сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P4-88-634 e

И.М.Франк

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОМЕНТА МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ

1988

Вопрос о релятивистском преобразовании момента магнитного диполя, движущегося в среде, возник очень давно. Поводом для этого послужило рассмотрение излучения Вавилова-Черенкова электрических и магнитных диполей /1/. Для электрического диполя получился результат, вполне аналогичный тому, что имеет место для излучения электрического заряда: энергия излучения - функция квадрата синуса характерного угла излучения $\theta\left(\sin^2\theta = 1-\frac{1}{\beta^2\cdot n^2}\right)$. В отличие от этого для магнитного диполя, ориентированного перпендикулярно направлению скорости, энергия довольно сложным образом зависит от показателя преломления n и от θ. При получении этих результатов использовались формулы релятивистской трансформации моментов электрических и магнитных диполей, причем допускалось, что они применимы и при движении в среде с показателем преломления n. Таким образом, принималось, что электрический диполь p', движущийся со скоростью β = v/c, в неподвижной системе координат имеет момент

$$\vec{p} = \vec{p}\,' - (1-\alpha)\cdot(\vec{p}\,'\cdot\vec{z}_1)\cdot\vec{z}_1 \ , \qquad (1)$$

где $\alpha = \sqrt{1-\beta^2}$, а $\vec{z}_1$ - единичный вектор скорости, направленной вдоль оси z.

Следовательно, компонента p', перпендикулярная скорости (будем считать, что она ориентирована по оси x), остается неизменной, а компонента, направленная по скорости p_z, сокращается, как должно быть, в $\sqrt{1-\beta^2}$ раз, т.е.

$$p_x = p'_x \quad , \quad p_z = p'_z \cdot \sqrt{1-\beta^2} \ . \tag{2}$$

Кроме того, допускалось, что так же, как в вакууме, движущийся электрический диполь индуцирует магнитный момент, величина которого

$$\vec{m} = -\beta\left[\vec{z}_1 \vec{p}\,'\right], \text{ т.е. } \quad m_y = -\beta \cdot p'_x \ . \tag{3}$$

Аналогичная ситуация должна иметь место и для преобразования магнитного диполя, имеющего компоненты m'_y и m'_z:

$$m_y = m'_y \qquad m_z = m'_z \cdot \sqrt{1-\beta^2} \tag{4}$$

и

$$\vec{p} = \beta\left[\vec{z}_1 \vec{m}\,'\right] \qquad p_x = -\beta \cdot m'_y \ . \tag{5}$$

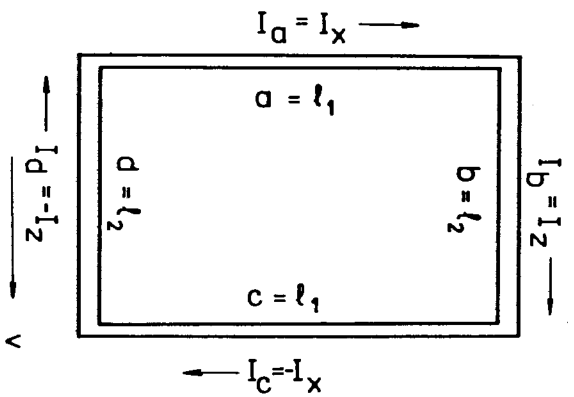
Такая величина индуцированного электрического момента, использованная в работе[1], в случае излучения Вавилова-Черенкова приводила, как уже отмечалось, к парадоксальным результатам. Они устранялись (как выяснилось позже, не полностью), если допустить, что вместо (5) должно быть[3]

$$p_x = -\beta \cdot n^2 \cdot m'_y \ . \tag{6}$$

Были соображения [4], подкреплявшие правильность (6). Все же главным соображением в пользу (6) было необоснованное предположение, что элементарный диполь, создаваемый круговым током, в излучении должен быть эквивалентен диполю, составленному из двух разноименных гипотетических магнитных зарядов. Действительно, для излучения электрического диполя получаются одинаковые результаты независимо от того, рассматривается ли движущийся диполь в предположении справедливости (3) или же определяется как результат интерференции двух движущихся, тесно связанных, близко расположенных разноименных электрических зарядов[3]. Тем самым была обоснована

применимость (3) и для среды. Естественно было рассмотреть излучение магнитных зарядов и составленных из них диполей, пользуясь аналогией, требующей замены во всех формулах ε на μ, μ на ε, E на H и H на -E[3].

Результат получился иной, чем для обычного магнитного диполя[1]. Понимание того, что, возможно, здесь нет противоречия, пришло позже[2],[5]. До этого была сделана попытка подправить результат для обычного диполя, заменяя (5) на (6). Хотя сейчас сомнений в правильности (5), по-видимому, не возникает, быть может, рационально рассмотреть, как возникает электрический дипольный момент при движении замкнутого контура с электрическим током. Это сведет задачу об излучении магнитного диполя к рассмотрению системы из движущихся электрических зарядов, в которой, видимо, не следует ожидать чего-либо неожиданного. Допустим, что имеется замкнутый контур прямоугольной формы, размером $\ell'_1 \times \ell'_2$, составленный из четырех прямолинейных проводников a, b, c, d (см. рисунок). Сечение проводников обозначим σ'. Ток, текущий по контуру, равен $J' = \sigma' \cdot I'$, где I' - плотность тока. Все эти величины указаны для системы координат K', связанной с контуром. Предположим, что она движется вместе с ним со скоростью v в направлении оси z. Нас будут интересовать результаты, которые должны наблюдаться в лабораторной системе координат K. Они получаются совершенно элементарно, если воспользоваться формулами Лоренца и хорошо известными релятивистскими преобразованиями для плотности тока и плотности заряда. Поскольку, однако, в их интерпретации часто возникают недоразумения, рассмотрим ту же задачу более наглядным способом, используя закон сохранения электрического заряда и формулу сложения скоростей.



Сначала о результатах в системе K'. Будем считать, что в проводнике содержатся неподвижные относительно контура отрицательные электрические заряды с плотностью ρ'_- и равное число положительных зарядов ρ'_+, движущихся со скоростью v'. Т.о.,

$$I' = \rho'_+ \cdot v' \quad \text{и} \quad J' = \sigma' \cdot \rho'_+ \cdot v', \qquad (7)$$

причем в силу равенства $-\rho'_- = \rho'_+ = \rho'$ проводник не заряжен.

Очевидно, что магнитный момент такого контура с током в системе координат K' равен

$$m' = \frac{1}{c} \cdot J' \cdot \ell'_1 \cdot \ell'_2 = \frac{1}{c} \cdot \sigma' \cdot \rho' \cdot v' \cdot \ell'_1 \cdot \ell'_2 . \qquad (8)$$

Перейдем теперь в лабораторную систему координат K. Сначала, в отличие от того, что показано на рисунке, допустим, что плоскость контура перпендикулярна скорости и, следовательно, его магнитный момент параллелен или антипараллелен оси z.

Нетрудно убедиться, что измеренный в неподвижной системе K ток в контуре равен

$$J_k = J' \cdot \sqrt{1-\beta^2} = \sigma' \cdot \rho' \cdot v' \cdot \sqrt{1-\beta^2} . \qquad (9)$$

В самом деле,

$$\sigma_k = \sigma' \cdot \sqrt{1-\beta^2}, \quad \rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad v_k = v' \cdot \sqrt{1-\beta^2} .$$

Отсюда, например для участка a, следует

$$I_a = J_k / \sigma_k = I', \qquad (10)$$

как того требует релятивистское преобразование плотности тока, текущего перпендикулярно скорости.

Формула (9) сразу же определяет величину магнитного момента в случае, когда он параллелен скорости. Поскольку в этом случае $\ell_1 = \ell'_1$ и $\ell_2 = \ell'_2$, то площадь контура остается неизменной, а ток согласно (9) сокращается в $\sqrt{1-\beta^2}$ раз, поэтому $m_z = m'_z \cdot \sqrt{1-\beta^2}$, как и должно быть согласно формуле (4).

Формула (9) существенна для дальнейшего. Обратимся теперь к рассмотрению более сложного случая, а именно: когда контур с током лежит в плоскости (x,z). Будем считать, что участок контура a направлен по оси x, а b - по оси z, т.е. параллелен скорости. Направление тока на каждом из участков контура на рисунке указано стрелками. Магнитный момент m', равный (8), в этом случае перпендикулярен плоскости чертежа, т.е. направлен по оси y в отрицательную сторону:

$$m_y = -m' = -\frac{1}{c} J' \cdot \ell'_1 \cdot \ell'_2 . \qquad (8a)$$

Поскольку отрезок a ориентирован параллельно оси x, то ток, текущий по нему, равен (9), а плотность тока – (10). Определим плотность тока на отрезке b:

$$I_b = -I_d = I_z .$$

Можно ожидать, что плотность тока, которую переносят положительные заряды, равна

$$\rho_+ \cdot v_+ = \rho_+ \cdot \frac{v'+v}{1+\frac{v'\cdot v}{c^2}} \quad . \tag{11}$$

Здесь v_+ определяется из формулы сложения скоростей, а ρ_+ заранее не известно и не обязательно совпадает с ρ_+'. При этом отрицательные заряды движутся только вместе с проводником. Их плотность в силу сокращения координаты z равна $\rho_- = \frac{\rho'}{\sqrt{1+\beta^2}}$, а скорость движения v. Окончательно плотность тока на отрезке b равна

$$I_b = \rho_+ \cdot \frac{v'+v}{1+\frac{v'\cdot v}{c^2}} - \frac{\rho'\cdot v}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{12}$$

В системе K разность величин ρ_+ и ρ_- на участке b может быть не равной нулю, и возникнет избыточная плотность заряда

$$\rho = \rho_+ - \rho_- = \rho_+ - \frac{\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{13}$$

Формально мы имеем право представить величину (12) в виде двух компонент: одну, равную току, который в системе K может рассматриваться как циркулирующий внутри проводника по замкнутому контуру (обозначим плотность его на отрезке b как I_k), и вторую, которая переносится избыточным зарядом вместе с проводником. Тогда

$$I_k = I_b - \rho_+ \cdot v + \rho_- \cdot v \ . \tag{14}$$

Величину I_k нетрудно определить. В самом деле, из закона сохранения заряда следует, что ток, текущий внутри отрезка b, должен быть равен току на отрезке a (см. (9)), т.е равен J_k из (9). Поэтому

$$I_k = J_k \cdot \frac{1}{\sigma} = \sqrt{1-\beta^2} \cdot \rho' \cdot v' , \tag{15}$$

т.к для b $\sigma = \sigma'$. Подставляя эту величину в (14) и принимая во внимание, что $\rho_- = \frac{\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}}$, из (12) получим

$$\rho_+ = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \left(1+\frac{v\cdot v'}{c^2}\right) \cdot \rho' \tag{16}$$

и

$$I_b = \frac{\rho'\cdot v'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot I' . \tag{17}$$

Это известная релятивистская формула преобразования величины плотности тока I', текущего в движущейся системе в направлении скорости, в I, наблюдаемый в неподвижной системе координат. Приведенное здесь рассмотрение - только иллюстрация, в какой-то мере поясняющая это преобразование. Из сказанного сразу же следует и величина плотности заряда проводника в неподвижной системе. Пользуясь (16), для ρ из (13) имеем

$$\rho = \rho_+ - \rho_- = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \left[1+\frac{v\cdot v'}{c^2} - 1\right] \cdot \rho' . \tag{18}$$

Принимая во внимание (7), получим известную релятивистскую формулу:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{v}{c^2} \cdot I' . \tag{19}$$

Формулы (9) и (19) сразу позволяют найти электрический дипольный момент тока и его магнитный момент. Количество заряда q_b на отрезке b получим, умножив (19) на сечение проводника $\sigma = \sigma'$ и его длину $\sqrt{1-\beta^2} \cdot l_2'$. Т.о.,

$$q_b = \frac{v}{c^2} \cdot \sigma' \cdot I' \cdot l_2' \ . \tag{20}$$

На отрезке d количество зарядов должно быть таким же, но иметь обратный знак. Расстояние между b и d равно l_1'. Если $l_2' \ll l_1'$, то $q_b \cdot l_1'$ – это электрический диполь, направленный по оси x. Он равен (см. (8) и (8a))

$$P_x = \beta \cdot \frac{1}{c} J' \cdot l_1' \cdot l_2' = \beta \cdot m' = -\beta \cdot m_y' , \tag{21}$$

что совпадает с (5). Поскольку заряд q_b связан с движением проводника с током в направлении скорости, то нет никаких оснований считать, что в среде может быть иначе. Чтобы окончательно убедиться в этом, посмотрим, какой магнитный момент создает диполь p_x из (21). Согласно (3) он должен быть равен $m(p) = -\beta^2 \cdot m'_y$. (22)

Это, однако, только часть момента, которая связана с зарядами, движущимися вместе с проводником. Кроме того, имеется ток J_k, бегущий по контуру, и равный (9). Учитывая, что площадь контура равна $\sqrt{1-\beta^2} \cdot l'_1 \cdot l'_2$, из (9) получим магнитный момент этого тока:

$$m(k) = (1-\beta^2)\cdot\frac{1}{c}\cdot l'_1\cdot l'_2\cdot\sigma'\cdot\rho'\cdot v' = -(1-\beta^2)\cdot m'_y. \quad (23)$$

Т.о., полный магнитный момент, индуцированный замкнутым током в плоскости, совпадающий с направлением движения, равен (см. (22) и (23))

$$m = m\cdot(p) + m\cdot(k) = m'. \quad (24)$$

Следовательно, магнитный момент, перпендикулярный направлению скорости, в самом деле одинаков как в движущейся системе координат K', так и в лабораторной K. Видно также, что электрический дипольный момент (21) и магнитный (24), если учесть (22) и (23), однозначно связаны между собой. Поскольку для движения электрического диполя в среде правильно (3), то нельзя допустить, что для магнитного диполя нужно вместо (5) пользоваться (6). В этом случае (24) (совпадающее с (4)) оказалось бы нарушенным. Следовательно, в среде следует использовать те же формулы преобразований дипольных моментов, что и в вакууме.

Литература

1. Франк И.М. Известия АН СССР. Сер.физ., 1942, т.6, с.3.
2. Франк И.М. УФН, 1984, т.144, с.251.
3. Франк И.М. В кн.: Памяти Сергея Ивановича Вавилова. М.: Изд-во АН СССР, 1952, с.172.
4. Гинзбург В.Л., там же, с.193.
5. Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. М.: Наука, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел 19 августа 1988 года.

Франк И.М.

Р4-88-634

Релятивистское преобразование момента магнитного диполя

Ряд лет обсуждался вопрос о том, какой электрический дипольный момент должен возникать у магнитного диполя при его движении в среде. Сейчас принято считать, что и в среде для связи магнитного момента с электрическим пригодна та же релятивистская формула, что и при движении магнитного диполя в вакуме. Дополнительным доводом в пользу этого служит содержащееся в этой работе рассмотрение движущегося в вакууме замкнутого контура с током. В предельном случае он эквивалентен движущемуся магнитному диполю. Сопоставление полученных результатов с известными для электрического диполя показывает, что и при наличии среды нет оснований менять релятивистские формулы преобразований.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Frank I.M.

P4-88-634

Relativistic Transformations for the Moment of the Magnetic Dipole

For several years the question was under discussion of an electric dipole moment acquired by a magnetic dipole moving in a medium. Now it is accepted that for the relation between the magnetic and electric moment in a medium the same relativistic formula as for a magnetic dipole moving in a vacuum can be used. Consideration undertaken in this paper of a closed current loop moving in a vacuum contains an additional argument in favor of the above statement. In the limit case this loop is equivalent to a moving magnetic dipole. The comparison of the obtained results with the known data concerning the electric dipole has shown that in the case of medium there are no reasons whatsoever to change relativistic transformation formulas.

The investigation has been performed at the Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988