сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-88-574

В.Б.Беляев, О.И.Картавцев*, В.И.Кочкин

КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В УРАВНЕНИЯХ ЯКУБОВСКОГО

* Ташкентский госуниверситет

1988

При использовании дифференциальных уравнений Якубовского (ДУЯ) [I] в задаче 4-х тел для построения решения достаточно задать лишь парные потенциалы и соответствующие граничные условия. В то же время решение соответствующих интегральных уравнений требует предварительного построения таких величин, как 3-частичная внемассовая t -матрица, что само по себе представляет достаточно сложную проблему.

В любой численной схеме решения таких уравнений наиболее существенной является проблема аппроксимации дифференциального оператора. Традиционно для этого используется та или иная конечно-разностная схема. В частности, для решения ДУЯ такая аппроксимация использована в [2] . Значительная трудоемкость таких расчетов побуждает к поиску альтернативных методов.

В данной работе для решения ДУЯ применяется метод, предложенный в [3], суть которого сотоит в аппроксимации дифференциального оператора Δ приближенным конечномерным оператором Λ_n , обладающим следующим свойством:

$$\Lambda_n |\chi_i\rangle = \Delta |\chi_i\rangle , \quad i = \overline{1, n} , \qquad (I)$$

где $|\chi_i\rangle$ - некоторый набор линейно-независимых "пробных" функций, при построении которых необходимо учитывать граничные условия задачи. Кроме того, в отличие от конечно-разностной аппроксимации, набор $|\chi_i\rangle$ может содержать a priori известную информацию о свойствах решения [3] , что позволяет надеяться на лучшую точность аппроксимации.

Ниже будет приведен расчет длины рассеяния в канале 1+3 для системы 4-х тождественных бесспиновых частиц с парным короткодействующим потенциалом. Система ДУЯ для парных потенциалов, действующих только в состоянии $\ell = 0$, получена в работе [4] и может быть представлена в следующем виде:

$$[\Delta + E - V(x)(1+\hat{L})]|\psi\rangle = 0 , \qquad (2)$$

где

$$\Delta \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad (3)$$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \hat{K}(1+\hat{K}_2) ; & \hat{K}\cdot\hat{K}_2 \\ \hat{K}_2\cdot\hat{P}_{12} ; & \hat{P}_{12} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

а $|\psi\rangle$ – двухкомпонентная функция, в которой первая компонента соответствует разбиению I+3, а вторая – 2+2 . Операторы в (4) определены следующим образом:[x]

$$\hat{K}\psi(x,y,z) = \int_{-1}^{1} du \, \frac{xy}{x'y'} \psi(x',y',z) , \qquad (5)$$

$$\hat{K}_{1,2}\psi(x',y',z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dv \, \frac{zy'}{y''_{1,2} z''_{1,2}} \psi(x', y''_{1,2}, z''_{1,2}) , \qquad (6)$$

$$\hat{P}_{12}\psi(x,y,z) = \psi(y,x,z) , \qquad (7)$$

где приняты обозначения

$$x'^2 = \tfrac{1}{4}(x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}\,xyu) , \qquad (8)$$

$$y'^2 = \tfrac{1}{4}(3x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}\,xyu) , \qquad (9)$$

$$(y''_{1,2})^2 = y'^2\cos^2 a_{1,2} + z^2\sin^2 a_{1,2} + v y' z \sin 2a_{1,2} , \qquad (10)$$

[x] Здесь и далее для произвольной функции $f(x,y,z)$ примем обозначение $f(x,y,z) = \langle x,y,z|f\rangle$.

$$(z''_{1,2})^2 = y'^2\sin^2 a_{1,2} + z^2\cos^2 a_{1,2} - v y' z \sin 2a_{1,2} , \qquad (11)$$

$$a_1 = \arccos(1/3) , \quad a_2 = \arccos(1/\sqrt{3}) . \qquad (12)$$

Поскольку вычисляться будет длина рассеяния в канале I+3, полная энергия $E = -k^2$ принимается равной энергии связи 3-частичной системы. Граничные и асимптотические условия в этом случае имеют вид

$$\psi(0,y,z) = \psi(x,0,z) = \psi(x,y,0) = 0 , \qquad (13)$$

$$\psi(x,y,z) \xrightarrow[z\to\infty]{} (z-a)\,\Phi_3(x,y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad (14)$$

где $\Phi_3(x,y)$ – собственная функция дифференциального уравнения Фаддеева, описывающего соответствующую систему трех тел. Параметр a связан с длиной рассеяния A соотношением $a = \sqrt{\frac{3}{2}}A$.

Представляя решение задачи (2),(13),(14) в виде

$$\psi(x,y,z) = \Phi(x,y,z) + [z - a(1 - e^{-dz})]\,\Phi_3(x,y) , \qquad (15)$$

где явно выделено асимптотическое поведение решения, получим следующее уравнение для Φ :

$$[\Delta + v(x)(1+\hat{L}) - k^2]|\Phi\rangle + f = 0 , \qquad (16)$$

и Φ удовлетворяет граничным условиям вида (13) и асимптотическому условию

$$\rho\Phi \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 0 , \qquad (17)$$

где $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. В (16) $v(x) = V(x)$, $f = (f_1, f_2)$,

$$f_1 = v(x)\begin{pmatrix} \hat{K} & \hat{K} \\ \hat{K}_2 & \hat{P}'_{12} \end{pmatrix}|\Phi_3(x,y)\rangle , \qquad (18)$$

$$\hat{f}_2 = v(x)\left\{\begin{pmatrix} -d^2 e^{-dz}\,\Phi_3(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{k}\,\hat{k}_1 \\ \hat{k}_2\,\hat{P}_{12} \end{pmatrix}\Phi_3(x,y)\left(1-e^{-dz}\right)\right\}. \tag{I9}$$

Заменяя в уравнении (I) оператор Δ на Δ_n, получим решение в виде

$$\Phi = \sum c_i \varphi_i, \tag{20}$$

где c_i удовлетворяет системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{M} \langle \chi_\ell | \Delta^{-1} + w^{-1} | \chi_i \rangle c_i + \langle \chi_\ell | \Delta^{-1} | f \rangle = 0, \quad \ell = \overline{0, M}, \quad |\varphi_i\rangle = w^{-1} |\chi_i\rangle, \tag{2I}$$

а оператор W имеет вид

$$W = v(x)\left(1 + \hat{L}\right) - k^2, \tag{22}$$

Пробные функции φ_i, как и в [5], выбирались как

$$\varphi_i(x,y,z) = \Phi_i(\rho)\, \varphi_{\ell_i n_i}(x,y,z) \begin{pmatrix} \delta_{m_i 1} \\ \delta_{m_i 2} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\varphi_{\ell n}(x,y,z) = 2 c_{\ell n} P^{2n}_{2\ell+1}(\cos\beta) \sin 2n\alpha, \quad \Phi_i(\rho) = e^{-a_i\rho}\left(1 - e^{-a_i\rho}\right)^{2\ell_i+1}, \quad m_i = 1,2. \tag{24}$$

Длина рассеяния a находится из условия разрешимости (21).

В данной работе в отличие от [5] вместо приближенных выражений для оператора W и функции Грина $g(x,y,z,x',y',z') = \langle x,y,z | \Delta^{-1} | x',y',z' \rangle$ использовался их точный вид. Поэтому в расчете возникли многократные интегралы $(N = 10)$, которые вычислялись методом Монте-Карло.

Наиболее интересным результатом численных расчетов оказался факт доминирования асимптотической части 4-частичной функции,

соответствующей каналу I+3 в матричных элементах уравнений (2I). Получены два решения для длины рассеяния $a_1 = 50$ фм и $a_2 = 0{,}5$ фм. По-видимому, более предпочтительным является второе решение, так как оно, как правило, соответствует более "близкому" к точному (в смысле функционалов, определенных в [5]) оператору Δ_n.

Существующее в литературе [6] значение длины I+3 рассеяния для системы 4-х бесспиновых частиц, равное $a = 9$ фм, трудно сравнивать со значениями, полученными в данной работе, поскольку последние слабо зависят от характера приближения, осуществляемого в локализованной области конфигурационного пространства.

Литература

I. С.П.Меркурьев, С.Л.Яковлев. ДАН СССР, 262, 591 (1982).

2. Merkuriev S.P., Gignoux G., Laverne A. Ann.Phys., 1976, 99, p.30.

3. V.B.Belyaev, O.I.Kartavtsev. J.Comp.Phys. 59, 493 (1985).

4. S.P.Merkuriev, S.L.Yakovlev, C.Gignoux, Nucl.Phys. A431 (1984) 125-138.

5. Беляев В.Б., Картавцев О.И., Кочкин В.И. ОИЯИ, Р4-86-573, Дубна, 1986.

6. Kharchenko V.F., Kuzmichev V.E., Shadchin S.A., Nucl.Phys. A 226, p.71 (1974).

Рукопись поступила в издательский отдел
29 июля 1988 года.