений f и c E_0 всегда меньше $\bar{E}_0$, то есть учет $V_2(q,q')$ в /3.16/ всегда приводит, как было сказано выше, к уменьшению энергии связи, а относительная величина поправки уменьшается с уменьшением c. Заметим, что результаты для $\bar{E}_0$ очень близки к результатам работы /24/. В *табл. 2* приведены значения энергии связи E_0 для зависящего от энергии параметра f(E) /4.1/. Видно, что значения E_0 сильно зависят от характера поведения f(E) при $E < -\epsilon_d$. Так, если при $E \to -\infty$ $f(E) \to +\infty$, то получающиеся E_0 меньше значения E_0, соответствующего f = const., а если при $E \to -\infty$ $f(E) \to -\infty$, то соответствующие значения E_0, наоборот, больше значения E_0 при

Таблица 1

Зависимость значений энергий связи $\bar{E}_0$ и E_0, получаемых из уравнений /3.16/, соответственно, без V_2 и с учетом V_2, от f и c, удовлетворяющих условию $f = -c\sqrt{\varepsilon_d}$.

f	c (Φ)	$\bar{E}_0$ (МэВ)	E_0 (МэВ)
− 0,253	I,095	I2,7I	7,70
− 0,2I3	0,922I	I5,60	9,48
− 0,I73	0,7489	I7,96	I0,6I
− 0,I33	0,5757	24,80	I7,20

f = const. Приведенные в *табл. 2* значения E_0 получены при одном и том же $c = 1{,}095$ *Ф*.

§5. Заключение

Рассмотренный выше метод получения одномерного уравнения для трехчастичной волновой функции в М.Г.У. основан на решении уравнения Шредингера /2.11/ для трех частиц с использованием граничных условий /2.21/ и /2.22/ для трехчастичной функции и того факта, что в М.Г.У. вполне определена двухчастичная t -матрица.

В этом отношении он существенным образом отличается от метода, использованного в работах /15/ и основанного на модификации уравнений Фаддеева с учетом специфических свойств двухчастичной t -матрицы в М.Г.У. Характерной особенностью предложенного метода является то, что при вычислении энергии связи /или амплитуд переходов/ с помощью уравнения /2.29/ не возникает вопроса об однозначности этого уравнения. Вопрос об однозначности возникает лишь при определении трехчастичной волновой функции и, как было показано, для ряда трехчастичных систем может быть решен с использованием соображений, касающихся симметрии полной волновой функции, без введения дополнительного параметра. Предложенный метод и метод, использованный в работе /14/, представляют собой единый подход к решению задач двух и трех частиц в М.Г.У., основанный на использовании граничных условий для внемассовых двухчастичных функций.

Отличие полученного выше значения энергии связи трех тождественных бозонов от результата работы /19/ указывает на то, что, по нашему мнению, необходимы дальнейшие, более детальные, расчеты с использованием как полученных выше уравнений, так и уравнений работ /15/. В рамках вышеприведенных уравнений предложен простой способ учета возможной роли трехчастичных эффектов, таких, как трехчастичные ядерные силы.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность В.Б.Беляеву, Р. Ван Вагенингену, Ю.А.Симонову

Таблица 2

Зависимость энергии связи E_0 от характера поведения $f(E)$ при $E < -\epsilon_d$, определяемого выражением /4.1/. Приведенные значения E_0 соответствуют $c = 1{,}095$ Ф

c_1	c_2	c_3	E_0 (МэВ)
– 0,506	0,253	0,3	4,30
– 0,506	0,253	0,2	5,I6
– 0,506	0,253	0,I	6,50
0	– 0,253	0	7,70
0	– 0,253	0,I	I0,34
0	– 0,253	0,2	I5,64
0	– 0,253	0,3	26,77

и Дж. А.Тиону за ряд весьма полезных и плодотворных дискуссий.

Приложение

Явный вид $V_1(q,q')$ и $V_2(q,q')$, соответственно, в уравнениях /3.15/ и /3.16/ легко получить, если в /2.28/ и /2.29/ подставить $D(r,\rho)$ в виде /3.7/ и воспользоваться выражениями /3.13/ для $A(R,\alpha)$. Легко видеть, что при введении переменных /3.1O/ член с $\tilde{D}(r,\rho)$ в /2.28/ приобретает вид:

$$\frac{1}{cL(E_q)[\,f(E_q)-ic\sqrt{E_q}\,]}\{c\,[\frac{d}{dr}r\Psi_0^{(1)}(r,q)]_{c_+}-$$
/П.1/

$$-f(E_q)[r\Psi_0^{(1)}(r,q)]_{c_+}\}=\frac{1}{iqc\sqrt{E_q}\,L(E_q)}[\frac{\sqrt{3}}{4}I_0(q)+I_1(q)]-$$

$$-\frac{2}{q}I_2(q),$$

где

$$I_0(q)=\int_0^{2c}R\,dR\int_0^{\alpha_0}d\alpha\,G_1(R,q,\alpha)\,r\rho\,D(r,\rho),\qquad /П.2/$$

$$I_1(q)=\int_0^{2c}R\,dR\int_0^{\alpha_0}d\alpha\,G_1(R,q,\alpha)\int_{|\frac{\pi}{3}-\alpha|}^{\min(\frac{\pi}{3}+\alpha,\,\frac{2\pi}{3}-\alpha)}d\alpha'\,\theta(c-R\sin\alpha')\,r'\rho'D(r',\rho'),$$
/П.3/

$$I_2(q)=\int_c^{2c}R\,dR\int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}}d\alpha\,G_2(R,q,\alpha)\int_{|\frac{\pi}{3}-\alpha|}^{\min(\frac{\pi}{3}+\alpha,\,\frac{2\pi}{3}-\alpha)}d\alpha'\,\theta(c-R\sin\alpha')\,r'\rho'D(r',\rho'),$$
/П.4/

$$G_1(R,q,\alpha)=[e^{i\sqrt{E_q}(c+R\sin\alpha)}-$$

$$-e^{i\sqrt{E_q}(c-R\sin\alpha)}]\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}qR\cos\alpha),$$

$$G_2(R,q,\alpha)=e^{i\sqrt{E_q}(R\sin\alpha-c)}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}qR\cos\alpha).$$

Подстановка в /П.2/-/П.4/ выражений /3.7/ и /3.13/ и использование соотношений /П.1/, /3.2/ и /3.3/ приводят к следующему выражению для $V_1(q,q')$ в /3.15/:

$$V_1(q,q')=[\frac{i\sqrt{3}\,U_1(q,q')}{2cq\sqrt{E_q}L(E_q)}+\frac{4}{q}U_2(q,q')]\frac{1}{f(E_{q'})-ic\sqrt{E_{q'}}}; \qquad /П.5/$$

$$U_1(q,q')=U_1^{(1)}(q,q')+U_1^{(2)}(q,q');$$

$$U_1^{(1)}(q,q')=\int_c^{\frac{2}{\sqrt{3}}c}RdR\{F_1(R,q)F_0(q',R)+ \qquad /П.6/$$

$$+\frac{c}{R\cos\alpha_0}[G_1(R,q,\alpha_0-\frac{\pi}{3})+G_1(R,q,\frac{2\pi}{3}-\alpha_0)]j_0(q'\rho_0)\},$$

$$U_1^{(2)}(q,q')=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}c}^{2c}RdR[F_2(R,q)F_0(q',R)- \qquad /П.7/$$

$$-\frac{c}{R\cos\alpha_0}G_1(R,q,\frac{\pi}{3}-\alpha_0)j_0(q'\rho_0)];$$

$$U_2(q,q')=U_2^{(1)}(q,q')+U_2^{(2)}(q,q');$$

$$U_2^{(1)}(q,q')=-\frac{3}{8}\int_c^{\frac{2}{\sqrt{3}}c}R\,dR\frac{F_3(R,q)}{Q(R)}[\sin 4\kappa_0F_0(q',R)+ \qquad /П.8/$$

$$+\frac{4c}{R\cos\alpha_0}\cos 4\kappa_0\,j_0(q'\rho_0)],$$

$$U_2^{(2)}(q,q')=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}c}^{2c}RdR\{\frac{\sqrt{6}}{4}\frac{F_4(R,q)}{\sin(\gamma_0+\frac{\pi}{4})}F_0(q',R)+ \qquad /П.9/$$

$$+F_5(R,q)[\frac{\sqrt{6}}{4}\frac{\sin\gamma_0}{\sin(\gamma_0+\frac{\pi}{4})}F_0(q',R)-\frac{c}{R\cos\alpha_0}j_0(q'\rho_0)]\}.$$

Аналогично легко показать, что член с $D(r,\rho)$ в /2.29/ имеет вид:

$$\frac{i\sqrt{E_q}}{(4\pi)^2}e^{-ic\sqrt{E_q}}\int d\vec{r}_1d\vec{\rho}_1\theta(r_1-c)h_0^{(1)}(r_1\sqrt{E_q})j_0(q\rho_1)\times$$

$$\times[\theta(c-r_2)D(r_2,\rho_2)+\theta(c-r_3)D(r_3,\rho_3)]= \qquad /П.10/$$

$$=\frac{2}{q}\int_c^{2c}RdR\int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}}d\alpha\,G_2(R,q,\alpha)\int_{|\frac{\pi}{3}-\alpha|}^{\min(\frac{\pi}{3}+\alpha,\frac{2\pi}{3}-\alpha)}d\alpha'\theta(c-R\sin\alpha')\times$$

$$\times r'\rho'D(r',\rho').$$

Из /П.10/ и соотношений /3.7/, /3.13/, /3.2/ и /3.3/ следует, что в уравнении /3.16/ $V_2(q,q')$ выражается следующим образом:

$$V_2(q,q') = [\,W_1(q,q') + W_2(q,q')\,]\,\frac{1}{q[\,f(E_{q'}) - ic\sqrt{E_{q'}}\,]}, \qquad /П.11/$$

$$W_1(q,q') = -\frac{3}{2}\int_{c}^{\frac{2}{\sqrt{3}}c} R\,dR\,F_3(R,q)\Big[\frac{\sin 4\kappa_0}{Q(R)}\,F_0(q',R) + \qquad /П.12/$$

$$+\frac{4c}{R\cos\alpha_0}\,\frac{\cos 4\kappa_0}{Q(R)}\,j_0(q'\rho_0)\Big],$$

$$W_2(q,q') = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}c}^{2c} R\,dR\,\Big\{F_5(R,q)\Big[\sqrt{6}\,\frac{\sin\gamma_0\,F_0(q',R)}{\sin(\gamma_0+\frac{\pi}{4})} - \qquad /П.13/$$

$$-\frac{4c}{R\cos\alpha_0}\,j_0(q'\rho_0)\Big] + \sqrt{6}\,\frac{F_4(R,q)}{\sin(\gamma_0+\frac{\pi}{4})}\,F_0(q',R)\Big\}.$$

В вышеприведенных выражениях введены функции F_i, имеющие вид:

$$F_1(R,q) = \int_{\alpha_0-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}-\alpha_0} d\alpha\,G_1(R,q,\alpha), \quad F_2(R,q) = \int_{\frac{\pi}{3}-\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha\,G_1(R,q,\alpha),$$

$$F_3(R,q) = \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha\,G_2(R,q,\alpha)\,\sin\frac{4}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2}-\alpha\Big),$$

$$F_4(R,q) = \int_{\frac{2\pi}{3}-\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha\,G_2(R,q,\alpha)\,\sin\frac{4}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2}-\alpha\Big),$$

$$F_5(R,q) = \int_{\alpha_0}^{\frac{2\pi}{3}-\alpha_0} d\alpha\,G_2(R,q,\alpha).$$

Литература

1. *R.V.Reid. Ann.Phys. (N.-Y.), 50, 411 (1968).*
2. *H.Feschbach, E.L.Lomon. Phys.Rev., 102, 891 (1956).*
3. *H.Feschbach, E.L.Lomon. Ann.Phys., (N.-Y.), 29, 19 (1964).*
4. *G.Breit, W.G.Bouricius. Phys.Rev., 75, 1029 (1949).*
5. *E.L.Lomon, M.McMillan. Ann.Phys., (N.-Y.), 23, 439 (1963).*
6. *M.M.Hoenig, E.L.Lomon. Ann.Phys. (N.-Y.), 36, 363 (1966).*
7. *E.L.Lomon, M.Nauenberg. Nucl.Phys., 24, 474 (1961).*
8. *E.L.Lomon, H.Feshbach. Ann.Phys. (N.-Y.) 48, 94 (1968).*
9. *Л.Д.Фаддеев. ЖЭТФ, 39, 1459 /1960/.*
10. *M.M.Hoenig. Nucl.Phys., A206, 169 (1973).*
11. *Y.E.Kim, A.Tubis. Phys.Rev., C1, 414 (1970).*
12. *Y.E.Kim, A.Tubis. Phys.Rev., C2, 2118 (1970).*
13. *В.Н.Ефимов. ОИЯИ, Р4-6708, Дубна, 1972.*
14. *V.N.Efimov, H.Schulz. Nucl.Phys., A235, 436 (1974).*
15. *D.D.Brayshaw. Phys.Rev.Lett., 26, 659 (1971); D.D.Brayshaw. Phys.Rev., D7, 1835 (1973).*
16. *В.Н.Ефимов. ОИЯИ, Р4-8580, Дубна, 1975.*
17. *В.Н.Ефимов. ОИЯИ, Р4-8708, Дубна, 1975.*
18. *В.Н. Ефимов. ЯФ, 10, 107 /1969/.*
19. *D.D.Brayshaw. Phys.Rev., D8, 2572 (1973).*
20. *S.-N.Yang. Phys.Rev., C10, 2067 (1974).*
21. *А.Б.Мигдал. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М., Наука, 1965.*
22. *D.D.Brayshaw. Phys.Rev.Lett, 32, 382 (1974).*
23. *T.Ohmura. Prog.Theor.Phys., 41, 419 (1969).*
24. *Y.E.Kim, A.Tubis. Phys.Lett., 38B, 354 (1972).*

Рукопись поступила в издательский отдел 19 мая 1975 года.