сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-88-587

А.В.Зорин*, В.В.Курышкин*, Э.Э.Энтральго

К ПОСТРОЕНИЮ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО-НЕКОММУТАТИВНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОЛЕЙ

*Университет дружбы народов им.Патриса Лумумбы, Москва

1988

Введение

В стандартной квантовой теории поля [I-3] S-матрица представима в виде ряда теории возмущений

$$S = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\int S_n(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n, \qquad (I)$$

где симметричные операторы $S_n(x_1,\dots,x_n)$ являются хронологически упорядоченными конструкциями лагранжиана взаимодействия $\mathcal{L}(x)$. При этом в качестве операции хронологического упорядочения используется T-произведение, в котором $\mathcal{L}(x)$ упорядочены в порядке убывания временных компонент своих аргументов, т. е.

$$(-i)^n S_n(x_1,\dots,x_n) = T(\mathcal{L}(x_1),\dots,\mathcal{L}(x_n)) = \mathcal{L}(x_{i_1})\dots\mathcal{L}(x_{i_n}), \qquad (2)$$

где $x^0_{i_1} > x^0_{i_2} > \dots > x^0_{i_n}$.

S-матрица (I),(2) удовлетворяет основным принципам теории взаимодействующих полей (релятивистской ковариантности, унитарности и причинности), если оператор $\mathcal{L}(x)$ является релятивистским скаляром, эрмитов и локально-коммутативен [I-4], т.е.

(A) $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$, (B) $\mathcal{L}^+(x) = \mathcal{L}(x)$,

(C) $[\mathcal{L}(x),\mathcal{L}(y)]_- = 0$, если $(x-y)^2 < 0$.

Однако за десятилетия развития квантовой физики неоднократно предлагались и исследовались [5-19] различного рода нестандартные квантово-полевые модели, лагранжиан взаимодействия в которых по тем или иным причинам оказывается локально-некоммутативным, т.е.

$$[\mathcal{L}(x),\mathcal{L}(y)] \neq 0, \quad \text{даже при} \quad (x-y)^2 < 0. \qquad (3)$$

Использование S-матрицы (I),(2) для таких моделей приводит к существенным трудностям, таким как нарушение причинности, унитарности, релятивистской ковариантности, градиентной инвариантности и ряду других (подробнее, см., например [10-12]).

Традиционный путь преодоления возникающих затруднений состоит [5-12] в наложении определённых ограничений на используемые нестандартные модели, с тем чтобы S-матрица (1),(2) оказалась приемлемой. При этом иногда оказывается, что наряду с отказом от условия (C), приходится отказываться и от условия (B) [7] или формулировать особые правила для вычисления матричных элементов [6,8]. Общим в таком подходе к нестандартным моделям является стремление сохранить в неприкосновенности операцию хронологического упорядочения (2).

Существует и другой подход [13-17], который сводится фактически к замене нековариантного при условии (3) хронологического произведения (2) на некоторую новую релятивистски ковариантную хронологически упорядоченную конструкцию лагранжианов взаимодействия $\mathcal{L}$, которую в силу симметрии операторов S_n можно записать в виде суммы по всевозможным перестановкам аргументов, т.е.

$$(-i)^n S_n(x_1,\dots,x_n)=\tau(\mathcal{L}(x_1),\dots,\mathcal{L}(x_n))=\sum_{Perm.}\left\{\tau(x_1,\dots,x_n)\mathcal{L}(x_1)\dots\mathcal{L}(x_n)\right\}. \quad (4)$$

При этом многоточечные числовые функции $\tau(x_1,\dots,x_n)$ однозначно определяют пространственно-временную структуру операторов S_n (4) и поэтому могут рассматриваться в качестве основных объектов, определяющих как хронологическое упорядочение (4), так и матрицу рассеяния (1).

Основной целью настоящей статьи является установление функций $\tau(x_1,\dots,x_n)$, приводящих к релятивистски ковариантной, унитарной и причинной S-матрице (1),(4) для взаимодействия $\mathcal{L}(x)$, на которое наложены только два требования: (A) - скалярность и (B) - эрмитовость. Условие (C) (локальная коммутативность) при этом может не выполняться, т.е. искомая S-матрица (1),(4) могла бы быть использована в квантово-полевых моделях с локально-некоммутативным взаимодействием.

1. Известные хронологические упорядочения

Рассмотрение известных способов хронологического упорядочения целесообразно начать со стандартного T-произведения (2), которое, будучи записано в форме (4), в первых трёх порядках теории возмущений характеризуется функциями:

$$\tau_T(x)=1,\quad \tau_T(x,y)=\Theta(x^0-y^0),\quad \tau_T(x,y,z)=\Theta(x^0-y^0)\Theta(y^0-z^0), \quad (5)$$

где $\Theta(\alpha)=1$ при $\alpha>0$ и $\Theta(\alpha)=0$ при $\alpha<0$.

Для сравнения с другими хронологическими упорядочениями удобно изобразить эти функции на пространственно-временных диаграммах, показывающих вклад произведения операторов $\mathcal{L}$ с заданной фиксированной последовательностью аргументов в хронологическое произведение (4). Ниже приведены диаграммы, отвечающие значениям функций $\tau_T(x,y)$ (рис.1) и $\tau_T(x,y,z)$ (рис.2 и 3):

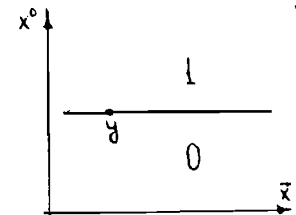

Рис. 1

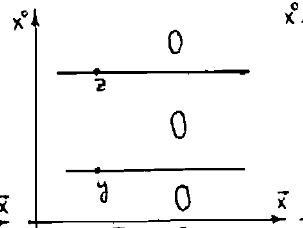

Рис. 2

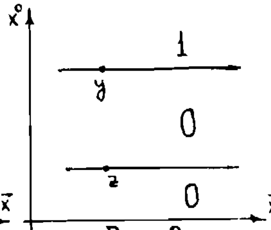

Рис. 3

Выделение областей, отвечающих различным значениям функций τ_T, производится здесь релятивистски неинвариантным способом, поэтому релятивистская ковариантность такого упорядочения может быть обеспечена только свойством (C) лагранжиана взаимодействия. Именно поэтому для взаимодействий (3) хронологическое упорядочение (2), вообще говоря, непригодно.

Отметим ещё, что в хронологическом T-произведении, в то время как операторы $\mathcal{L}(x)$ зависят от точек 4-мерного пространства-времени, упорядочение производится лишь в одном измерении. Некоторые аспекты перехода от упорядочения в одном измерении к упорядочению в четырёх измерениях и связь такого перехода с локальной коммутативностью стандартной теории рассматривались в работе [20].

По-видимому, одним из первых релятивистски ковариантное хронологическое упорядочение применил в 1950 г. Юкава [13], который для модели с билокальным лагранжианом взаимодействия $\mathcal{L}(x,x';\lambda)$, зависящим от параметра λ размерности длины (фундаментальная длина), предложил записывать S-матрицу в виде

$$S=1+\frac{i}{\hbar}\{\mathcal{L}\}+\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\{\mathcal{L}D_1\mathcal{L}\}+\left(\frac{i}{\hbar}\right)^3\{\mathcal{L}D_1\mathcal{L}D_1\mathcal{L}\}+\dots, \quad (6)$$

где введены следующие обозначения

$$\{ABC\}=\int A(x_1,x_2)B(x_2,x_3)C(x_3,x_4)\,dx_1\dots dx_4,$$

$$D_1(x,y)=D_1(x-y,0)=\begin{cases}1, & (x-y)^2>0,\ x^0>y^0\\ 1/2, & (x-y)^2<0\\ 0, & (x-y)^2>0,\ x^0<y^0\end{cases}. \quad (7)$$

Для удобства дальнейшего сравнения с теориями, где лагранжиан взаимодействия зависит от одной точки, рассмотрим структуру S-матрицы Дкавы в локальном пределе, когда $\lambda \to 0$ (при этом $\mathcal{L}(x,x';\lambda) \to \mathcal{L}(x')\delta(x-x')$). Записывая S-матрицу Дкавы в виде (I),(4),легко убедиться, что упорядочение во втором и третьем порядках характеризуется функциями

$$\tau_{Yu}(x,y) = \bar{\Theta}_{xy} + \frac{1}{2}\tilde{\Theta}_{xy}, \tag{8}$$

$$\tau_{Yu}(x,y,z) = \bar{\Theta}_{xy}\bar{\Theta}_{yz} + \frac{1}{2}(\bar{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz} + \tilde{\Theta}_{xy}\bar{\Theta}_{yz}) + \frac{1}{4}\tilde{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz}. \tag{9}$$

Здесь и далее используются релятивистски инвариантные ступенчатые характеристические функции

$$\bar{\Theta}_{xy} = \Theta((x-y)^2)\,\Theta(x^0-y^0), \qquad \tilde{\Theta}_{xy} = \Theta(-(x-y)^2). \tag{I0}$$

Диаграммы значений для функций (8) и (9) приведены на рис.4 (второй порядок) и Рис. 5-7 (третий порядок).

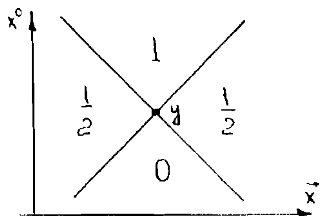

Рис. 4

В отличие от диаграмм для функций τ_T (5) (рис. I-3), здесь выделение областей с различными значениями функций τ_{Yu} производится релятивистски инвариантным способом. Однако, как будет показано ниже, упорядочение (4), определяемое функциями (8) и (9), а следовательно и S-матрица (6) в ло-

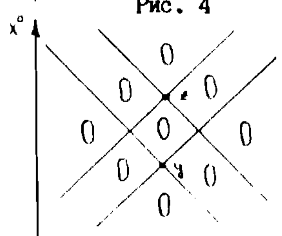

Рис. 5

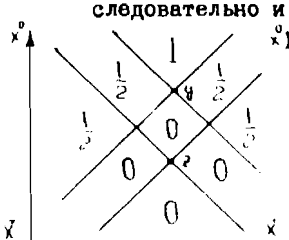

Рис. 6

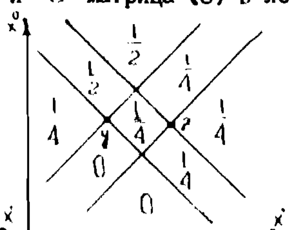

Рис. 7

кальном пределе, неприемлемы, так как приводят к нарушению причинности уже в третьем порядке теории возмущений.

В том же 1960 г. Коба [14], работая с моделями, в которых плотность гамильтониана взаимодействия становится локально-некоммутативной на бесконечно малых расстояниях, предложил другой способ хронологического упорядочения. Он сформулировал его в виде правил построения хронологического P^*-произведения (терминология [14]), которое в частном случае трех операторов представимо в виде

$$P^*(A,B,C) = ABC, \qquad x_a > x_b > x_c, \tag{II а}$$

$$P^*(A,B,C) = \frac{1}{2}(ABC + ACB), \quad x_a > (x_b \sim x_c), \tag{II б}$$

$$P^*(A,B,C) = \frac{1}{3}(ABC + ACB + CAB), \quad (x_a > x_b) \sim x_c, \tag{II в}$$

$$P^*(A,B,C) = \frac{1}{6}\sum_{Perm.}(ABC), \qquad (x_a \sim x_b) \sim x_c. \tag{II г}$$

Если под операторами A, B, C понимаются операторы $\mathcal{L}$ в разных точках пространства-времени, то упорядочение (II) может быть переписано в форме (4) с числовыми функциями τ_K :

$$\tau_K(x,y) = \bar{\Theta}_{xy} + \frac{1}{2}\tilde{\Theta}_{xy}, \tag{I2}$$

$$\tau_K(x,y,z) = \bar{\Theta}_{xy}\bar{\Theta}_{yz} + \frac{1}{2}(\bar{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz} + \tilde{\Theta}_{xy}\bar{\Theta}_{yz})\bar{\Theta}_{xz} + \frac{1}{3}(\bar{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz}\tilde{\Theta}_{xz} + \tilde{\Theta}_{xy}\bar{\Theta}_{yz}\tilde{\Theta}_{xz} + \tilde{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz}\bar{\Theta}_{xz}) + \frac{1}{6}\tilde{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz}\tilde{\Theta}_{xz}. \tag{I3}$$

Функция τ_K (I2) совпадает с функцией τ_{Yu} (8),рассмотренной ранее, поэтому диаграмма для функции (I2) уже приведена на рис.4. Диаграммы для функции (I3) приведены на рис.8-I0.

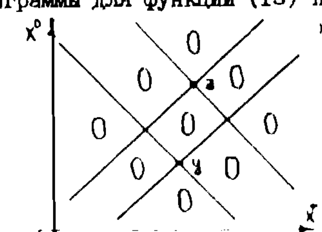

Рис. 8

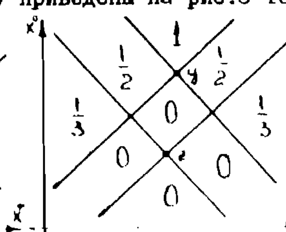

Рис. 9

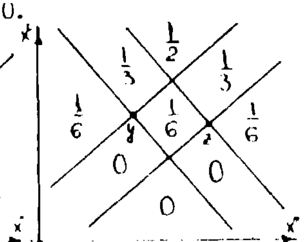

Рис. 10

Так же,как и на рис.5-7,для функций τ_{Yu} выделение областей фиксированного значения τ_K производится здесь релятивистски инвариантным способом, однако значения функций τ_{Yu} и τ_K в некоторых областях различны. Сравнение диаграмм, приведенных на рис.7 и рис.10, показывает, что диаграмма на рис. 10 обладает более высоким уровнем симметрии. Эта симметрия носит формальный характер, так как окончательное хронологическое произведение (4) в обоих случаях симметрично по всем перестановкам аргументов. Как будет показано ниже, упорядочение Коба также неприемлемо для построения матрицы рассеяния, поскольку уже в третьем порядке теории возмущений для локально-некоммутативных взаимодействий (3) нарушает как причинность, так и унитарность.

В методе конфигурационных сумм, предложенном Гольфандом [21] для построения S-матрицы, вводятся два различных релятивистски ковариантных метода хронологического упорядочения, соответствующие двум различным способам разделения произвольной конфигурации точек на слои (конфигурации, содержащие только пространственно-подобные точки). При этом во втором порядке теории возмущений оба способа, записанные в виде (4), приводят к одной и той же функции (8). В третьем порядке получаются две различные функции $\tau_{G,I}$ и $\tau_{G,II}$, соответствующие различным способам выделения слоёв:

$$\tau_{G,I}(x,y,z) = \bar{\Theta}_{xy}\bar{\Theta}_{yz} + \frac{1}{2}(\bar{\Theta}_{xz}\tilde{\Theta}_{yz} + \tilde{\Theta}_{xy}\bar{\Theta}_{yz}) + \frac{1}{6}\tilde{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz}\tilde{\Theta}_{xz}, \qquad (14а)$$

$$\tau_{G,II}(x,y,z) = \bar{\Theta}_{xy}\bar{\Theta}_{yz} + \frac{1}{2}(\bar{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz} + \tilde{\Theta}_{xy}\bar{\Theta}_{xz}) + \frac{1}{6}\tilde{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz}\tilde{\Theta}_{xz}. \qquad (14б)$$

Конфигурационные диаграммы для функции $\tau_{G,I}$ представлены на рис. 11–13, а для функции $\tau_{G,II}$ на рис. 14–16.

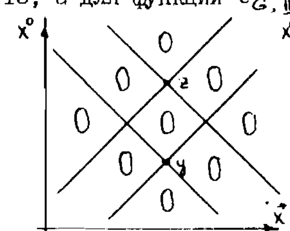
Рис. 11

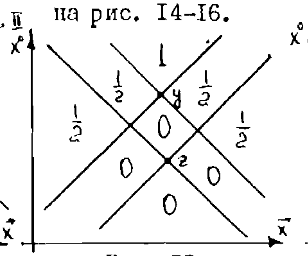
Рис. 12

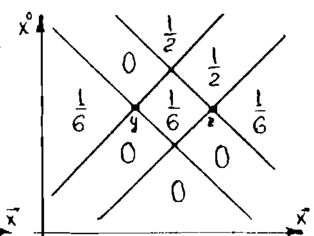
Рис. 13

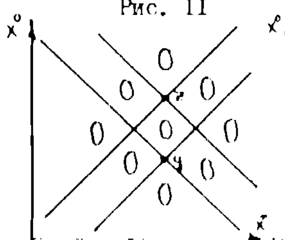
Рис. 14

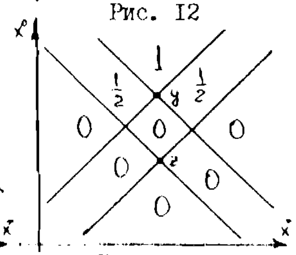
Рис. 15

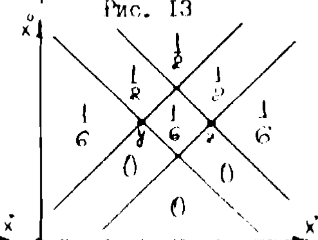
Рис. 16

Оба способа упорядочения Гольфанда релятивистски ковариантны, обладают свойством транзитивности и для локально-коммутативных взаимодействий эквивалентны стандартному T-произведению (2). Однако для взаимодействий (3) оба способа приводят к нарушению как причинности, так и унитарности S-матрицы (см. ниже).

Отметим ещё, что отдельные аспекты релятивистски ковариантных упорядочений, а также вопросы применения функции (8) рассматривались в работах [16-17, 22 23].

2. Общие принципы построения S-матрицы

Для построения S-матрицы в случае взаимодействия (3) в работах [24,25] предложено обобщение метода Боголюбова [4], основанного на введении интенсивности взаимодействия $g(x) \in [0,1]$. В этом методе вместо $\mathcal{L}$ рассматривается взаимодействие $\mathcal{L}_g = g(x)\mathcal{L}(x)$, а соответствующая матрица рассеяния $S(g)$ ищется в виде формального функционального разложения по степеням интенсивности взаимодействия:

$$S(g) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1,\ldots,x_n) g(x_1)\ldots g(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n . \qquad (15)$$

Окончательно искомая S-матрица записывается в виде ряда (15) при полностью включённом взаимодействии $g(x) \equiv 1$, т.е. $S = S(1)$, что приводит к записи S в форме (1).

Физические условия, которым должна удовлетворять искомая матрица $S(g)$ (подробнее см. [1,4,24]) могут быть сформулированы в виде следующих пяти математических требований.

I. Соответствие с квантовой механикой:

$$S(g) = I + i\int g(x)\mathcal{L}(x)\,dx, \qquad (16)$$

при $g(x)$, отличной от нуля лишь в бесконечно малой области G пространства-времени.

II. Релятивистская ковариантность:

$$S(g(L^{-1}x)) = U_L S(g(x)) U_L^{+}, \qquad (17)$$

где L – преобразование из неоднородной группы Лоренца, U_L – соответствующее преобразование амплитуды состояния.

III. Унитарность:

$$S(g)S^{+}(g) = S^{+}(g)S(g) = I . \qquad (18)$$

Для математической формулировки понятия причинности рассмотрим вначале общепринятое рассуждение, используемое при построении матрицы рассеяния в локально-коммутативных теориях.

Пусть $S(g)$ известна и удовлетворяет условиям I, II и III. Выберем интенсивность взаимодействия $g = g_1 + g_2$, отличную от нуля лишь в области G, распадающейся на две несвязных подобласти G_1 и G_2, так что $g_i(x) \neq 0$ лишь при $x_i \in G_i$ (Рис. 17). Построим матрицы $S_i = S(g_i)$

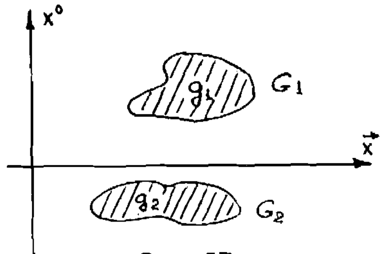

Рис. 17

и $S_2 = S(g_2)$, соответствующие взаимодействиям с интенсивностями $g_1(x)$ и $g_2(x)$. Считая, что S_1 и S_2 удовлетворяют условиям I, II и III, поставим задачу построения матрицы $S(g) = S(g_1+g_2) = F(S_1, S_2)$, соответствующей интенсивности взаимодействия $g(x)$ и также удовлетворяющей условиям I, II и III.

По соображениям причинности при общепринятом рассуждении записывают [1,4]:

$$S = \begin{cases} S_1 S_2, & \text{если } x_1^0 > x_2^0,\ x_1 \in G_1,\ x_2 \in G_2, \\ S_2 S_1, & \text{если } x_1^0 < x_2^0,\ x_1 \in G_1,\ x_2 \in G_2. \end{cases} \qquad (19)$$

Матрица (19) удовлетворяет условию соответствия и условию унитарности, в чём легко убедиться непосредственной подстановкой. Однако построение (19) не удовлетворяет условию ковариантности. Так, если G_1 и G_2 пространственно-подобны и в некоторой системе отсчёта $G_1 > G_2$, то подходящим преобразованием $x \to x' = Lx$ можно перейти к новой системе отсчёта, где окажется $G_1' < G_2'$. При этом построение в первой системе даёт $S = S_1 S_2$, а такое же построение (19) во второй – $S' = S_2' S_1'$, и при возврате к первой системе согласно преобразованию (17) получаем $S = S_2 S_1$. Для восстановления релятивистской ковариантности теперь необходимо потребовать равенства

$$S = S_1 S_2 = S_2 S_1, \quad \text{если } (x_1 - x_2)^2 < 0,\ x_1 \in G_1,\ x_2 \in G_2. \qquad (20)$$

Равенство (20) с учётом условия соответствия (16) приводит к ограничению (С) (локальная коммутативность) на лагранжиан взаимодействия, противоречащему условию (3) решаемой задачи.

Нетрудно видеть, что требование локальной коммутативности (С) появляется в силу нековариантного построения (19) и последующей ликвидации этой нековариантности ограничением (20) на свойства матрицы $S(g)$, эквивалентным при условии соответствия (16) ограничению (С) на лагранжиан взаимодействия.

Попытаемся провести ковариантное построение $S(g)$ по известным, удовлетворяющим условиям I, II, III, матрицам $S(g_1)$ и $S(g_2)$.

Отметим, что в формулировке (19) причинности никак не учитывается интервал, соединяющий области G_1 и G_2. Существенно, что нековариантность построения (19) возникает лишь при рассмотрении пространственно-подобных интервалов. В то же время говорить о причинной

связи естественно лишь для точек (или областей), разделённых времени-подобным интервалом. Подобное понятие причинности, называемое в литературе примитивным, мы и выдвинем в качестве следующего физического требования к матрице $S(g)$.

__IV. Примитивная причинность:__

$$S = \begin{cases} S_1 S_2, \text{ если } (x_1 - x_2)^2 \geq 0 \text{ и } x_1^0 > x_2^0;\ x_1 \in G_1,\ x_2 \in G_2, \\ S_2 S_1, \text{ если } (x_1 - x_2)^2 \geq 0 \text{ и } x_2^0 > x_1^0;\ x_1 \in G_1,\ x_2 \in G_2. \end{cases} \qquad (21)$$

Построение (21) является частью построения (19), касающейся лишь времени-подобных областей. Выполнение условий соответствия, ковариантности и унитарности для $S(g)$, определённой конструкцией (21), очевидно.

Проводя рассуждения, аналогичные приведённым в [1,4], нетрудно получить эквивалентную запись примитивной причинности (21) в терминах вариационных производных:

$$\frac{\delta}{\delta g(x)}\left(\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} S^+(g)\right) = 0, \qquad \text{если } (x-y)^2 \geq 0 \text{ и } x^0 < y^0. \qquad (22)$$

Рассмотрим теперь случай, когда области G_1 и G_2 (рис. 11) пространственно-подобны. Считая, что $S(g)$ может быть записана в виде конструкции $S = F(S_1, S_2)$, удовлетворяющей условиям преемственности со стандартной теорией, линейности и симметричности по каждой из $S_i = S(g_i)$ (подробнее см. [24]), с однозначностью имеем

$$S = \frac{1}{2}(S_1 S_2 + S_2 S_1), \quad \text{если } (x_1 - x_2)^2 < 0,\ x_1 \in G_1,\ x_2 \in G_2. \qquad (23)$$

Легко видеть, что конструкция (23) удовлетворяет условиям соответствия (16) и ковариантности (17), но теперь оказывается невыполненным условие унитарности (18), поскольку из (23) следует

$$SS^+ = \frac{1}{4}(I + S_1 S_2 S_1^+ S_2^+ + S_2 S_1 S_2^+ S_1^+ + I) \neq I.$$

Однако для бесконечно малых пространственно-подобных областей G_1 и G_2 в силу унитарности S_1 и S_2 имеем

$$S_i = I + \delta S_i, \quad S_i^+ = I - \delta S_i, \quad SS^+ = I,$$

т.е. в этом случае выполняется и условие унитарности. Выполнение условий I, II и III для конструкции (23) при бесконечно малых областях G_i даёт надежду на возможность проведения определённого обобщения и в случае конечных пространственно-подобных областей.

Проведённые выше рассуждения могут быть обобщены на случай трёх и более несвязных областей G_i пространства-времени с отличными от нуля интенсивностями $g_i(x)$. При этом матрица $S(g)=S(g_1+g_2+\ldots+g_n)$ однозначным образом конструируется из матриц $S(g_i)$ на основе примитивной причинности (21) и соотношений типа (23). Следует особо подчеркнуть, что получаемые конструкции будут удовлетворять условию унитарности в том, и только в том случае, если область G_i, связанная пространственно-подобным интервалом хотя бы с одной из областей бесконечно мала.

Конструкции типа (23) позволяют сформулировать в дополнение к I–IУ ещё одно условие, которое мы в дальнейшем будем называть условием эволюционной симметрии пространственно-подобных точек.

У. Эволюционная симметрия:

$$S(g_1+\ldots+g_n)=\frac{1}{n!}\sum_{Perm.}\left\{S(g_1)\ldots S(g_n)\right\}, \tag{24}$$

если $g_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, отличны от нуля лишь в бесконечно малых взаимно пространственно-подобных несвязных областях G_i.

Выполнение условий соответствия, ковариантности и унитарности для конструкции (24) очевидно. Следует отметить, что условие (24) касается лишь бесконечно малых областей пространства-времени и по этой причине не может быть сформулировано в виде условия типа (22) на вариационные производные матрицы $S(g)$.

3. Общая структура матрицы рассеяния

Покажем теперь, что условия соответствия (16), релятивистской ковариантности (17), унитарности (18), примитивной причинности (22), эволюционной симметрии (24) однозначно (с точностью до квазилокальных членов [1,4]) определяют искомую матрицу $S(g)$. Для этого, используя разложение (15), перепишем их в терминах симметричных по аргументам операторов $S_n(x_1,\ldots,x_n)$ (подробнее см. [1,24]):

$$\text{I.}\quad S_1(x)=i\mathcal{L}(x), \tag{25}$$

$$\text{II.}\quad S_n(Lx_1,\ldots,Lx_n)=U_L S_n(x_1,\ldots,x_n)U_L^+, \tag{26}$$

$$\text{III.}\quad \sum_{k=1}^{n-1}P\begin{pmatrix}x_1,\ldots,x_k\\ x_{k+1},\ldots,x_n\end{pmatrix}S_k(x_1,\ldots,x_k)S^+_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n)+$$

$$+S_n(x_1,\ldots,x_n)+S^+_n(x_1,\ldots,x_n)=0, \tag{27}$$

$$\text{IУ.}\quad \sum_{k=0}^{n-1}P\left(\frac{x_1,\ldots,x_k}{x_{k+1},\ldots,x_n}\right)S_{k+1}(y,x_1,\ldots,x_k)S^+_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n)+$$

$$+S_{n+1}(y,x_1,\ldots,x_n)=0, \tag{28}$$

если $(y-x_j)^2\geq 0$ и $y^0>x_j^0$ хотя бы для одного из $j=\overline{1,n}$.

$$\text{У.}\quad S_n(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{n!}\sum_{Perm.}\left\{S_1(x_1)\ldots S_1(x_n)\right\}, \tag{29}$$

если $(x_i-x_j)^2<0$ для всех $i,j\in\overline{1,n}$.

Совокупность соотношений (25)-(29) позволяют выразить S_{n+1} через предыдущие S_k, $k=\overline{1,n}$ и в конечном итоге через оператор S_1, определённый равенством (25). Так, для определения $S_{n+1}(y,x_1,\ldots,x_n)$ при $(y-x_j)^2\geq 0$ и $y^0>x_j^0$ для одного из $j=\overline{1,n}$ достаточно воспользоваться соотношениями (27) и (28), определяющими эрмитову и антиэрмитову части S_{n+1} соответственно. Если $(y-x_j)^2\geq 0$, но $y^0<x_j^0$ для одного из $j=\overline{1,n}$, или $(y-x_j)^2<0$ для всех $j=\overline{1,n}$, но среди x_j существуют две времени-подобные точки, так что $(x_i-x_j)^2\geq 0$, то оператор $S_{n+1}(y,x_1,\ldots,x_n)$ определяется соотношениями (27) и (28) после соответствующих переобозначений аргументов, возможных ввиду симметрии S_n. Таким образом, лишь в случае, когда $(x_i-x_j)^2<0$ и $(y-x_j)^2<0$ для всех $i,j\in\overline{1,n}$, соотношения (27) и (28) не определяют S_{n+1} через предыдущие S_k. Но в этом случае S_{n+1} уже определён равенством (29), совместность которого с условием унитарности (27) доказывается простой подстановкой (совместность равенства (29) с соотношениями (26), (27) и (28) очевидна).

Исследование [24-27] рекуррентной процедуры построения S_n с помощью соотношений (25)-(29) показывает, что любой оператор S_n представим в виде (4), где функции $\tau(x_1,\ldots,x_n)$ выражаются через ступенчатые функции (10). Это даёт возможность рассматривать переход от S-матрицы (1),(2) к S-матрице (1),(25)-(29) как переход от нековариантных хронологических T-произведений (2) к релятивистски ковариантным τ-произведениям (4), определяющим фактически новую операцию хронологического упорядочения.

4. Новое понятие хронологического упорядочения

Для построения явного вида хронологического τ-произведения операторов $\mathcal{L}(x)$, отвечающих совокупности соотношений (25)-(29), подставим выражение (4) в каждое из соотношений (25)-(29).

При этом из соотношения (25) получим

$$\tau(x) = 1. \tag{30 а}$$

Соотношения, получающиеся из (26), (27) и (29) с учётом налагаемых на лагранжиан $\mathcal{L}$ требований (А) (скалярность) и (В) (эрмитовость), можно представить в виде симметричных сумм типа

$$\sum_{Perm.} \left\{ K(x_1,\dots,x_n)\,\mathcal{L}(x_1)\dots\mathcal{L}(x_n) \right\} = 0,$$

обращающихся в нуль при $K(x_1,\dots,x_n)=0$. Отсюда с учётом (30 а) имеем

$$\tau(Lx_1,\dots,Lx_n) = \tau(x_1,\dots,x_n), \tag{30 б}$$

$$\overset{+}{\tau}(x_1,\dots,x_n) = (-1)^{n+1}\tau(x_1,\dots,x_n) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\tau(x_1,\dots,x_k)\overset{+}{\tau}(x_{k+1},\dots,x_n), \tag{30 в}$$

$$\left(\tau(x_1,\dots,x_n) - \frac{1}{n!}\right)\prod_{(ij)}\tilde{\Theta}_{ij} = 0, \quad (ij) = \{i,j \mid i\neq j;\ i,j\in\overline{1,n}\}. \tag{30 г}$$

Выражение, получающееся из (28), можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{Perm.}^{(i)}\left\{ K_i(x_1,\dots,x_{n+1})\,\mathcal{L}(x_1)\dots\mathcal{L}(x_{n+1})\right\} = 0,$$

где внутренняя сумма берётся по всевозможным перестановкам n аргументов, исключая точку x_i, а коэффициентные функции K_i для произведений лагранжианов с аргументами, образующими последовательность, в которой на i-м месте стоит аргумент, обладающий выделенным свойством $y = x_i > x_j$, $j\in\overline{1,n+1}$, т.е. для $x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_{n+1}$ имеют вид

$$K_i(x_1,\dots,x_{n+1}) = \bar{\Theta}_{ij}\left(\tau(x_1,\dots,x_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\tau(x_1,\dots,x_k)\overset{+}{\tau}(x_{k+1},\dots,x_{n+1})\right).$$

Если $\mathcal{L}$ обладает свойством (3), то все перестановки $\mathcal{L}(x_1)\dots\mathcal{L}(x_{n+1})$, вообще говоря, линейно независимы, поэтому для выполнения соотношения (28) необходимо потребовать, чтобы все K_i обращались в нуль, т.е.

$$\bar{\Theta}_{ij}\tau(x_1,\dots,x_{n+1}) = \bar{\Theta}_{ij}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\tau(x_1,\dots,x_k)\overset{+}{\tau}(x_{k+1},\dots,x_{n+1}), \tag{30 д}$$

для любых $i,j\in\overline{1,n+1};\ i\neq j$. При этом если $i=n+1$, то суммирование в (30 д) пропадает и $\tau(x_1,\dots,x_{n+1})=0$. Можно показать (см. [26]), что в общем случае

$$\bar{\Theta}_{ij}\,\tau(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n) = 0. \tag{31}$$

Построение явного вида функций $\tau(x_1,\dots,x_n)$ исходя из соотношений (30) производится следующим образом.

Для функции τ второго порядка можно записать тождество

$$\tau(x,y) \equiv \tau(x,y)\left(\bar{\Theta}_{xy} + \bar{\Theta}_{yx} + \tilde{\Theta}_{xy}\right).$$

Далее для первого слагаемого следует использовать соотношение (30 д), для третьего – (30 г), что касается второго слагаемого, то оно в силу (31) исчезает. Окончательно с учётом (30.а) во втором порядке имеем

$$\tau(x,y) = \bar{\Theta}_{xy} + \frac{1}{2}\tilde{\Theta}_{xy}. \tag{32}$$

Аналогично в третьем порядке:

$$\tau(x,y,z) \equiv \tau(x,y,z)\left(\bar{\Theta}_{xy} + \bar{\Theta}_{yx} + \tilde{\Theta}_{xy}\left(\bar{\Theta}_{yz} + \bar{\Theta}_{zy} + \tilde{\Theta}_{yz}\left(\bar{\Theta}_{xz} + \bar{\Theta}_{zx} + \tilde{\Theta}_{xz}\right)\right)\right) =$$

$$= \bar{\Theta}_{xy}\left(-\tau(x)\tau(z,y) + \tau(x,y)\tau(z)\right) + \tilde{\Theta}_{xy}\bar{\Theta}_{yz}\tau(x,y)\tau(z) + \tilde{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz}\bar{\Theta}_{xz}\left(-\tau(x)\times\right.$$

$$\left.\times\tau(z,y) + \tau(x,y)\tau(z)\right) + \tilde{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz}\tilde{\Theta}_{xz}\frac{1}{3!} = \bar{\Theta}_{xy}\left(1 - \tau(z,y)\right) + \frac{1}{2}\tilde{\Theta}_{xy}\bar{\Theta}_{yz} + \frac{1}{6}\tilde{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz}\tilde{\Theta}_{xz}.$$

Учитывая, что согласно (32) $1 - \tau(z,y) = \tau(y,z)$, получаем

$$\tau(x,y,z) = \bar{\Theta}_{xy}\bar{\Theta}_{yz} + \frac{1}{2}\left(\tilde{\Theta}_{xy}\bar{\Theta}_{yz} + \bar{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz}\right) + \frac{1}{6}\tilde{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz}\tilde{\Theta}_{xz}. \tag{33}$$

Применяя ту же самую процедуру, можно получить в четвёртом порядке

$$\tau(x,y,z,u) = \bar{\Theta}_{xy}\bar{\Theta}_{yz}\bar{\Theta}_{zu} + \frac{1}{2}\left(\tilde{\Theta}_{xy}\bar{\Theta}_{yz}\bar{\Theta}_{zu} + \bar{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz}\bar{\Theta}_{zu} + \bar{\Theta}_{xy}\bar{\Theta}_{yz}\tilde{\Theta}_{zu}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\tilde{\Theta}_{xy}\left(\bar{\Theta}_{yz} - \bar{\Theta}_{xz}\tilde{\Theta}_{yz}\bar{\Theta}_{yu}\right)\tilde{\Theta}_{zu} + \frac{1}{6}\left(\tilde{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz}\tilde{\Theta}_{xz}\bar{\Theta}_{zu} + \bar{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz}\tilde{\Theta}_{zu}\tilde{\Theta}_{yu}\right) +$$

$$+ \frac{1}{12}\tilde{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz}\tilde{\Theta}_{zu}\left(\tilde{\Theta}_{xz}\bar{\Theta}_{yu}\bar{\Theta}_{xu} - \bar{\Theta}_{xz}\bar{\Theta}_{yu} - \bar{\Theta}_{xz}\tilde{\Theta}_{yu}\right) +$$

$$+ \frac{1}{24}\tilde{\Theta}_{xy}\tilde{\Theta}_{yz}\tilde{\Theta}_{zu}\tilde{\Theta}_{xz}\tilde{\Theta}_{yu}\tilde{\Theta}_{xu}. \tag{34}$$

Общий метод, позволяющий записать τ-функции в высших порядках теории возмущений, описан в [26].

Так как функции (32)-(34) составлены из релятивистски инвариантных функций (10), то выполнение соотношения (30 б) очевидно.

Функция (32), характеризующая упорядочение двух операторов, совпадает с рассмотренными ранее функциями (8) и (12) (диаграмма для неё дана на рис.4). Для функции (33) диаграммы значений даны ниже:

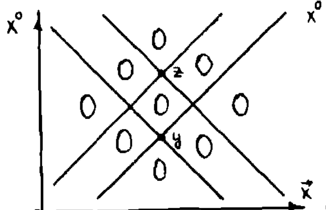

Рис. 18

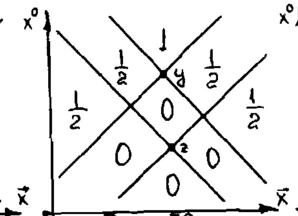

Рис. 19

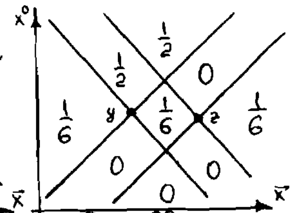

Рис. 20

Существенно отметить формальную асимметрию диаграммы на рис.20, обеспечивающую одновременно причинность и унитарность S-матрицы в третьем порядке теории возмущений. Заметим ещё, что диаграммы для четвёртого порядка (см. (34)) и выше содержат области с отрицательными значениями τ-функций.

Соотношения (30) позволяют сравнительно легко проводить анализ релятивистски ковариантных методов хронологического упорядочения.

Так, подставляя в них функции Юкавы (8) и (9), легко убедиться, что для упорядочения Юкавы в локальном пределе выполняется условие унитарности (30 в), но нарушается требование примитивной причинности (30 д), например, при $i=1$ и $j=3$. Нарушение причинности происходит потому, что отношение $x \sim y$ не обладает свойством транзитивности, т.е. условия $x \sim y$ и $y \sim z$ не накладывают никаких ограничений на интервал между точками x и z, допуская, в частности, $x < z$. Это обстоятельство впервые было отмечено в работе [17].

Подстановкой функций Коба (12), (13) и функций Гольфанда (12), (14 а) или (12), (14 б) в соотношения (30 в) и (30 д) легко убедиться, что упорядочение Коба и упорядочения Гольфанда нарушают как условие унитарности, так и условие примитивной причинности (например, для $i=1$ и $j=3$).

Таким образом, соотношения (4),(30) действительно определяют новый способ релятивистски ковариантного хронологического упорядочения, приемлемый (в отличие от всех рассмотренных ранее упорядочений) для построения S-матрицы квантово-полевых моделей с локально-некоммутативным взаимодействием (3).

5. Заключительные замечания

Проведенное в настоящей работе исследование показывает, что построение S-матрицы для локально-некоммутативных взаимодействий при выполнении основных требований теории взаимодействующих полей (релятивистской ковариантности, унитарности и причинности) может быть достигнуто методом Боголюбова при введении новой операции хронологического упорядочения. При этом к лагранжиану взаимодействия предъявляются лишь требования скалярности и эрмитовости, что позволяет использовать полученную матрицу рассеяния для широкого класса нестандартных квантово-полевых моделей (подробнее см. [18,19,24]) с локально-некоммутативными лагранжианами взаимодействия.

Предложенные в настоящей работе хронологические τ-произведения (как и хронологические T-произведения (2) стандартной теории) фактически недоопределены при совпадающих аргументах, так как соотношения (30) определяют их лишь с точностью до квазилокальных членов (подробнее см. [1-4,24]). Кроме того, результаты конкретных вычислений с рассматриваемой S-матрицей могут оказаться различными при различных интегральных представлениях многоточечных ступенчатых τ-функций, входящих в хронологические произведения (см., например, работы [16,17,23] о возможных доопределениях функции (8) на световом конусе). Поэтому, хотя предложенная выше S-матрица (1),(4) с τ-функциями, определёнными согласно (30), в случае локально-коммутативных моделей формально переходит (см. [24]) в стандартную S-матрицу (1),(2), при проведении конкретных расчётов результаты стандартной локально-коммутативной теории могут быть получены лишь при надлежащем доопределении ступенчатых τ-функций на световых конусах (значение функции τ на световом конусе должно совпадать со значением внутри конуса).

Таким образом, главным вопросом, который предстоит решить на пути практического применения построенной выше S-матрицы (1),(4),(30), является раскрытие хронологических τ-произведений, включающее в себя доопределения τ-функций на световых конусах и разработку аналога диаграммной техники для вычисления матричных элементов.

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
2. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля, М.: Наука, 1987.
3. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, М.: ИЛ, 1963.
4. Боголюбов Н.Н. Изв. АН СССР, Сер. Физ., 1955, т. 19, с. 237-246.
5. Kristensen P., Møller C. Dan. Mat.-Fys. Medd., 1952, v. 27, n. 7.
6. Bloch C. Dan. Mat.-Fys. Medd., 1952, v. 27, n. 8.
7. Медведев Б.В. ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 87-98.
8. Киржниц Д.А. ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 551-559.

9. Marnelius R. Phys. Rev., 1974, v. D10, p. 3411-3430.
10. Блохинцев Д.И. УФН, 1957, т. 61, с. 137-159.
11. Марков М.А. Гипероны и К-мезоны, М.: Физматгиз, 1958.
12. Ефимов Г.В. Квантовая теория нелокальных взаимодействий, М.: Наука, 1977.
13. Yukawa H. Phys. Rev., 1950, v. 80, p. 1047-1052.
14. Koba Z. Progr. Theor. Phys., v. 5, p. 696-717, 1950.
15. Баращенков В.С. ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 368-369.
16. Shimazu H., Hara O. Progr. Theor. Phys., 1953, v. 9, p. 137-146.
17. Yennie D.R. Phys. Rev., 1950, v. 80, p. 1053-1061.
18. Грачёв Д.Д., Дубков С.Л., Курышкин В.В. В сб. Проблемы статистической физики и теории поля, М.: Изд-во УДН, 1982, с. 157-167.
19. Курышкин В.В., Энтральго Э.Э. В сб. Проблемы квантовой теории поля, Алушта-87, Дубна: ОИЯИ, 1987, Д2-87-798, с. 35-41.
20. Saller H. Nuovo Cim., 1986, v. A95, p. 358-385.
21. Гольфанд Ю.А. ЖЭТФ, 1963, т. 45, с. 1067-1080.
22. Koshmanenko V.D. Repts. Math. Phys., 1974, v. 6, p. 213-224.
23. Peres A. Nucl. Phys., 1970, v. B23, p. 125-154.
24. Дубков С.Л., Курышкин В.В., Энтральго Э.Э. В сб. Проблемы квантовой теории поля, Алушта-84, Дубна: ОИЯИ, Д2-84-366, с. 352-360.
25. Дубков С.Л., Курышкин В.В. В сб. Проблемы статистической и квантовой физики, М.: Изд-во УДН, 1983, с. 119-123.
26. Зорин А.В. Деп. в ВИНИТИ, 1987, 14 с., № 5118-В87.
27. Зорин А.В. В сб. Актуальные проблемы квантовой механики и статистической физики, М.: Изд-во УДН, 1988, с. 43-46.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 августа 1988 года.

Зорин А.В., Курышкин В.В., Энтральго Э.Э. Р4-88-587

К построению матрицы рассеяния для локально-некоммутативных взаимодействий релятивистских полей

Показано, что ковариантная, унитарная и причинная матрица рассеяния для релятивистских квантово-полевых моделей с локально-некоммутативными лагранжианами взаимодействия может быть построена методом Боголюбова при введении новой операции ковариантного хронологического упорядочения. Установлен явный вид требуемого упорядочения, изучены его основные свойства, проведено сравнение со стандартным /нековариантным/ хронологическим произведением, а также с предлагавшимися ранее ковариантными хронологическими упорядочениями Юкавы, Кобы и Гольфанда.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод авторов

Zorin A.V., Kuryshkin V.V., Entralgo E.E. P4-88-587

On the Construction of the Scattering Matrix for Locally-Noncommutative Interactions of Relativistic Fields

It is shown that a covariant, unitary and causal scattering matrix for relativistic quantum-field models with locally-noncommutative interaction lagrangians can be constructed by the Bogolubov method when a new covariant chronological ordering operation is introduced. The explicit form for the required ordering is obtained, its main properties are studied, the comparison with the standard (noncovariant) time-ordering, as well as with the covariant chronological orderings proposed earlier by Yukawa, Koba and Golfand is performed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988