

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

A 14-1

P4-88-841

Г.Н.Афанасьев, В.М.Шилов

ПРАКТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ
ЭФФЕКТА ААРОНОВА – БОМА

Направлено в "Journal of Physics A"

1988

§ I. Введение

Известно, что в многосвязных пространствах допустимы неэквивалентные представления операторов углового момента ^{/1/}. Теория предсказывает существование эффекта Ааронова - Бома (АБ) для тех представлений, которым соответствуют однозначные волновые функции (см., например, статьи Янга (с.5), Ааронова (с.10) в ^{/2/}, Онуки (с.117) в ^{/3/}). В противном случае этот эффект отсутствует ^{/4/}. Отсутствие надежного теоретического критерия для отбора одного из этих представлений породило оживленную дискуссию последних лет (см., например, ^{/5/}). Ввиду этой теоретической неопределенности решающее значение приобретает экспериментальная проверка существования АБ-эффекта. Эксперименты ^{/6/}, в которых электроны рассеивались на магнитном поле, окружающем цилиндрический соленоид, доказали наличие сдвига интерференционной картины при включении магнитного поля внутри соленоида (правильнее здесь говорить о сдвиге дифракционной картины; отдавая дань традиции, мы в § I используем термин "интерференционная картина"). Имеются по крайней мере три причины, которые препятствуют однозначному толкованию результатов этих опытов. Во-первых, конечность длины реального цилиндрического соленоида приводит с необходимостью к утечкам магнитного поля вблизи его концов. Это позволяет приписать положительные результаты экспериментов ^{/6/} рассеянию электронов на этих утечках ^{/7/}. Во-вторых, ввиду замкнутости магнитных силовых линий в цилиндрическом соленоиде всегда существует обратный поток. Сказывается ^{/8/}, сечение рассеяния электронов на этом потоке в точности совпадает с сечением АБ ^{/9/}. В третьих, далекодействующий характер вектор-потенциала цилиндрического соленоида приводит к невозможности разбегания полной волновой функции на падающую и рассеянную волны. В результате возникают различные парадоксальные ситуации ^{/10/}.

Весьма перспективными представляются эксперименты, в которых заряженные частицы рассеиваются на магнитных полях иных конфигураций, для которых отсутствуют перечисленные выше трудности. Простейшими являются магнитные поля тороидального соленоида и двух соленоидов с равными по величине, но противоположно направленными магнитными потоками ($\Phi_1 = -\Phi_2 = \Phi$). В известных экспериментах Тономуры ^{/11/} электроны рассеиваются на тороидальном непроницаемом барьере. Наличие магнитного потока внутри барьера приводит к наблюдаемому на опыте сдвигу интерференционной картины. Однако до настоящего времени отсутствуют теоретические значения этих сдвигов. Точнее говоря, существует их качественная интерпретация. Она состоит в том, что при переходе из точки P в точку P' волновая функция приобретает различные фазовые множителя, если внутри суммарного контура имеется отличный от нуля

магнитный поток. Эта интерпретация противоречит предположению об однозначности волновой функции. Отдельные члены фейнмановской суммы по путям действительно содержат упомянутые фазовые множители (полная волновая функция при этом однозначна). Однако для рассеяния на непроницаемом торе фейнмановская функция распространения в явном виде неизвестна. Кроме того, точно решаемый случай рассеяния на одном цилиндрическом соленоиде показывает, что в многосвязных пространствах имеются существенные трудности при построении фейнмановской суммы по путям [12]. Упомянем еще две работы [13, 14], в которых были получены амплитуды рассеяния f_m на магнитном поле, окружающем тороидальный соленоид. Однако в эксперименте измеряется не сечение рассеяния $\sigma_m = |f_m|^2$ на магнитном поле соленоида, а сдвиг интерференционной картины, обусловленный потоком магнитного поля внутри соленоида. Для этого необходимо найти сечение рассеяния при отсутствии ($\sigma_0 = |f_0|^2$) и наличии магнитного поля внутри соленоида ($\sigma_\gamma = |f_0 + f_m|^2$), сравнить их между собой и с экспериментально наблюдаемым сдвигом интерференционной картины. Именно это и составляет цель настоящей работы.

Мы будем придерживаться следующего плана изложения.

В §§ 2 и 3 в рамках френелевской теории дифракции вычисляются сечения рассеяния на тороидальном соленоиде и на двух цилиндрических соленоидах с $\Phi_1 = -\Phi_2$. В § 4 анализируется сдвиг интерференционной картины, возникающий при включении магнитного поля. Там же выясняются условия, при которых может быть реализован предложенный в [15] решающий эксперимент по проверке существования АБ-эффекта. Представленные численные расчеты подтверждают предсказания теории, согласно которой недоступные для частиц поля (например, магнитное поле H внутри соленоида) могут привести к резкому уменьшению плотности и тока вероятности в доступных для частиц областях пространства. Далее, анализируя условия, при которых были выполнены эксперименты Тонумуры, мы доказываем, что френелевская теория дифракции неприменима для количественного описания и может претендовать только на качественные результаты. Адекватной оказывается френелевская теория дифракции. В ее рамках для рассеяния на двух цилиндрических соленоидах с $\Phi_1 = -\Phi_2$ мы вычисляем дифракционную картину при наличии и отсутствии магнитного потока внутри соленоидов. Оказывается, что на определенных расстояниях от рассеивателя и при определенных углах рассеяния дифракционная картина остается одной и той же при $\gamma = 0$ и $\gamma = 1/2$ ($\gamma = e\Phi/\hbar c$). Даны конкретные рекомендации по реализации экспериментов.

Насколько мы знаем, представленные в настоящей работе расчеты являются первыми количественными расчетами АБ-эффекта, допускающими

прямое сравнение с экспериментальными данными. Мы старались по возможности избегать обсуждения актуальных вопросов теории АБ-эффекта, сосредоточив внимание на возможностях экспериментальной проверки существования этого эффекта. Мы всегда используем однозначные волновые функции, как при наличии магнитного поля, так и в его отсутствие в одно-или многосвязных пространствах.

§ 2. Рассеяние в отсутствие магнитного поля

2.1. Рассмотрим бесконечный цилиндрический соленоид с осью, совпадающей с осью z . Окружим его соосным непроницаемым цилиндром радиуса R . В отсутствие магнитного потока внутри соленоида имеем для волновой функции рассеяния (начальный волновой вектор направлен вдоль оси x) следующее хорошо известное выражение:

$$\Psi_0 = \exp(ikx) + \Psi_S^0, \quad (2.1)$$

$$\Psi_S^0 = -2 \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cdot i^m \cdot H_m^{(1)}(k\rho) \cdot \frac{J_m(kR)}{H_m^{(1)}(kR)} \cdot \cos m\varphi, \quad \epsilon_m = (1 + \delta_{m0})^{-1}.$$

Отсюда находим амплитуду рассеяния

$$f_0(\varphi) = -2 \sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{J_m(kR)}{H_m^{(1)}(kR)} \cdot \cos m\varphi. \quad (2.2)$$

При $kR \ll 1$ выражения (2.1) и (2.2) принимают вид

$$\Psi_S^0 = -H_0^{(1)}(k\rho) \cdot \left[1 + \frac{2i}{\pi} \left(\ln \frac{kR}{2} + C \right) \right]^{-1},$$

$$f_0(\varphi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \cdot \left[1 + \frac{2i}{\pi} \left(\ln \frac{kR}{2} + C \right) \right]^{-1} \quad (2.3)$$

(C — постоянная Эйлера $\approx 0,577 \dots$).

При больших энергиях пользоваться рядами (2.1) и (2.2) нецелесообразно, поскольку они содержат много знакопеременных членов. В этом случае адекватным является приближение Кирхгофа [16] (в нем предполагается, что в плоскости $x = 0$ волновая функция равна $\exp(ikx)$ вне непроницаемого цилиндра и нулю на его поверхности):

$$\Psi_S^0 = -\frac{k}{4} \int_{-R}^R dy' \cdot \left[H_0^{(1)}(kt) + \frac{ix}{t} H_1^{(1)}(kt) \right], \quad t = \sqrt{x^2 + (y-y')^2}. \quad (2.4)$$

При $k\rho \rightarrow \infty$

$$\Psi_S^0 = -\left(\frac{k}{8\pi i} \right)^{1/2} \int_{-R}^R dy' \frac{\exp(ikt)}{\sqrt{t}} \left(1 + \frac{x}{t} \right). \quad (2.5)$$

При $k \rightarrow \infty$ и фиксированных ρ, R подынтегральное выражение в (2.5) быстро осциллирует. При $|y| < R$ интеграл в (2.5) определяется вкладом стационарной точки $y' = y$. Используя метод стационарной фазы, получаем

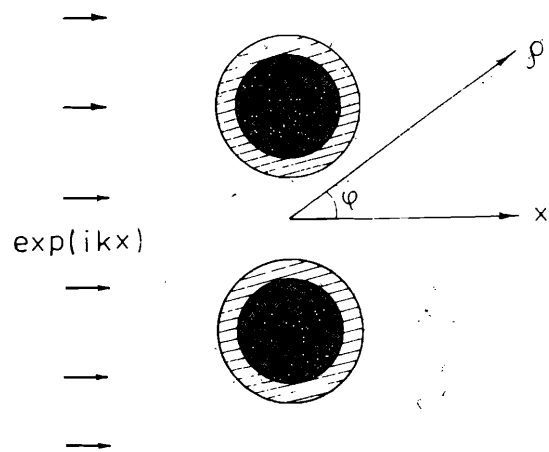


Рис. 1. Рассеяние электронов на двух цилиндрических соленоидах (черные кружки) с противоположными магнитными потоками, окруженных непроницаемыми цилиндрами (заштрихованы). Стрелки указывают направление волнового вектора падающей волны; φ - угол рассеяния.

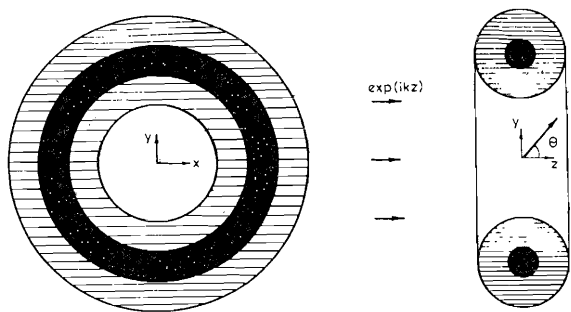


Рис. 2. Рассеяние электронов на тороидальном соленоиде (зачернен), окруженном непроницаемым тором (заштрихован). Стрелки указывают направление волнового вектора падающей волны; θ - угол рассеяния.

$$\psi_s^{-0} \approx -\exp(ikx) \quad (k \rightarrow \infty, |y| < R, x > 0). \quad (2.6)$$

Подставляя это выражение в (2.1), получаем, что $\psi_0^0 \approx 0$, т.е. за соленоидом возникает геометрическая тень. При $\rho \gg R$ из (2.5) следует

$$\psi_s^0 = -\sqrt{\frac{k}{8\pi\rho}} (1 + \cos\varphi) \int_{-R}^R \exp(ikt) dy'. \quad (2.7)$$

При $\rho \rightarrow \infty$ и фиксированном k имеем

$$\psi_s^0 = \frac{\exp(ik\rho)}{\sqrt{\rho}} f_0(\varphi), \quad f_0(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \frac{\sin(KR \sin\varphi)}{\sin\varphi} (1 + \cos\varphi), \quad (2.8)$$

$$\sigma_0(\varphi) = |f_0(\varphi)|^2 = \frac{1}{2\pi k} \left[\frac{\sin(KR \sin\varphi)}{\sin\varphi} (1 + \cos\varphi) \right]^2.$$

В том же приближении приведем дифференциальные сечения рассеяния на двух непроницаемых цилиндрах радиуса R (оси цилиндров проходят через точки $\pm d$ ($d > R$)) - оси y параллельно оси z , начальный волновой вектор вдоль оси x (рис. 1):

$$\sigma_0^{2c} = \left[\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi} \sin(KR \sin\varphi) \cos(Kd \sin\varphi) \right]^2, \quad (2.9)$$

и на непроницаемом торе ($\rho - d \leq z \leq \rho + d$) (начальный волновой вектор вдоль оси z (рис. 2)):

$$\sigma_0^T = \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \right)^2 \cdot \left\{ (d+R) J_1 [k(d+R) \sin\theta] - (d-R) J_1 [k(d-R) \sin\theta] \right\}^2. \quad (2.10)$$

2.2. Приближение Кирхгофа работает (см., например, [6]), если длины волн падающих частиц малы по сравнению с размером препятствий, на которых происходит рассеяние (в данном случае это соответствует $kR \gg 1$). Вычисленные в этом приближении поля отличаются от точных только в непосредственной близости от рассеивателя. Численные расчеты [17] показывают, что приближение Кирхгофа вполне удовлетворительно работает при $kR \geq 2-3$.

В типичных экспериментах [6] по рассеянию электронов на цилиндрическом соленоиде E (энергия электронов) ≈ 20 кэВ, $R \approx 10^{-4}$ см. Это дает $k \approx 10^{10}$ см $^{-1}$, $kR \approx 10^6$. Поэтому применимость приближения Кирхгофа не вызывает сомнений.

§ 3. Рассеяние при наличии магнитного поля

3.1. Поместим теперь соленоид внутри непроницаемых цилиндров и тора. Рассмотрим сначала один цилиндрический соленоид, помещенный внутри бесконечного непроницаемого цилиндра. При магнитном потоке внутри соленоида, равном Φ , следующая волновая функция описывает рассеяние заряженных частиц:

$$\Psi_{\chi} = \Psi_{AB}^{\chi} + \Psi_S^{\chi} \quad (3.1)$$

Здесь Ψ_{AB}^{χ} - волновая функция, описывающая рассеяние на точечном неэкранированном соленоиде /9/:

$$\Psi_{AB}^{\chi} = \int \exp[i\pi(|m| - \frac{1}{2}|m-\chi|)] \cdot J_{|m-\chi|}(kR) \cdot \exp(im\varphi), \quad (3.2)$$

Ψ_S^{χ} учитывает конечность и экранировку соленоида:

$$\Psi_S^{\chi} = - \int \exp[i\pi(|m| - \frac{1}{2}|m-\chi|)] \cdot H_{|m-\chi|}^{(1)}(kR) \times \quad (3.3)$$

$$\times \frac{J_{|m-\chi|}(kR)}{H_{|m-\chi|}^{(1)}(kR)} \cdot \exp(im\varphi).$$

Асимптотика Ψ_S^{χ} получается элементарно:

$$\Psi_S^{\chi} = \frac{\exp(ik\rho)}{\sqrt{\rho}} \cdot f_{\chi}(\varphi), \quad f_{\chi}(\varphi) = - \left(\frac{2}{\pi ik} \right)^{1/2} \times \quad (3.4)$$

$$\times \int \frac{J_{|m-\chi|}(kR)}{H_{|m-\chi|}^{(1)}(kR)} \cdot \exp[i\chi\varphi + i\pi(|m| - |m-\chi|)].$$

Более сложным является асимптотическое поведение Ψ_{AB}^{χ} . Впервые в замкнутом виде, справедливом для всех углов φ , оно было получено в /18/:

$$\Psi_{AB}^{\chi} \approx \exp(ikx) \cdot \exp[i\chi(\varphi - \pi)] + i \frac{\sin \pi \chi \cdot \exp(i\varphi/2)}{(1 - 2\pi i k \rho \sin^2 \frac{\varphi}{2})^{1/2}} \exp(ik\rho). \quad (3.5)$$

Нас особо будет интересовать случай $\chi = 1/2$. Тогда

$$\Psi_{1/2} = \Psi_{AB}^{1/2} + \Psi_S^{1/2},$$

$$\Psi_S^{1/2} = 2 \cdot \exp(i\varphi/2) \exp(i\pi/4) \times \quad (3.6)$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} H_{m+1/2}^{(1)}(k\rho) \cdot i^m \cdot \frac{J_{m+1/2}(kR)}{H_{m+1/2}^{(1)}(kR)} \sin(m+\frac{1}{2})\varphi,$$

$$\Psi_{AB}^{1/2} = -2 \cdot \exp(i\varphi/2) \cdot \exp(i\pi/4) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} i^m \cdot \frac{J_{m+1/2}(kR)}{H_{m+1/2}^{(1)}(kR)} \cdot \sin(m+\frac{1}{2})\varphi,$$

$$f_{1/2} = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \cdot \exp(i\varphi/2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{m+1/2}(kR)}{H_{m+1/2}^{(1)}(kR)} \sin(m+\frac{1}{2})\varphi.$$

Из (3.6) следует, что $\Psi_{1/2} = \Psi_{AB}^{1/2} = \Psi_S^{1/2} = f_{1/2} = 0$ на положительной полуоси $x(x=0)$. При $\chi = 1/2$ и малых значениях kR имеем

$$\Psi_S^{1/2} = -2 \exp[i(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4})] \cdot kR \cdot H_{1/2}^{(1)}(kR) \cdot \sin \varphi/2,$$

$$f_{1/2} = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \exp[i(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})] \cdot kR \cdot \sin \varphi/2. \quad (3.7)$$

3.2. Обозначим через Ψ_w^0 волновую функцию, отвечающую рассеянию на непроницаемом цилиндре радиуса R при нулевом магнитном потоке внутри соленоида (находящегося внутри цилиндра) и при наличии непроницаемой перегородки, простирающейся от $x=R$ до $x=\infty$. Тогда имеет место следующее почти очевидное соотношение /15/:

$$\Psi_{1/2}^{\chi} = \exp(i\varphi/2) \cdot \Psi_w^0. \quad (3.8)$$

Таким образом, при $\chi = 1/2$ эффект наличия магнитного поля H внутри соленоида с точностью до фазового множителя эквивалентен введению непроницаемой перегородки (при этом предполагается, что падающие частицы движутся вдоль отрицательной полуоси x к началу координат, рис. 3). Соотношения, подобные (3.8), при $\chi = 1/2$ имеют место и для двух бесконечных непроницаемых цилиндров с противоположными по знаку магнитными потоками ($\Phi_1 = -\Phi_2$) внутри них, и для тороидального соленоида. При начальном волновом векторе вдоль оси x непроницаемая перегородка помещается на участке плоскости $\varphi = 0$, лежащей между двумя соленоидами (рис. 4) и на участке плоскости $\varphi = 0$, совпадающей с дырой непроницаемого тора (рис. 5). Для точечных неэкранированных соленоидов факты исчезновения при $\chi = 1/2$ волновой функции в упомянутых областях пространства, равно как и соотношения, подобные (3.8), были получены в работах /9, 19, 20/. Из (3.8) следует, что при $\chi = 1/2$ волновые функции (а также плотности и ток вероятности) обращаются в нуль в местах расположения упомянутых непроницаемых перегородок (которых при $\chi = 1/2$ фактически нет). Из этого факта в /15/ был сделан вывод, что скорость счета идеальных точечных детекторов, помещенных в тех же местах (\mathcal{D} на рис. 3, \mathcal{D}_1 на рис. 4, 5), падает до нуля при $\chi = 1/2$. С другой стороны, скорость счета детекторов, помещенных на оси x за двумя цилиндрами (\mathcal{D}_2 , рис. 4) и за тороидальным соленоидом (\mathcal{D}_2 , рис. 5), практически одна и та же при $\chi = 0$ и $\chi = 1/2$.

3.3. Нам понадобится в дальнейшем амплитуда рассеяния (назовем ее для краткости магнитной амплитудой рассеяния) на магнитных полях, окружающих непроницаемые цилиндры и торы. Для двух цилиндров с обратными ($\Phi_1 = -\Phi_2 = \Phi$) магнитными потоками в них (рис. 1) магнитная

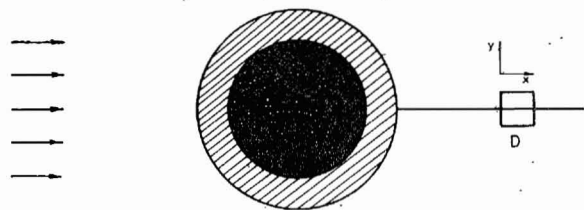


Рис. 3. Цилиндрический соленоид (черный кружок) окружен непроницаемым цилиндром (заштрихован). При начальном волновом векторе вдоль оси x и $\delta = \epsilon\varphi/4(\epsilon = 1/2)$ волновая функция исчезает на оси x позади соленоида.

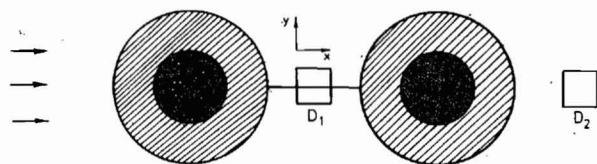


Рис. 4. Два цилиндрических соленоида (черные кружки) окружены непроницаемыми цилиндрическими барьерами (заштрихованы). Падающая волна распространяется вдоль оси x . При $\varphi_1 = -\varphi_2$ и $\delta = 1/2$ волновая функция обращается в нуль на отрезке оси x , лежащем между двумя цилиндрами.

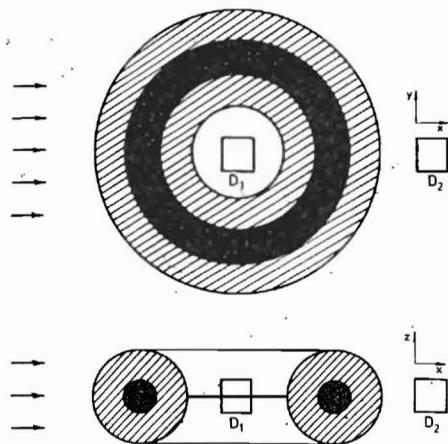


Рис. 5. Тороидальный соленоид (зачернен) окружен непроницаемым тором (заштрихован). При начальном волновом векторе вдоль оси x и $\delta = 1/2$ волновая функция исчезает на участке плоскости $z = 0$, совпадающей с дугой тора.

амплитуда равна $\sqrt{2I}/\delta$:

$$f_m^B = \sqrt{\frac{2I\epsilon}{\kappa}} \delta \frac{\sin [k(d-R)\sin\theta]}{\sin\theta} (1 + \cos\theta) \quad (3.9)$$

- в первом борновском приближении,

$$f_m^{HE} = -\sqrt{\frac{2I}{\sin\theta}} [1 - \exp(2i\pi\delta)] \frac{\sin [k(d-R)\sin\theta]}{\sin\theta} \quad (3.10)$$

- в высокоэнергетическом приближении и

$$f_m^D = -\frac{1}{\sqrt{2I\kappa}} [1 - \exp(2i\pi\delta)] \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \sin [k(d-R)\sin\theta] \quad (3.11)$$

- в приближении дираковского фазового множителя $\sqrt{2I}$. Для тороидального соленоида (рис. 2) соответствующие магнитные амплитуды выглядят следующим образом $\sqrt{I4}$:

$$f_m^B = \pi\delta(d-R) \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} J_1 [k(d-R)\sin\theta], \quad (3.12)$$

$$f_m^{HE} = ik(d-R) [1 - \exp(2i\pi\delta)] \frac{J_1 [q(d-R)]}{q}, \quad q = 2\kappa \sin\frac{\theta}{2}, \quad (3.13)$$

$$f_m^D = \frac{1}{2}(d-R) [1 - \exp(2i\pi\delta)] \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} J_3 [k(d-R)\sin\theta]. \quad (3.14)$$

Для бесконечно тонкого тороидального соленоида ($R \ll d$) амплитуды f_m^B и f_m^{HE} были получены в работе /13/. Как и должно быть, f_m^D и f_m^{HE} совпадают при малых углах рассеяния (область применимости высокоэнергетического приближения); f_m^D и f_m^B совпадают при малых δ (область применимости борновского приближения); наконец, f_m^D , f_m^B и f_m^{HE} совпадают при малых углах и малых δ .

3.4. Полная амплитуда рассеяния на соленоиде, окруженном непроницаемым барьером, складывается из амплитуды рассеяния f_0 в отсутствие магнитного поля (см. соответствующие формулы в § 2) и магнитной амплитуды рассеяния f_m . В дальнейшем, ради определенности в качестве f_m будем использовать амплитуды f_m^D , полученные с помощью дираковского фазового множителя. В итоге получаем для полной амплитуды ($f = f_0 + f_m$) и сечения ($\sigma = |f|^2$) рассеяния следующие выражения:

$$f_\delta^{2\epsilon} = -\frac{1 + \cos\theta}{\sqrt{2I\kappa}} \frac{\sin [k(d+R)\sin\theta] - \exp(2i\pi\delta) \sin [k(d-R)\sin\theta]}{\sin\theta}, \quad (3.15)$$

$$\sigma_{\gamma}^{2c} = \frac{2}{\pi k} \left(\frac{1 + \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right)^2 \cdot \left[\sin^2(kd \sin \vartheta) \cos^2(kR \sin \vartheta) \cdot \sin^2 \pi \gamma \delta + \sin^2(kR \sin \vartheta) \cos^2(kd \sin \vartheta) \cdot \cos^2 \pi \gamma \delta \right] \quad (3.16)$$

- для двух цилиндрических соленоидов с $\Phi_1 = -\Phi_2$ и

$$f_{\gamma}^T = \frac{i}{2} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \cdot \left\{ (d+R) \cdot J_1 [k(d+R) \sin \theta] - \exp(2i\pi\gamma\delta) \cdot (d-R) \cdot J_1 [k(d-R) \sin \theta] \right\}, \quad (3.17)$$

$$\sigma_{\gamma}^T = \sigma_0^T + \left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \cdot (d^2 - R^2) \cdot \sin^2 \pi \gamma \delta \cdot J_1^2 [k(d+R) \sin \theta] + J_1^2 [k(d-R) \sin \theta] \quad (3.18)$$

- для тороидального соленоида. Сечение σ_0^T определено соотношением (2.10). Нас особо будет интересовать случай $\gamma = 1/2$. Тогда

$$\sigma_{1/2}^{2c} = \frac{2}{\pi k} \cdot \left[\frac{1 + \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \sin(kd \sin \vartheta) \cdot \cos(kR \sin \vartheta) \right]^2, \quad (3.19)$$

$$\sigma_{1/2}^T = \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \cdot \left\{ (d+R) J_1 [k(d+R) \sin \theta] + (d-R) J_1 [k(d-R) \sin \theta] \right\}^2. \quad (3.20)$$

§ 4. Экспериментальные следствия

4.1. Выясним теперь на примере одного соленоида, при каких условиях наличие магнитного потока ($\gamma = \frac{e\Phi}{hc} = \frac{1}{2}$) существенным образом модифицирует волновую функцию (а также плотность и ток вероятности) за соленоидом (рис.3). Наибольшее искажение волновой функции имеет место при малых значениях kR . Для этого достаточно сравнить выражения (2.3) и (3.7). При конечных значениях kR и $k\rho \gg 1$ волновая функция и сечение рассеяния в отсутствие магнитного поля быстро осциллируют (см. (2.8)) при изменении угла рассеяния ϑ . Амплитуда осцилляций особенно велика при малых значениях ϑ , то есть в области за соленоидом. Введение упомянутой непроницаемой перегородки (что, как мы видели, эквивалентно наличию внутри непроницаемого цилиндра магнитного потока Φ , удовлетворяющего условию $\gamma = \frac{e\Phi}{hc} = \frac{1}{2}$) сильно меняет дифракционную картину. Из-за осцилляций резкое уменьшение волновой функции за соленоидом имеет место только в непосредственной близости оси x . Вычислим теперь $|\Psi|^2$ при конечных значениях kR и $k\rho$. Для этого воспользуемся выражениями (2.1) и (3.6). На рис. 6, 7 представлены результаты вычислений при $kR=1$ и $kR=10$ для различных значений $k\rho$, показанных на рисунках. При каждом значении

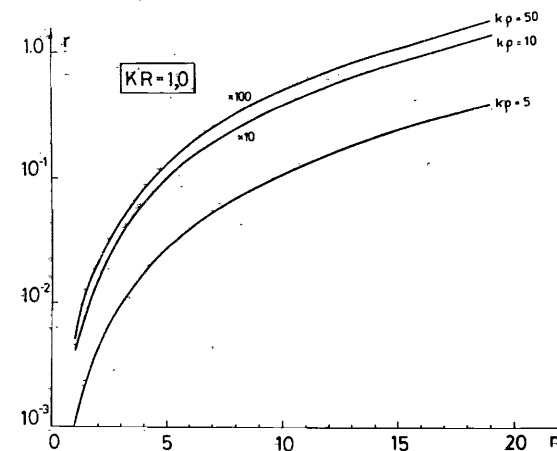


Рис. 6. Численная иллюстрация влияния магнитного поля на вероятность регистрации частиц. Область тени разбивалась на 40 равных частей. В каждой из этих точек квадрат абсолютной величины волновой функции при $\gamma = 1/2$ относился к квадрату абсолютной величины волновой функции в отсутствие магнитного поля, взятой на оси x при том же значении ρ . Это отношение ($\gamma = \frac{e\Phi_{1/2}(\rho, \vartheta = \vartheta_n)}{e\Phi_0(\rho, \vartheta = 0)}$) представлено по оси ординат. Значение $kR = 1$. Значения $k\rho$ указаны у каждой из кривых.

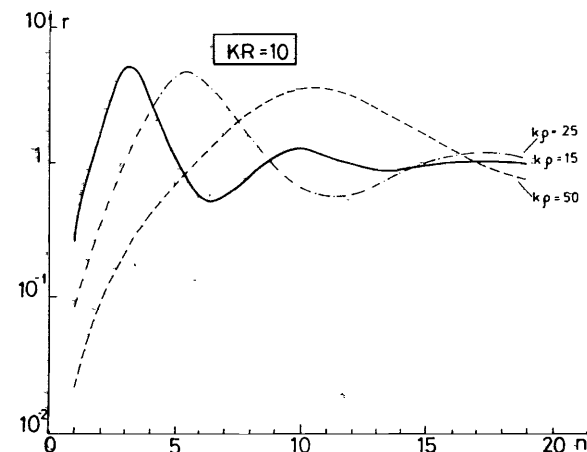


Рис. 7. То же, что на рис. 6, но при $kR = 10$.

$K\rho$ область геометрической тени ($0 \leq |\vartheta| \leq \arcsin R/\rho$) разбивалась на сорок равных частей. Поскольку абсолютные значения волновых функций при $\chi = 0$ и $\chi = 1/2$ не меняются при изменении знака ϑ , то достаточно вычислить волновые функции при $\vartheta > 0$ в каждой из 21 точек $\vartheta_n = \frac{n-1}{21} \arcsin \frac{R}{\rho}$ ($1 \leq n \leq 21$). Для каждого ϑ_n по формулам (3.6) вычислялась плотность вероятности $|\Psi_{1/2}(\rho, \vartheta = \vartheta_n)|^2$. Для удобства она относилась к квадрату абсолютной величины волновой функции в отсутствие магнитного поля, взятой на оси x при том же значении ρ . Таким образом, на рис. 6,7 по оси ординат отложено отношение $\eta = \frac{|\Psi_{1/2}(\rho, \vartheta = \vartheta_n)|^2}{|\Psi_0(\rho, \vartheta = 0)|^2}$, по оси абсцисс - номер зоны n , для которой вычисляется угол ϑ_n . Как и следовало ожидать, с ростом R и ρ возникают осцилляции. При этом область малости $|\Psi_{1/2}|^2$ сужается. При $KR \gg 1$ и $K\rho \gg 1$, что соответствует условиям экспериментов (см. /6/), область за соленоидом оказывается в геометрической тени. В ней волновая функция очень мала. Поэтому введение непроницаемой перегородки, простирающейся от $x=R$ до $x=\infty$ (это эквивалентно созданию внутри соленоида магнитного потока Φ с $\chi = \frac{e\Phi}{hc} = \frac{1}{2}$), практически ничего не изменит в области тени. В обоих случаях (то есть при $\chi = 0$ и $\chi = 1/2$) скорость счета детекторов, помещенных за соленоидом, будет крайне мала. С первого взгляда, кажется, что постановка экспериментов по проверке существования АБ-эффекта, предложенных в /15/, в таких условиях бессмысленна. Тем не менее это не так. Дело в том, что при постановке экспериментов /6/ широко используются отрицательно заряженные электростатические системы (так называемые бипризмы), отклоняющие пучок электронов к оси x . Эффективно это приводит к уменьшению волнового числа K . В результате в области тени возникает интерференционная картина. При симметричном относительно оси x положении бипризм волновая функция при $\chi = 1/2$ по-прежнему обращается в нуль на положительной полуоси x . Этот факт может быть проверен экспериментально. Подобная ситуация при $\chi = 1/2$ имеет место также для двух цилиндров с $\Phi_1 = -\Phi_2$ и для тороидального соленоида.

4.2. Выясним теперь, к каким экспериментальным следствиям приводит изучение рассеяния электронов на двух соленоидах с $\Phi_1 = -\Phi_2 = \Phi$ (рис. 1). Из (2.9) следует, что в отсутствие магнитного поля ($\chi = 0$) сечение рассеяния на двух цилиндрах имеет два семейства нулей при углах, определяемых соотношениями

$$\sin \vartheta_n^{(R)} = \frac{n\pi}{KR} \quad \text{и} \quad \sin \vartheta_n^{(d)} = \frac{n+1/2}{Kd} \pi \quad (4.1)$$

или (если n не слишком велико)

$$\vartheta_n^{(R)} = n\pi/KR, \quad \vartheta_n^{(d)} = (n+1/2)\pi/Kd. \quad (4.2)$$

С другой стороны, при $\chi = 1/2$ имеем (см. (3.19))

$$\vartheta_n^{(R)} = \frac{n+1/2}{KR} \pi, \quad \vartheta_n^{(d)} = \frac{n\pi}{Kd}. \quad (4.3)$$

Из сравнения (4.2) и (4.3) заключаем, что включение магнитного поля приводит (при $\chi = 1/2$) к сдвигу нулей первого семейства на величину $\frac{\pi}{2KR}$, а второго - на $\frac{\pi}{2Kd}$. Однако на опыте видят не минимумы, а максимумы сечений. На рис. 8 изображены сечения, вычисленные при следующих параметрах: $K = 2 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-1}$, $R = 10^{-4} \text{ см}$, $d = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ (которые близки к условиям, при которых опыты Тономуры были проведены на тороидальном соленоиде $(\rho-d)^2 + t^2 = R^2$). По оси абсцисс отложен угол рассеяния. Нулю на этой оси соответствует угол $\vartheta = 0,01^\circ$. Цена одного деления равна 10^{-5}° (Например, цифре 5 на оси абсцисс соответствует угол $(0,01 + 5 \cdot 10^{-5})^\circ$). По оси ординат отложены сечения (3.16) в единицах см. Сечения вычислялись при $\chi = 0$ (сплошная кривая), $\chi = 1/2$ (прерывистая кривая) и $\chi = 0,25$ (пунктир). Отчетливо виден сдвиг дифракционной картины при включении магнитного поля. Для большей наглядности мы представили на верхней части рисунка 9 положения максимумов сечения и их величину. Сами максимумы показаны вертикальными отрезками, длины которых совпадают с величиной сечения в максимуме. Сплошным отрезкам соответствует $\chi = 0$, прерывистым - $\chi = 0,5$.

4.3. Обратимся теперь к рассеянию электронов на тороидальном соленоиде. Поскольку в реальных экспериментах (которые обсуждаются ниже) $Kd \gg 1$ и $KR \gg 1$, то в сечениях (2.10), (3.18), (3.20) при углах рассеяния не слишком малых функции Бесселя можно заменить их асимптотическими выражениями:

$$\tilde{J}_0^T = \frac{1}{8\sqrt{\pi K}} \cdot \left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \cdot \left\{ \sqrt{d+R} \cdot \sin \left[k(d+R) \sin \theta - \frac{\pi}{4} \right] - \right. \quad (4.4)$$

$$\left. - \sqrt{d-R} \cdot \sin \left[k(d-R) \sin \theta - \frac{\pi}{4} \right] \right\}^2,$$

$$\tilde{J}_{1/2}^T = \frac{1}{8\sqrt{\pi K}} \cdot \left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \cdot \left\{ \sqrt{d+R} \cdot \sin \left[k(d+R) \sin \theta - \frac{\pi}{4} \right] + \right. \quad (4.5)$$

$$\left. + \sqrt{d-R} \cdot \sin \left[k(d-R) \sin \theta - \frac{\pi}{4} \right] \right\}^2.$$

Если $R \ll d$, то можно пренебречь R под знаком квадратного корня (но не под знаком синуса, поскольку $KR \gg 1$):

$$\tilde{J}_0^T = \frac{d}{2\sqrt{\pi K}} \cdot \left[\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \cdot \sin(KR \sin \theta) \cdot \cos \left(kd \sin \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right]^2, \quad (4.6)$$

$$\tilde{J}_{1/2}^T = \frac{d}{2\sqrt{\pi K}} \cdot \left[\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \cdot \cos(KR \sin \theta) \cdot \sin \left(kd \sin \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right]^2. \quad (4.7)$$

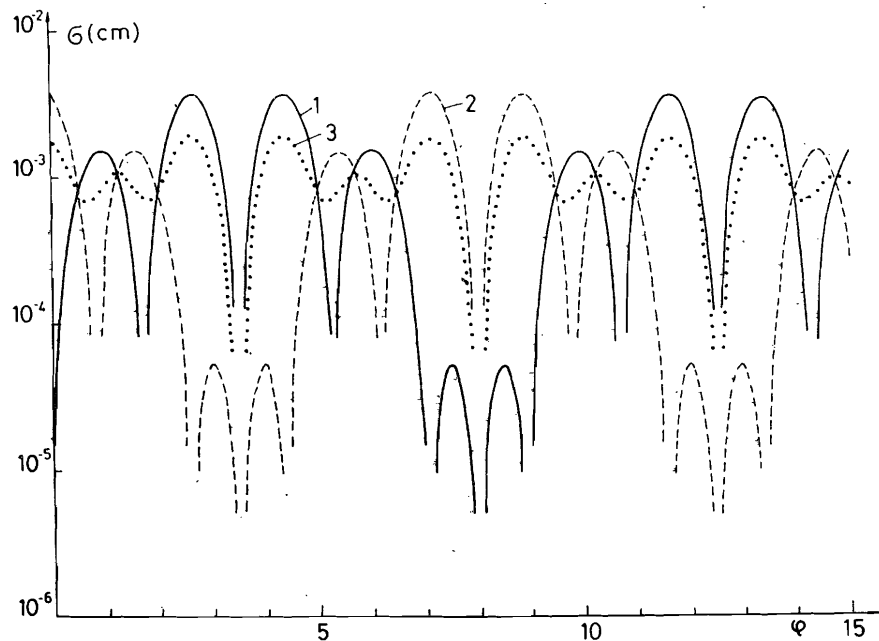


Рис. 8. Угловая зависимость сечения рассеяния электронов на двух соленоидах с $\Phi_1 = -\Phi_2$. Нулю на оси абсцисс соответствует угол $\varphi = 0,01^\circ$. Цена одного деления оси абсцисс соответствует 10^{-5}° (например, цифре 5 соответствует угол $(0,01 + 5 \cdot 10^{-5})^\circ$). По оси отложено сечение в см^{-1} . В рамках френгоферовской теории дифракции сплошная кривая отвечает значению $\chi = 0$, прерывистая — $\chi = 0,5$, пунктирная — $\chi = 0,25$. Ситуация радикально меняется при использовании адекватной френелевской теории. Если ρ (расстояние от начала координат до места регистрации, рис. 1) равно 106,1, то френелевская теория дифракции в точности воспроизводит результаты френгоферовской теории с теми же значениями χ . При $\rho = 91$ кривая 1 соответствует $\chi = 0,5$, кривая 2 — $\chi = 0$, кривая 3 — $\chi = 0,25$. При $\rho = 98$ значениям $\chi = 0$ и $\chi = 0,5$ соответствует одна и та же кривая 3.

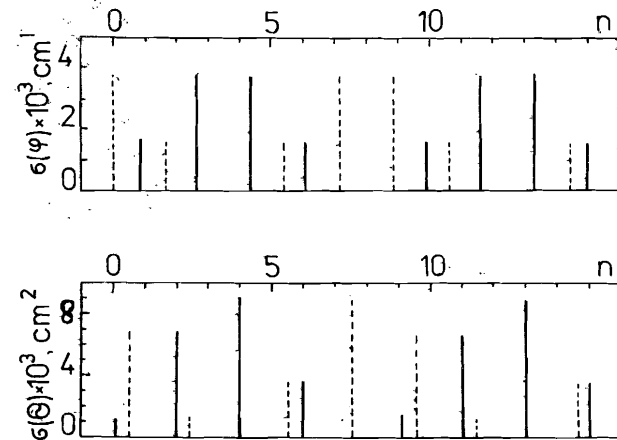


Рис. 9. Положения и величины максимумов сечений на двух цилиндрах с $\Phi_1 = -\Phi_2$ (верхняя часть рисунка) и на тороидальном соленоиде (нижняя часть). Сплошные вертикальные отрезки соответствуют $\chi = 0$, прерывистые — $\chi = 0,5$. Показаны только те максимумы, величины которых превосходят 10^{-3} .

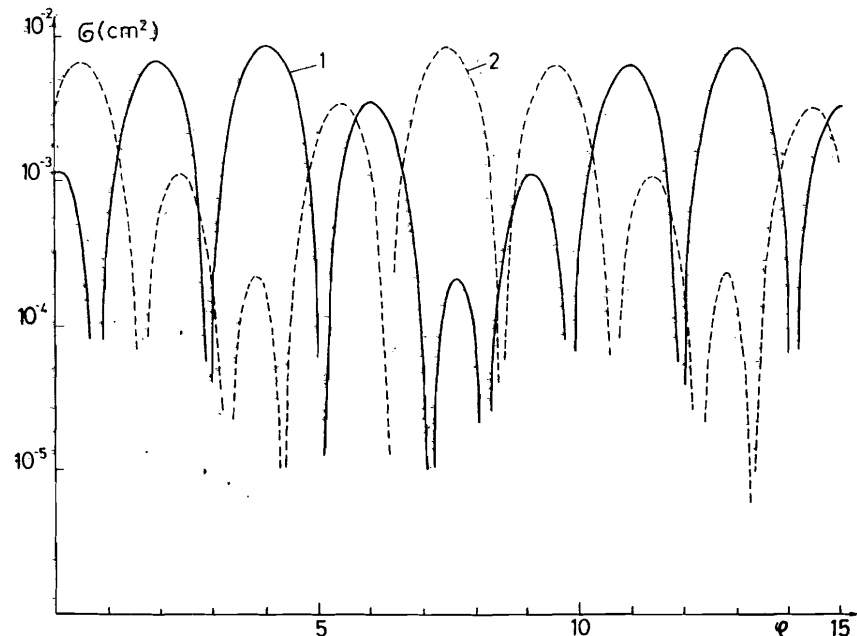


Рис. 10. Угловые сечения рассеяния электронов на тороидальном соленоиде, вычисленные в рамках френгоферовской теории дифракции. Сплошная кривая $\chi = 0$, прерывистая — $\chi = 0,5$. Масштаб по оси абсцисс тот же, что и на рис. 8.

Как и для двух цилиндров с $\Phi_1 = -\Phi_2$, имеем два семейства нулей сечения рассеяния:

$$\Theta_n^{(R)} = \frac{n\pi}{kR}, \quad \Theta_n^{(d)} = \frac{n-1/4}{kd} \pi \quad (\chi = 0), \quad (4.8)$$

$$\Theta_n^{(R)} = \frac{n-1/2}{kR} \pi, \quad \Theta_n^{(d)} = \frac{n+1/4}{kd} \pi \quad (\chi = 1/2). \quad (4.9)$$

В итоге при включении магнитного поля нули первого семейства сдвигаются на $\Delta\theta_R = \pi/2kR$, а второго - на $\Delta\theta_d = \pi/2kd$. Известные эксперименты Тономуры /II/ были выполнены при следующих условиях: E (энергия электронов) ≈ 150 кэВ, $R = 10^{-4}$ см, $d = 4 \cdot 10^{-4}$ см. Тогда $k = 2 \cdot 10^{10}$ см $^{-1}$; $kR \approx 2 \cdot 10^6$, $kd \approx 8 \cdot 10^6$. Это дает $\Delta\theta_R \approx 8 \cdot 10^{-7}$, $\Delta\theta_d \approx 2 \cdot 10^{-7}$. В обсуждаемых экспериментах наблюдался сдвиг интерференционной картины в плоскости, перпендикулярной волновому вектору падающей волны (то есть в плоскости $z = \cos\theta t$). К сожалению, авторы /II/ не указывают расстояния от объекта рассеяния (тороидального соленоида) до места регистрации. Исходя из имеющегося в этой работе рисунка установки, примем это расстояние z равным 1 м. Тогда имеем для сдвига уровней первого семейства $\Delta z_R = z \cdot \Delta\theta_R \approx 0,8$ мкм, а для второго $\Delta z_d = z \cdot \Delta\theta_d \approx 0,2$ мкм. Примерно такие сдвиги наблюдались в интерферограммах, приведенных в /II/. Типичная угловая зависимость сечения показана на рис. 10. Сечения вычислялись при параметрах опыта Тономуры. Началу координат соответствует угол $\vartheta = 0,01^\circ$, шаг по оси абсцисс равен 10^{-5} . По оси ординат отложены сечения в см 2 , вычисленные по формулам (2.10), (3.20). Сплошная кривая соответствует $\chi = 0$; прерывистая $\chi = 0,5$. Как и для рассеяния на двух цилиндрах, отчетливо виден сдвиг дифракционной картины при включении магнитного поля. Для большей наглядности на нижней части рис. 9 представлены положения максимумов и величины сечений в них.

4.4. Представление рассеянной волны в виде произведения расходящейся волны $(\exp(ik\rho)/\sqrt{\rho})$ - для двумерного случая и $\exp(ikz)/z$ - для трехмерного) и функции, зависящей только от углов, имеет место только на достаточно больших удалениях от рассеивателя. При этом наряду с условиями $kR \gg 1$ и $\frac{R}{z} \ll 1$ (которые мы всегда считаем справедливыми) должны выполняться условия $\frac{kR^2}{z} \ll \pi$ (для одного цилиндрического соленоида) и $\frac{k d R^2}{z} \ll \pi$ (для двух цилиндрических соленоидов с $\Phi_1 = -\Phi_2$ и для тороидального соленоида). В оптике рассеяние света при таких условиях называется дифракцией Фраунгофера /16/. В выполненных экспериментах на одном цилиндрическом соленоиде /16/ имеем $\frac{kR^2}{z} \approx 5$. Как мы уже упоминали, в работах Тономуры /II/ не приводится расстояние от тороидального соленоида до места регистрации. Для

определенности примем его равным, как и выше, 1 м. Тогда $\frac{k d R^2}{z} \approx 8$. Ввиду этого полученные в п. 4.2 выводы о величине сдвига интерференционной картины носят качественный характер. Поскольку величина $\frac{k d R^2}{z}$ не мала по сравнению с π , то в волновой функции должен быть учтен вклад этих членов. На оптическом языке это соответствует дифракции Френеля /16/. Члены более высокого порядка ($\frac{kR^2}{z} \approx 3 \cdot 10^{-5}$ для одного соленоида и $\frac{k d R^2}{z} \approx 8 \cdot 10^{-6}$ для двух соленоидов с $\Phi_1 = -\Phi_2$ и для тороидального соленоида) малы, и ими можно пренебречь. Покажем, как меняются сечения рассеяния, на примере двух цилиндров с $\Phi_1 = -\Phi_2$. При выполнении условий $kd \gg 1$, $\rho \gg d$, $\frac{k d R^2}{\rho} \ll 1$ волновая функция, соответствующая рис. I, равна

$$\psi_\chi = \exp(ikx) + \psi_\chi, \quad (4.10)$$

$$\psi_\chi = -\frac{1}{2\sqrt{i}} \frac{1 + \cos\vartheta}{\cos\vartheta} \cdot \exp[ik\rho(1 - \frac{1}{2}t\vartheta^2)] \cdot (A + iB),$$

$$A = C_1 + C_3 - \cos 2\pi\chi \cdot (C_2 + C_4) + \sin 2\pi\chi \cdot (S_2 + S_4), \quad (4.11)$$

$$B = S_1 + S_3 - \cos 2\pi\chi \cdot (S_2 + S_4) - \sin 2\pi\chi \cdot (C_2 + C_4).$$

Здесь $C_i = C(\rho_i)$, $S_i = S(\rho_i)$; $C(\alpha)$ и $S(\alpha)$ - обычные интегралы Френеля;

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \left(\frac{d+R}{\rho} \cos\vartheta + t\vartheta \right), \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \left(\frac{d-R}{\rho} \cos\vartheta + t\vartheta \right),$$

$$\rho_3 = \sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \left(\frac{d+R}{\rho} \cos\vartheta - t\vartheta \right), \quad \rho_4 = \sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \left(\frac{d-R}{\rho} \cos\vartheta - t\vartheta \right).$$

При $|t\vartheta| \gg \frac{d+R}{\rho}$ выражение (4.11) упрощается:

$$\psi_\chi = \frac{\exp(ik\rho)}{\sqrt{\rho}} \cdot f_\chi(\rho, \vartheta), \quad f_\chi(\rho, \vartheta) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi i k}} \frac{1 + \cos\vartheta}{\sin\vartheta} \times \quad (4.12)$$

$$\times \left\{ \exp[ik \frac{(d+R)^2}{2\rho} \cos^2\vartheta] \cdot \sin[k(d+R)\sin\vartheta] - \exp[2i\pi\chi] \cdot \exp[ik \frac{(d-R)^2}{2\rho} \cos^2\vartheta] \cdot \sin[k(d-R)\sin\vartheta] \right\}.$$

Если детектор находится вне падающего пучка (D_1 , рис. II), то $|f_\chi|^2$ (с точностью до членов порядка $(d+R/\rho)^2$) совпадает с дифференциальным потоком через цилиндрическую поверхность радиуса ρ и является аналогом дифференциального сечения для конечных значений ρ :

$$\sigma_\chi^{2c}(\rho, \vartheta) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 + \cos\vartheta}{\sin\vartheta} \right)^2 \cdot [\sin^2(kd \sin\vartheta) \cos^2(kR \sin\vartheta) \times \quad (4.13)$$

$$\times \sin^2\left(\frac{k d R}{\rho} \cos^2\vartheta - \pi\chi\right) + \sin^2(kR \sin\vartheta) \cdot \cos^2(kd \sin\vartheta) \cdot \cos^2\left(\frac{k d R}{\rho} \cos^2\vartheta - \pi\chi\right)].$$

Очевидно, при $\rho \rightarrow \infty$ френелевское сечение (4.13) переходит в фраунгоферовское (3.16). Нас особо будут интересовать случаи $\chi = 0$ и $\chi = 1/2$.

$$\tilde{\sigma}_0^{2c} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{1 + \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right)^2 \cdot \left[\sin^2(kd \sin \vartheta) \cdot \cos^2(kR \sin \vartheta) \cdot \sin^2\left(\frac{kdR}{\rho} \cos^2 \vartheta\right) + \sin^2(kR \sin \vartheta) \cdot \cos^2(kd \sin \vartheta) \cdot \cos^2\left(\frac{kdR}{\rho} \cos^2 \vartheta\right) \right], \quad (4.14)$$

$$\tilde{\sigma}_{1/2}^{2c} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{1 + \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right)^2 \left[\sin^2(kd \sin \vartheta) \cdot \cos^2(kR \sin \vartheta) \cdot \cos^2\left(\frac{kdR}{\rho} \cos^2 \vartheta\right) + \sin^2(kR \sin \vartheta) \cdot \cos^2(kd \sin \vartheta) \cdot \sin^2\left(\frac{kdR}{\rho} \cos^2 \vartheta\right) \right]. \quad (4.15)$$

4.5. Остановимся вкратце на осложнениях, которые возникают, если опыты по рассеянию электронов на соленоидах интерпретировать с помощью выражений (2.9), (2.10), (3.19), (3.20), в которых не учитывается конечность расстояния от рассеивателя до места наблюдения. В качестве иллюстрации рассмотрим опять-таки рассеяние электронов на двух соленоидах с противоположными магнитными потоками. Обычно в эксперименте рассматривается небольшое число дифракционных максимумов и наблюдается их смещение при различных напряженностях магнитного поля внутри соленоидов. Пусть число наблюдаемых дифракционных полос, для определенности, равно 10. Если параметры K , R и d те же, что и в опытах Тономуры с тороидальным соленоидом, то десять максимумов занимают интервал углов (см. (4.2) и (4.3)), примерно равный $10 \cdot \frac{\pi}{kd} \approx 2 \cdot 10^{-6}$. Далее, пусть ϑ_0 — угол, в окрестности которого проводится наблюдение рассеянных частиц. Поскольку kdR/ρ (при $\rho = 1 \mu$) примерно равно 8, то в выражении (4.13) в $\sin\left(\frac{kdR}{\rho} \cos^2 \vartheta - \pi \chi\right)$ и $\cos\left(\frac{kdR}{\rho} \cos^2 \vartheta - \pi \chi\right)$ угол ϑ можно с хорошей точностью заменить на ϑ_0 . Этого нельзя сделать в $kR \sin \vartheta$ и $kd \sin \vartheta$, поскольку (ввиду $kR \gg 1$ и $kd \gg 1$) они существенно меняются на интервале $10 \pi/kd$. Тогда вместо (4.13) имеем

$$\tilde{\sigma}_\chi^{2c} = \frac{2}{\pi k} \cdot \left(\frac{1 + \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right)^2 \cdot \left[\sin^2(kd \sin \vartheta) \cdot \cos^2(kR \sin \vartheta) \cdot \sin^2\left(\frac{kdR}{\rho} \cos^2 \vartheta_0 - \pi \chi\right) + \sin^2(kR \sin \vartheta) \cdot \cos^2(kd \sin \vartheta) \cdot \cos^2\left(\frac{kdR}{\rho} \cos^2 \vartheta_0 - \pi \chi\right) \right]. \quad (4.16)$$

Рассмотрим выражение (4.16) при $\chi = 0$ и $\chi = 1/2$:

$$\tilde{\sigma}_0^{2c} = \frac{2}{\pi k} \cdot \left(\frac{1 + \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right)^2 \cdot \left[\sin^2(kd \sin \vartheta) \cdot \cos^2(kR \sin \vartheta) \cdot \sin^2\left(\frac{kdR}{\rho} \cos^2 \vartheta_0\right) + \sin^2(kR \sin \vartheta) \cdot \cos^2(kd \sin \vartheta) \cdot \cos^2\left(\frac{kdR}{\rho} \cos^2 \vartheta_0\right) \right], \quad (4.17)$$

$$\tilde{\sigma}_{1/2}^{2c} = \frac{2}{\pi k} \cdot \left(\frac{1 + \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right)^2 \cdot \left[\sin^2(kd \sin \vartheta) \cdot \cos^2(kR \sin \vartheta) \cdot \cos^2\left(\frac{kdR}{\rho} \cos^2 \vartheta_0\right) + \sin^2(kR \sin \vartheta) \cdot \cos^2(kd \sin \vartheta) \cdot \sin^2\left(\frac{kdR}{\rho} \cos^2 \vartheta_0\right) \right]. \quad (4.18)$$

Пусть $\frac{kdR}{\rho} \cos^2 \vartheta_0$ кратно π . Тогда $\tilde{\sigma}_0^{2c} = \tilde{\sigma}_0^{2c}$, $\tilde{\sigma}_{1/2}^{2c} = \tilde{\sigma}_{1/2}^{2c}$. В этом случае находящийся на конечном расстоянии наблюдатель, пользуясь выражениями (2.9) и (3.19), правильно опишет положения максимумов и минимумов сечения при наличии и отсутствии магнитного поля. Пусть теперь $\frac{kdR}{\rho} \cos^2 \vartheta_0$ кратно $\pi/2$ (точнее, равно $(n + \frac{1}{2})\pi$). Тогда $\tilde{\sigma}_0^{2c} = \tilde{\sigma}_{1/2}^{2c}$, $\tilde{\sigma}_{1/2}^{2c} = \tilde{\sigma}_0^{2c}$. Поэтому наблюдатель, поместив детектор при ρ , ϑ_0 , измерив сечение при $\chi = 1/2$ и сверив его с теоретически предсказанными (2.9) и (3.19), заключит, что при наличии магнитного потока с $\chi = 1/2$ в соленоидах измеренное им сечение совпадает с теоретическим $\tilde{\sigma}_0^{2c}$, которое соответствует отсутствию магнитного поля. Отсюда он может сделать вывод, что наличие магнитного поля в недоступных для частиц областях пространства не оказывает влияние на рассеяние, и придет к выводу об отсутствии АБ-эффекта. Могут возразить, что экспериментатор не будет пользоваться теоретическими сечениями (2.9) и (3.19), а просто измерит дифракционную картину при $\chi = 0$ и $\chi = 1/2$ и по ее сдвигу будет судить о существовании АБ-эффекта. В самом деле, при $\frac{kdR}{\rho} \cos^2 \vartheta_0$ целом или полуцелом сдвиг дифракционной картины правильно воспроизводится френелевской теорией. Однако пусть $\rho \approx \rho_0$ и $\vartheta \approx \vartheta_0$ в (4.17) и (4.18) таковы, что $\frac{kdR}{\rho} \cos^2 \vartheta_0 = (n + \frac{1}{2})\pi$. Тогда $\tilde{\sigma}_0^{2c} = \tilde{\sigma}_{1/2}^{2c}$. Это означает, что наблюдатель, поместивший детектор при $\rho = \rho_0$ и $\vartheta = \vartheta_0$, увидит одну и ту же дифракционную картину при $\chi = 0$ и $\chi = 1/2$. Из этого факта он сделает вывод об отсутствии АБ-эффекта. Вернемся к кривым рис.8. Мы уже упоминали, что они отвечают дифракции Фраунгофера, которая только качественно описывает экспериментальную ситуацию. Пользуясь френелевской теорией дифракции и выбирая $\rho_0 = 106,1$, $\vartheta_0 = 0,01^\circ$ (при этом величина $\frac{kdR}{\rho_0} \cos^2 \vartheta_0$ равна целому числу), мы в точности воспроизведем результаты френелевской теории дифракции, причем кривым 1, 2, 3 соответствуют значения $\chi = 0; 0,5$ и $0,25$. При $\rho_0 = 91$ ($\frac{kdR}{\rho_0} \cos^2 \vartheta_0$ — полуцелое) кривая 1 соответствует $\chi = \frac{1}{2}$, кривая 2 — $\chi = 0$, кривая 3 по-прежнему соответствует $\chi = 0,25$. При $\rho_0 = 98$ значениям $\chi = 0$ и $\chi = 0,5$ соответствует одна и та же кривая 3.

В итоге мы призываем к осторожности при интерпретации результатов экспериментов по рассеянию электронов на соленоидах. Может случиться, что два различных экспериментатора, поместив свои регистрирующие

установки на разных удалениях от соленоида, придут к противоположным выводам о существовании АБ-эффекта (один зафиксирует сдвиг дифракционной картины, а второй - нет). В случае рассеяния на двух соленоидах второй наблюдатель должен сдвинуться в радиальном направлении на величину $\Delta p = p_0 \left(1 + \frac{4dR \cos^2 \varphi_0}{8R^2} \right)^{-1}$ для получения правильной величины дифракционного сдвига при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$.

4.6. Посмотрим, что увидит наблюдатель при малых углах рассеяния. Поскольку детектор (D_2 , рис. II) находится в прямом пучке, сечение уже не равно квадрату абсолютной величины коэффициента при расходящейся волне. В соответствии с правилами квантовой механики оно пропорционально радиальной компоненте тока вероятности:

$$\vec{c} = \frac{m_p}{\hbar k} \vec{j}_p, \quad \vec{j} = \frac{\hbar}{2im} (\bar{\Psi} \nabla \Psi - \Psi \nabla \bar{\Psi}) - \frac{e}{mc} \vec{A} \bar{\Psi} \Psi. \quad (4.19)$$

Подставляя сюда волновую функцию Ψ , определенную соотношением (4.10), и отбрасывая малые по сравнению с kR члены (при условии, что они не стоят под знаком экспоненты) получаем в интересующей нас области углов ($0 \leq \varphi \leq \frac{d-R}{p}$)

$$\vec{c} = p \left[\cos \varphi + \frac{1}{8} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\cos \varphi} \right)^2 (A^2 + B^2) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(1 + \cos \varphi)^2}{\cos \varphi} (A \cos \Delta + B \sin \Delta) \right] - \frac{e p}{\hbar k c} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\cos \varphi} \right)^2 (A^2 + B^2) - \frac{1 + \cos \varphi}{\sqrt{2} \cos \varphi} (A \cos \Delta + B \sin \Delta) \right] A p. \quad (4.20)$$

Здесь A и B определены соотношениями (4.11):

$$\Delta = k p (\cos \varphi - 1 + \frac{1}{2} k^2 d^2) + \frac{\pi}{4}.$$

При малых φ величина $\cos \varphi - 1 + \frac{1}{2} k^2 d^2$ примерно равна $\frac{d}{2k} \varphi^2$. Беря для φ максимальное значение $\varphi_0 = (d-R)/p$, получаем $k p (\cos \varphi - 1 + \frac{1}{2} k^2 d^2) \leq 3 \cdot 10^{-11}$. Поэтому можно положить $\Delta = \frac{\pi}{4}$. Оценим вклад в сечение рассеяния части тока вероятности, пропорциональной вектор-потенциалу \vec{A} . Для двух соленоидов с $\Phi_1 = -\Phi_2 = \Phi$, с осями, проходящими через точки $y = \pm d$ (рис. II), радиальная компонента вектор-потенциала равна

$$A_p = \frac{\Phi d \cos \varphi}{\pi (p^2 + d^2)} \left[1 - \frac{4p^2 d^2}{(p^2 + d^2)^2} \sin^2 \varphi \right]^{-1}.$$

Поскольку $p \gg d$, то $A_p \approx \frac{\Phi d \cos \varphi}{\pi p^2}$ и $\frac{e p}{\hbar k c} A_p \approx p \frac{e \Phi}{\hbar c} \frac{2d}{k p^2} \approx \frac{p e \Phi}{\hbar c} \cdot 5 \cdot 10^{-18}$. Возьмем для $e \Phi / \hbar c$ то же значение, что и в опытах Тономури ($e \Phi / \hbar c \approx 5$). Тогда вкладом вектор-потенциала в сечение рассеяния можно пренебречь. В результате \vec{c} и $|\Psi|^2$ оказываются пропорциональными:

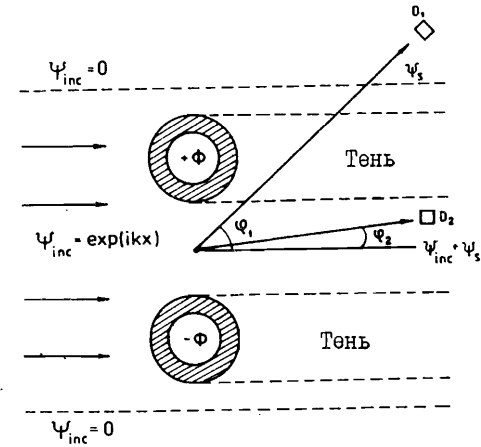


Рис. II. Измерение дифракционных сечений с помощью детекторов, находящихся в разных физических условиях.

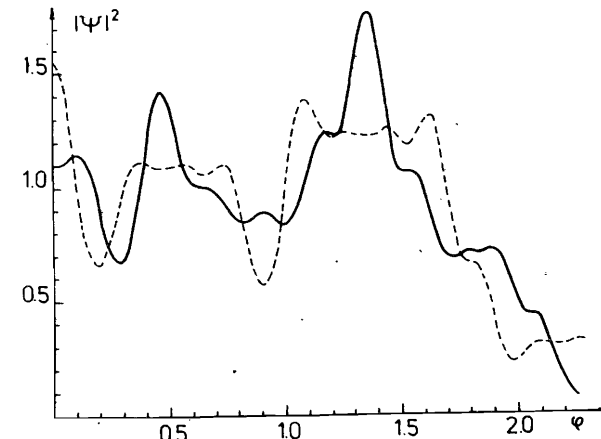


Рис. I2. Плотность вероятности волновой функции для рассеяния электронов на двух соленоидах с $\Phi_1 = -\Phi_2$ в рамках френелевской теории дифракции. Расстояние $p = 106,1$. Сплошная кривая $\gamma = 0$, прерывистая $\gamma = 0,5$. По оси абсцисс отложен угол рассеяния в 10^{-40} .

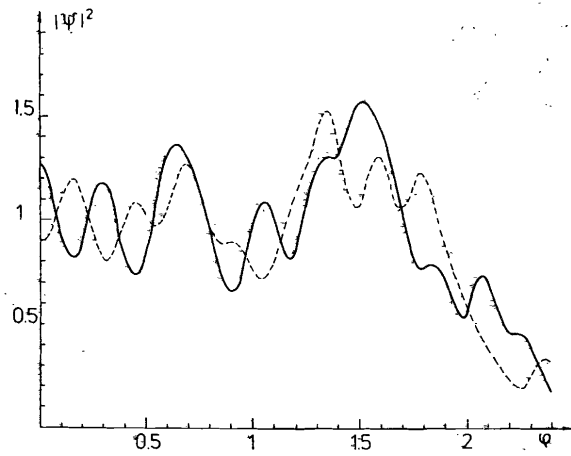


Рис. 13. То же, что на рис. 12, но при $\rho = 98$.

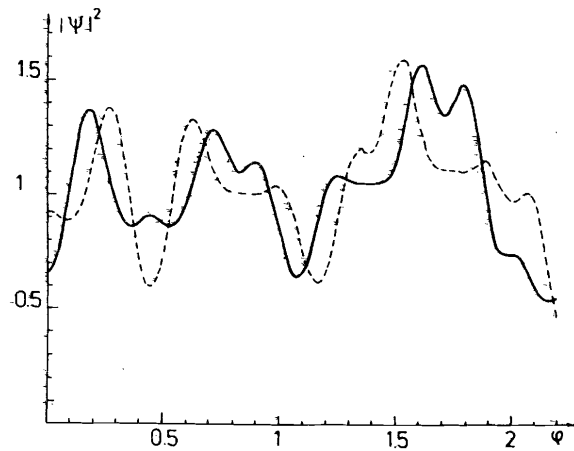


Рис. 14. То же, что на рис. 12, но при $\rho = 91$.

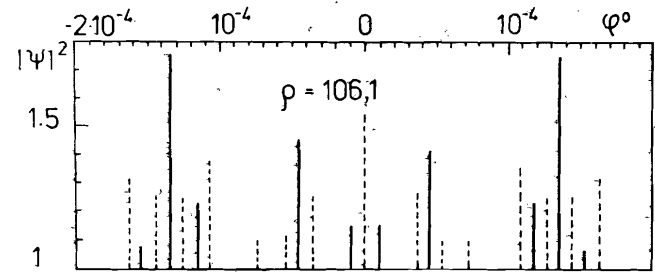
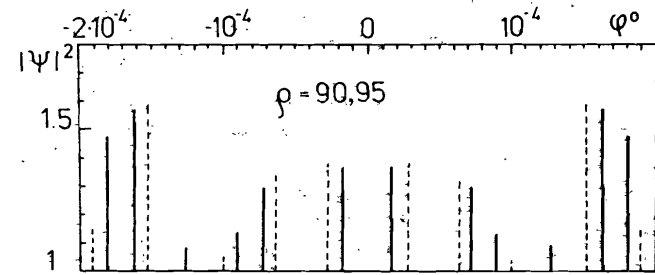
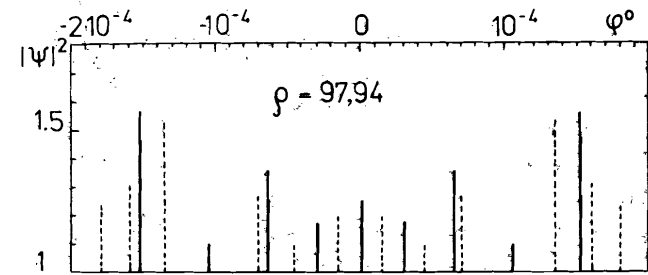


Рис. 15. Положения и величины максимумов $|\psi|^2$. Условия те же, что и на рис. 12-14. Показаны только те максимумы, величины которых превышают 1.

$$\delta = \rho |\Psi|^2,$$

$$|\Psi|^2 = 1 + \frac{1}{2} (A^2 + B^2) - A - B. \quad (4.21)$$

На рис. 12-14 показана зависимость $|\Psi|^2$ от угла рассеяния для углов, лежащих между соленоидами ($-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$, $\varphi_0 = \frac{d-R}{\rho}$) при трех значениях ρ (106, 91; 98; 91). Мы замечаем, что отсутствуют упомянутые в п. 4.5 осложнения, связанные с неопределенностью в интерпретации сдвига дифракционной картины при $\gamma = 0$ и $\gamma = 0,5$ (во всяком случае, для рассматриваемых значений ρ). Далее отклонения $|\Psi|^2$ от плосковолнового значения (равного 1) достигают 70% и могут быть наблюдаемы экспериментально. Достаточно велики и отличия $|\Psi|^2$ при $\gamma = 0$ и $\gamma = 0,5$. Спад $|\Psi|^2$ при $|\varphi| > 2 \cdot 10^{-4}$ связан с приближением к области тени. На рис. 15 ради наглядности мы приводим положения и величины максимумов $|\Psi|^2$ в области между соленоидами. Сплошным кривым соответствует $\gamma = 0$, прерывистым — $\gamma = 0,5$. Приведены только те максимумы, величины которых превышают 1.

Мы заключаем: угловая область, лежащая между соленоидами, является наиболее перспективной для количественного подтверждения АБ-эффекта. В этой области отличия сечений при $\gamma = 0$ и $\gamma = 0,5$ достаточно велики и могут быть проведены экспериментально. При получении сечения (4.20) мы предполагали, что при нахождении детектора в прямом пучке невозможно отличить рассеянные частицы от частиц падающего потока. Если же детектор регистрирует только рассеянные частицы, то в (4.19) вместо полной волновой функции Ψ следует подставить Ψ_s (см. (4.10), (4.11)). Тогда при тех же экспериментальных условиях имеем при $\varphi < \frac{d-R}{\rho}$

$$\delta_s = \frac{\rho}{8} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\cos \varphi} \right)^2 (A^2 + B^2) \cdot \left(1 - \frac{\rho}{hck} A_p \right).$$

§ 5. Обсуждение

Мы бы хотели здесь указать на настоятельную необходимость количественной проверки АБ-эффекта (который мы понимаем как наблюдаемый эффект недоступных для частиц полей). Дело в том, что существуют альтернативные объяснения сдвига интерференционной картины при включении магнитного поля (см., например, /24, 25/ и особенно оживленную дискуссию (с. 307-312) после доклада Матеучи и Поци (с. 297-306) в /26/). Эти объяснения носят качественный характер. Поэтому экспериментальное подтверждение возможно более точных расче-

тов сдвигов дифракционной картины при включении магнитного поля явилось бы веским аргументом в пользу физической природы вектор-потенциала (крайне невероятно, чтобы различные качественные интерпретации АБ-эффекта приводили к одному и тому же количественному результату). Следующие эксперименты могут, на наш взгляд, устранить упомянутые сомнения в существовании АБ-эффекта:

1) эксперименты по рассеянию электронов на цилиндрических и тороидальных соленоидах для конфигураций начального волнового вектора, соленоидов и детекторов, показанных на рис. 3-5. В отсутствие магнитного поля детекторы \mathcal{D} , \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 должны регистрировать частицы за счет использования электростатических бипризм даже при очень больших значениях kR и kd (которые реализуются в эксперименте). При $\gamma = \frac{e\Phi}{hc} = \frac{1}{2}$ скорость счета детекторов \mathcal{D} и \mathcal{D}_1 должна резко уменьшиться, тогда как скорость счета детекторов \mathcal{D}_2 должна остаться примерно той же, что и в отсутствие магнитного поля;

2) рассеяние электронов на двух цилиндрических соленоидах с противоположными магнитными потоками при конфигурации начального волнового вектора, соленоидов и детекторов, показанных на рис. 11. Существенно, что имеются достаточно точные расчетные формулы для сечений (§ 4.5, 4.6), которые позволяют описать дифракционную картину при наличии и отсутствии магнитного поля при реалистических размерах экспериментальной установки;

3) рассеяние электронов на тороидальном соленоиде. К сожалению, прекрасные эксперименты Тономуры /11/ только качественно могут быть описаны формулами (2.10), (3.18), (3.20) френелевской теории дифракции. Оценим расстояния, на которых начинают работать формулы френелевской теории дифракции. Если мы удовлетворимся значением параметра $\frac{kdR}{\rho}$, равным 0,1, то при k , d , R тех же, что и в опытах Тономуры ($k = 2 \cdot 10^{10}$ см⁻¹, $R = 10^{-4}$ см, $d = 4 \cdot 10^{-4}$ см), получаем $\rho = 80$ м. Такие размеры нереальны как из-за размеров установки, так и из-за ослабления интенсивности рассеянных частиц. Как мы уже упоминали, адекватной для описания этих экспериментов является френелевская теория дифракции. Мы не сумели, однако, получить в ее рамках замкнутые выражения для сечений рассеяния на тороидальном соленоиде.

§ 6. Заключение

Кратко подытожим основные результаты данной работы:

I. В рамках френелевской теории дифракции получены сечения для рассеяния электронов на двух соленоидах с противоположными магнитными потоками и на тороидальном соленоиде; найден сдвиг дифракционной картины за счет магнитного поля.

2. Численно исследуется предложенный ранее критический эксперимент по проверке существования АБ-эффекта; доказана реальность его постановки.

3. Френелевская теория дифракции применяется к рассеянию электронов на двух соленоидах с противоположными магнитными потоками. Именно она оказывается адекватной для описания экспериментов в реальных условиях. В ее рамках вычисляется сдвиг дифракционной картины при включении магнитного поля. Даны конкретные рекомендации по реализации экспериментов. Насколько мы знаем, представленные в данной работе конкретные расчеты следствий существования АБ-эффекта являются первыми в физической литературе.

Литература

- I. Bawin M. and Burnel A. J. Phys., 1985, A18, 2125.
2. Proc. Int. Symp. on Foundations of Quantum Mechanics in the Light New Technology (ed Kamefuchi S.), 1984, Tokyo, Japan Phys. Soc.
3. Proc. 2nd Int. Symp. on Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology (eds. Namiki M. et al.), 1987, Tokyo, Japan Phys. Soc.
4. Lolinger A. Riv. Nuovo Cim., 1987, 10, I.
5. Round Table on Aharonov-Bohm effect. In Fundamental Aspects of Quantum Theory (eds. Gorini V. and Frigerio A.), 1986, New York, Plenum Press.
6. Missiroli G.F., Pozzi G. and Valdre U. J. Phys., 1981, E14, 649, and references therein; Mollenstedt G., Schmid M. and Lichte H. In: Proc. Int. Congress on Electron Microscopy Hamburg, v. I, p. 433, 1982 (Frankfurt, Deutsche Gesellschaft für Elektronentheorie E.V.).
7. Roy S.M. Phys. Rev. Lett., 1980, 44, III.
8. Kobe D.H. and Liang J.Q. Phys. Rev., 1988, A37, II33.
9. Aharonov Y. and Bohm O. Phys. Rev., 1959, II5, 485.
10. Liang J.Q. Nuovo Cimento, 1986, B92, I67; Liang J.Q. and Ding X.X. Phys. Lett., 1987, A119, 325, Kobe D.M. and Liang J.Q. Phys. Lett., 1986, A118, 475.
11. Tonomura A., Umezaki H., Matsuda T., Osakabe N., Endo J. and Sugita Y. ref ^{12/}, p. 20-28.
Tonomura A., Yano S., Osakabe N., Matsuda T., Yamada H., Kawasaki T. and Endo J. Phys. Rev., 1986, A34, 815,
See also the same authors paper in ^{13/}, p. 97-105.

12. Morandi G. and Menossi E., Eur. J. Phys., 1984, 5, 49; Liang J.Q. and Ding X.X. Phys. Rev., 1987, A36, 4149; Schulman L. J. Math. Phys., 1971, I2, 304; Inomata A. ref. ^{13/}, p. 132-139.
13. Любошиц В.Л., Смородинский Я.А. ОИЯИ, P2-III89, Дубна, 1978; ЖЭТФ, 1978, 75, 40.
14. Afanasiev G.N. J. Phys., 1988, A21, 2095.
15. Афанасьев Г.Н. ОИЯИ, P2-88-282, Дубна, 1988.
16. Зоммерфельд А. Оптика, 1953, М., ИЛ.
Bowcamp C.J. Rep. Progr. Phys., 1954, I7, 35.
17. Silver S. J. Opt. Soc. Amer., 1962, 52, I31.
18. Takabajasi T. Hadr. J. Suppl., 1985, I, 219.
19. Peshkin M., Tassie Y., and Talmi J. Ann. Phys. (N.Y.), 1961, I2, 426.
20. Tassie L.J. Phys. Lett., 1962, 5, 43.
21. Афанасьев Г.Н. Вопросы атомной науки и техники, сер. общая и ядерная физика, 1988, I, 49.
Afanasiev G.N. Nuovo Cimento, 1988, A99, 647.
22. Dirac P.A.M. Proc. Roy. Soc., 1931, A I33, 60; see also Berry M.V. Eur. J. Phys., 1980, I, 240.
23. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики, 1979, М., Наука.
24. Boyer T.H. Nuovo Cimento, 1987, B100, 685.
25. Comay E. Fizika, 1988, 20, 241.
26. Quantum Uncertainties, Recent and Future Experiments and Interpretations (eds. Honig W.M., Kraft D.W. and Panarella E.), 1987, New York, Plenum Press.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 декабря 1988 года.