

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P4-88-532

С.И.Виницкий, В.М.Дубовик, М.Б.Кадомцев,¹
Б.Л.Марковски, А.А.Сузько²

АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ
В КВАНТОВОЙ СИСТЕМЕ ТРЕХ ТЕЛ

Направлено в "Journal of Physics G"

¹ Институт атомной энергии, Москва

² Институт тепло- и массообмена АН БССР, Минск

1988

I. Введение и постановка задачи

Как известно, дифференциальная формулировка модифицированных уравнений Фаддеева является основным инструментом корректного численного исследования процессов рассеяния в системе трех заряженных частиц. В конфигурационном пространстве относительного движения $X = x_\alpha \in \mathcal{H} \subset \mathbb{R}^6 \setminus \{0\}$, где $\alpha = 1, 2, 3$ номер пары частиц, связанных координатой x_α , уравнения для компонент $F_\alpha(X)$ имеют вид:

$$\{-\Delta_X + V_\alpha(x_\alpha) + \sum_{\beta \neq \alpha} V_\beta^{(o)}(x_\beta, y_\beta) - E\} F_\alpha = -\hat{V}_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) \sum_{\beta \neq \alpha} F_\beta, \quad (I)$$

где функции \hat{V}_α и $V_\alpha^{(o)}$ - короткодействующие и далекодействующие части парных потенциалов $V_\alpha = \hat{V}_\alpha + V_\alpha^{(o)}/I$. Асимптотические граничные условия, отвечающие всем возможным процессам рассеяния в системе трех частиц, следуют из компактных интегральных уравнений и позволяют выделить единственное решение системы уравнений (I). Соответствующее решение исходной шредингеровской задачи

$$\{H - E\} \Psi = 0, \quad H = -\Delta_X + \sum_\alpha V_\alpha(x_\alpha) \quad (2)$$

задается суммой фаддеевских компонент

$$\Psi = \sum_{\beta} F_{\beta} \quad (3)$$

Наряду с прямыми методами численного решения краевых задач (I) и (2) можно воспользоваться методом Канторовича: приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Выберем некоторое представление в $\mathcal{H} : X \in \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{S}_{|X|}^5(\hat{X})$, в котором значения $|X|$ базы \mathcal{B} заданы через первый линейный инвариант тензора инерции

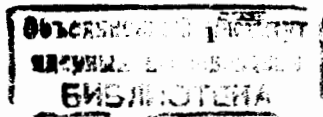
$X^2 = x_1^2 + x_2^2 : |X| = \sqrt{X^2}$ и определяют гиперрадиус "сферы" $\mathbb{S}_{|X|}^5(\hat{X})$. ii) Введем для F_β следующие разложения:

$$F_\beta(X) = \sum_j F_{\beta j}(|X|, \hat{X}) |X|^{-1} X_j(|X|), \quad (4)$$

где базисные компоненты $F_{\beta j}(|X|, \cdot) \in \mathcal{H}(|X|)$ определены как решения спектральной задачи для системы уравнений (I) на сфере $\hat{X} \in \mathbb{S}_{|X|}^5(\cdot)$ при фиксированном значении $|X| \in \mathcal{B}$:

$$\{-|X|^{-2} \Delta_\cdot + V_\alpha(|X|, \cdot) + \sum_{\beta \neq \alpha} V_\beta^{(o)}(|X|, \cdot) - E_j(|X|)\} F_{\beta j}(|X|, \cdot) = -\hat{V}_\alpha(|X|, \cdot) \sum_{\beta \neq \alpha} F_{\beta j}(|X|, \cdot). \quad (5)$$

Здесь $\Delta_\cdot = \Delta_{\hat{X}}$ - угловая часть оператора Лапласа-Бельтрами Δ_X в $\mathbb{R}^6 \setminus \{0\}$, $E_j(|X|)$ - спектральный параметр; j - набор квантовых чисел,



нумерующих спектр $\mathcal{G}(H(|X|))$ трехчастичного гамильтониана $H(|X|)$:

$$H(|X|) = -|X|^{-2}\Delta + \sum_{\alpha} V_{\alpha}(|X|, \cdot), \quad (6)$$

который действует в слое и зависит от точки $|X|$ базы B как от параметра. Решение шредингеровской задачи (2) на $\mathbb{S}_{|X|}^5(\cdot)$

$$\{H(|X|) - E_j(|X|)\} \Phi_j(|X|, \cdot) = 0 \quad (6')$$

с подходящими граничными условиями составляется подобно (3) в виде суммы базисных компонент

$$\Phi_j(|X|, \cdot) = \sum_{\beta} F_{\beta j}(|X|, \cdot) \quad (7)$$

и порождает гильбертово расслоение $\{\Phi(|X|, \cdot)\} \in \mathcal{H}(|X|) \sim L^2(\mathbb{S}_{|X|}^5(\cdot))$ с некомпактной базой B . Разложение (3), (4) с учетом (7) приобретает вид

$$\Psi(x) = \sum_j \Phi_j(|x|, \hat{x}) |x|^{-1} \chi_j(|x|). \quad (8)$$

В результате мы имеем обобщение стандартного гиперсферического адиабатического разложения^{2,3}, благодаря использованию в формулировке (2)-(8) асимптотических граничных условий, следующих из компактных интегральных уравнений. Подстановка разложения (8) в (2) приводит, согласно⁴, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов χ_j :

$$\sum_j \{-D_{ij}^2 + [E_j(|x|) + \gamma(\gamma+1)|x|^{-2} - E] \langle ij \rangle\} \chi_j = 0. \quad (9)$$

Здесь $\gamma(\gamma+1)|x|^{-2}$ - исчезающий центробежный потенциал, $\gamma = 3/2$; D_{ij} - ковариантная производная: $D_{ij} = \langle ij \rangle d_{|x|} + A_{ij}(|x|)$. Оператор A_{ij} : $A_{ij} = \langle ij \rangle d_{|x|} + \gamma |x|^{-1} \langle ij \rangle$ имеет смысл связности в ассоциированном гильбертовом расслоении $\mathcal{H}(|x|) \sim L^2(\mathbb{S}_{|x|}^5(\cdot))$ с базой B и обеспечивает согласование решений (9) с асимптотическими граничными условиями на фаддеевские компоненты $F_{\alpha}(xy)^{3,4}$. Скалярное произведение

$$\langle ij \rangle = \int d\Omega^{\gamma}(|x|, \cdot) \Phi_i(|x|, \cdot) \Phi_j(|x|, \cdot) = \delta_{ij} \quad (10)$$

задано в $L^2(\mathbb{S}_{|x|}^5(\cdot))$ с инвариантной мерой $d\Omega^{\gamma}(|x|, \cdot) = |x|^{2\gamma} d\Omega(\cdot)$. Соответственно условие полноты в $L^2(\mathbb{S}_{|x|}^5(\cdot))$ имеет вид

$$|x|^{2\gamma} \sum_i \Phi_i(|x|, \hat{x}) \Phi_i(|x|, \hat{x}) = \delta(\hat{x} - \hat{x}'). \quad (11)$$

Предложенную постановку задачи (2)-(11) можно использовать для построения корректной формулировки многоканальной теории рассеяния в системе трех заряженных частиц.

2. Адиабатический базис

Остановимся более подробно на задаче рассеяния в системе трех бесспиновых частиц с короткодействующими парными потенциалами⁵ (гл. 12) $V(|x_{\alpha\beta}|) = V_{\alpha}(|x_{\alpha\beta}|)$, $V_{\alpha}^{(0)} = 0$, сохраняющими представление L полного момента: $\vec{L} = \vec{L}_{\alpha} + \vec{L}_{\beta}$, где $\vec{L}_{\alpha} = -i x_{\alpha} \wedge \nabla_{x_{\alpha}}$ и $\vec{L}_{\beta} = -i y_{\beta} \wedge \nabla_{y_{\beta}}$ - орбитальные моменты пары α и третьей частицы. В дальнейшем набор точных квантовых чисел $L = \{L, M, \Sigma\}$ полного момента, его проекции и полной четности $\Sigma_{\alpha} = (-1)^{L_{\alpha} + 2L}$, как правило, будем опускать.

Для определенности выберем парные потенциалы V_{α} и граничные условия для задачи (6') такими, что спектр $\mathcal{G}(H(|x|))$ оператора $H(|x|)$ дискретный и состоит из двух компонент $\mathcal{G}_{\pm} U \mathcal{G}_{\pm}$, имеющих следующие асимптотики. I) При $|x| \rightarrow 0$:

$$E_{+}(|x|) \xrightarrow{|x| \rightarrow 0} E_{\kappa}^{(0)} |x|^{-2}, \quad E_{-}(|x|) \xrightarrow{|x| \rightarrow 0} E_{\kappa}^{(0)} |x|^{-2}. \quad (12)$$

Здесь $E_{\kappa}^{(0)} = \mathcal{H}(\mathcal{H}+4)$ - собственные значения (с.з.) квадрата гипермомента \mathcal{H}^2 , совпадающего с оператором $-\Delta_{\hat{x}}$ на сфере $\mathbb{S}_{|x|}^5(\hat{x})$,

$\hat{x} = \{u, \varphi, \vartheta\}$, где φ и ϑ - стандартные сферические углы якобиевских векторов x и y (см. рис.1), $u = 2\vartheta$, $0 \leq u \leq \pi$ определяется углом стереографической проекции $v = \arctg(|x|/|y|)$, $0 \leq v \leq \pi/2$ (см. рис.2)⁶:

$$\Delta_{\hat{x}} = \frac{4}{\sin^2 u} \frac{\partial}{\partial u} \sin^2 u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{2\vec{L}^2}{1 - \cos u} + \frac{2\vec{\lambda}^2}{1 + \cos u},$$

\mathcal{H} - набор квантовых чисел: $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}, \ell, \lambda\}$ - гипермомент и орбитальный момент пары и третьей частицы.

II) В пределе $|x| \rightarrow \infty$ асимптотики E_{+} и E_{-} существенно различны:

$$E_{+}(|x|) = \begin{cases} E_{+}^1(|x|) \\ E_{+}^0(|x|) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_{\alpha} + E_{\alpha 1} |x|^{-2} \\ E_{\alpha 0} |x|^{-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_{\alpha} > 0 \\ +O(|x|^{-2}) \end{cases} \\ E_{-}(|x|) = E_{-}^1(|x|) \rightarrow \{\mathcal{E}_{\alpha}^{-} + E_{\alpha 1}^{-} |x|^{-2}\} \rightarrow \{\mathcal{E}_{\alpha}^{-} < 0\}. \quad (12')$$

Как следует из (5), $E_{+}(|x| \rightarrow \infty)$ и $E_{-}(|x| \rightarrow \infty)$ - с.з. асимптотических парных гамильтонианов $h_{\alpha}(|x| \rightarrow \infty) = -|x|^{-2}\Delta + V_{\alpha}(|x|)$, действующих в слое и зависящих от точки $|x|$ базы B как от параметра, $\mathcal{E}_{\alpha} = p_{\alpha}^2 > 0$ - энергия относительного движения центра масс пары α и третьей частицы,

$$p_{\alpha}^2 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \{ (E_{\kappa}^{(0)} - E_{\ell}^{(0)}) |x|^{-2} \mid \mathcal{H}_{\alpha} \neq \mathcal{H}_0 \sim |x| \}, \quad (12'')$$

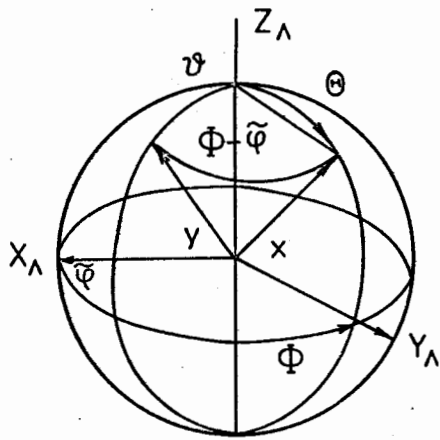


Рис. 1.

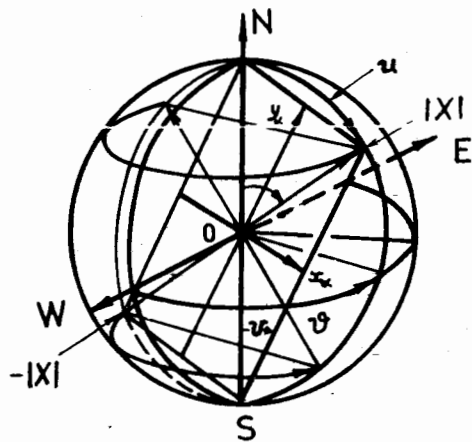


Рис. 2.

Рис.1 и 2. Изображена эффективная параметризация сферы S^5 через координаты сферы S^3 (рис.1) и координаты подходящей полусферы S^2_+ (рис.2). Отметим, что только введение (непрерывного) оператора инверсии \hat{I} позволяет дополнить параметризацию до S^5 . При этом видно, что S^5 накрывается дважды.

где $E_{\alpha_2}^{(0)} = \ell_{\alpha}(\ell_{\alpha}+1)$ - с.з. квадрата орбитального момента пары α , $E_{\alpha}^- = -\alpha_{\alpha}^2 < 0$ с.з. парных гамильтонианов $h_{\alpha} = -\Delta_{x_{\alpha}} + V_{\alpha}(x_{\alpha})$ в якоби-евской параметризации $x_{\alpha} \in \mathbb{R}_{\alpha}^3$; $E_{\alpha_1}^+$, $E_{\alpha_2}^+$ и $E_{\alpha_1}^-$ согласованы с диагональными матричными элементами оператора связности:

$$\text{I): } E_{\alpha_1}^+ + \delta(\delta+1) - \lim_{|x| \rightarrow \infty} \{ |x|^2 \text{diag } A_{++}^2(|x|) \mid \mathcal{K}_2 \geq \mathcal{K}_0 \sim |x| \} = E_{\alpha_2}^{(0)}$$

$$\text{III): } E_{\alpha_0}^+ - \lim_{|x| \rightarrow \infty} \{ |x|^2 \text{diag } A_{++}^2(|x|) \mid \mathcal{K}_1 < \mathcal{K} \leq \mathcal{K}_2 \} = E_{\alpha_2}^{(0)} \quad (I_2, \dots)$$

$$\text{IV): } E_{\alpha_1}^- + \delta(\delta+1) - \lim_{|x| \rightarrow \infty} \{ |x|^2 \text{diag } A_{--}^2(|x|) \mid 0 < \mathcal{K}_1 \leq \mathcal{K} \} = E_{\alpha_2}^{(0)}$$

где $E_{\alpha_2}^{(0)} = \lambda_{\alpha}(\lambda_{\alpha}+1)$ - с.з. квадрата орбитального момента третьей частицы.

Базисные функции задачи (6'), соответствующие с.з. E_+ и E_- будем обозначать через Φ_+ и Φ_- , комбинируя их в вектор-столбец $\Phi = \{\Phi_+, \Phi_-\}$, порождающий разбиение гильбертова расслоения \mathcal{H} : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_-$. Соотношения ортогональности (10) и полноты (11) определяют подвижный репер в $\{\mathcal{H}(|x|), \mathcal{B}\}$. В построенном гильбертовом расслоении каждой паре точек поставим в соответствие унитарный биллокальный оператор

$$U(|x'|, |x|) \Phi(|x|, \cdot) = \Phi(|x'|, \cdot) \quad (13)$$

осуществляющий параллельный перенос репера. Для определения оператора U введем аналогично ⁴⁾ спектральные проекторы \mathcal{P}_{\pm} на подпространства \mathcal{H}_{\pm} соответственно. При сделанных предположениях

$$\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_- = 1, \quad \mathcal{P}_{\pm} = \sum |\Phi_{\pm}\rangle \langle \Phi_{\pm}| \quad (14)$$

этим операторам соответствуют конечномерные проекторы из \mathcal{H} в \mathcal{H}_{\pm} :

$$\Pi_{\pm} = \frac{1}{2} (\mathcal{G}_1 + i \mathcal{G}_2), \quad (14')$$

где $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ - матрицы Паули. Тогда U приобретает блочный вид:

$$U = \begin{pmatrix} U_{++} & U_{+-} \\ U_{-+} & U_{--} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Введенные таким образом операторы U позволяют явно задать структуру гильбертова расслоения \mathcal{H} .

Адиабатический базис $|i\rangle$ в каждой точке $|x|$ базы \mathcal{B} классифицируется набором трех точных квантовых чисел $L = \{LM\}$ и трех приближенных $\hat{i} = \{i_1, i_2, i_3\}$, смысл которых устанавливается в предельных окрестностях \mathcal{B} : $|x| \rightarrow 0$ и $|x| \rightarrow \infty$. Правила соответствия между наборами асимптотических квантовых чисел $\hat{i}(0)$ и $\hat{i}(\infty)$ - корреляционные диаграммы - задаются оператором перехода $U(\infty, 0)$:

I) В пределе малых $|X|$ правильные функции нулевого приближения $\Phi(|X| \rightarrow 0, \cdot) \approx |X|^{-\delta} \Phi(0, \cdot)$, учитывающие поправку на возмущение $\sum V_\alpha(|X|, u_\alpha)$ определяются линейными комбинациями свободных гиперсферических функций $\Phi_K(\cdot) \in L^2(\mathbb{S}^5(\hat{x}))$: $\sum_K^2 \Phi_K = \mathcal{H}(\mathcal{H}+1) \Phi_K$

при фиксированном значении $K = 2N + l + \lambda$, N - число узлов $\Phi_K = C_K \sin^l u \cos^\lambda v P_{N+1/2, \lambda+1/2}^{(2v)} Y_{\ell, \lambda}^l(\hat{x}, \hat{y})$ по переменной $v = u/2$, $Y_{\ell, \lambda}^l$ - бисферический базис в $L^2(\mathbb{S}^2(\hat{x}) \times \mathbb{S}^2(\hat{y})) / \mathbb{R}$. Таким образом, $\hat{\mathcal{H}}(0) = \{ \mathcal{H}, \nu = \nu(\ell, \lambda) \}$,

ν - номер линейной комбинации. Отметим, что оператор полной инверсии \hat{I} на \mathbb{S}^5 и, в частности, на $\mathbb{S}^5(\hat{x})$, $\hat{x} = \{u, \hat{x}, \hat{y}\}$ отличается от оператора полной четности $\mathcal{P} = \mathcal{P}_x \mathcal{P}_y$ на четырехмерном торе $\mathbb{S}^2(\hat{x}) \times \mathbb{S}^2(\hat{y})$:

$$\hat{I} = \hat{I}_u \mathcal{P} \hat{I}_u = \hat{I}_u \mathcal{P}_x \mathcal{P}_y \hat{I}_u, \quad (16)$$

где $\hat{I}_u : u \rightarrow \hat{\pi} - u$ - оператор отражения на сфере $\mathbb{S}^2(u, \nu)$, $\hat{\pi} \equiv \mathcal{O} \hat{x} \mathcal{O} = \mathcal{O}(\hat{x}, \hat{y})$ (см. рис.2). Собственные значения \mathcal{S} этих операторов, вообще говоря, различны, хотя и совпадают формально при их действии на свободные гиперсферические функции $\Phi_K : 2N + l + \lambda = K$

$$\mathcal{S}_\mathcal{P} = (-1)^{l+\lambda} = \mathcal{S}_\mathcal{I} = (-1)^K = (-1)^K$$

II) В пределе $|X| \rightarrow \infty$ функции $\Phi(|X|, \cdot) = |X|^{-\delta} \Phi(\infty, \cdot)$ являются решениями задачи на собственные значения для асимптотических парных гамильтонианов $h_\alpha(|X| \rightarrow \infty)$ на $\mathbb{S}^5(\hat{x})$, $\hat{x} = \{u, \hat{x}, \hat{y}\}$:

$$L_\alpha \otimes h_\alpha(|X| \rightarrow \infty) \Phi(|X|, \cdot) = E(|X|) \Phi(|X|, \cdot).$$

Вектор Φ_\pm составлен из двух Φ_\pm^0 и Φ_\pm^1 . Функции Φ_\pm^0 переходят при $|X| \rightarrow \infty$ в свободные гиперсферические функции $\Phi_{\alpha K}^0(|X|, \cdot) \approx |X|^{-\delta} \Phi_{\alpha K}^0(\infty, \cdot)$, искаженные поправкой $\Phi_{\alpha K}^0(\infty, \cdot) = \Phi_{\alpha K}(\cdot) + \Delta \Phi_{\alpha K}(|X|)$ на парный потенциал $V_\alpha(|X|, u_\alpha)$, согласованной с (12'''), т.е.

$$\hat{\mathcal{H}}_\pm^0 = \{ \alpha, K \} = \{ \mathcal{H}_\alpha, \alpha_\alpha \}, \quad \alpha_\alpha = \{ \ell_\alpha, \lambda_\alpha \}, \quad \mathcal{H}_\alpha < \mathcal{H} < \mathcal{H}_0.$$

III) Функция $\Phi_\pm^1(|X|, \cdot)$ классифицируется тем же набором квантовых чисел $\hat{\mathcal{H}}_\pm^1 = \{ \alpha, K \}$ при $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_0$ и для них имеет место представление, $\omega_{\alpha\lambda} \in \mathbb{S}^3(u_\alpha, \hat{x}_\alpha)$:

$$\Phi_\pm^1(|X| \rightarrow \infty, \cdot) = \sum_{m_\lambda} \varphi_{\alpha \mathcal{H} \lambda m_\lambda}(|X| \rightarrow \infty, \omega_{\alpha\lambda}) \eta_{\alpha \lambda m_\lambda}^L(\hat{x}_\alpha), \quad (17)$$

где $\eta_{\alpha \lambda m_\lambda}^L = (Y_{\ell_\lambda m_\lambda} \cdot Y_{\ell_\lambda}^L)$ - базис приведенных шаровых функций в $L^2(\mathbb{S}^2(\hat{x}_\alpha)) / \mathbb{R}$. Коэффициенты $\varphi_{\alpha \mathcal{H} \lambda m_\lambda}$ в пределе $|X| \rightarrow \infty$ переходят в решения $\varphi_{\alpha \mathcal{H} \lambda m_\lambda}$ уравнения

$$(-\Delta_{x_\alpha} - \mathcal{E}_\alpha) \varphi_{\alpha \mathcal{H} \lambda m_\lambda}(|X|, u_\alpha) = 0,$$

описывающего свободное движение центра масс пары α по $x_\alpha \in \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{S}^2(\hat{x}_\alpha) \subset \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{S}^2(\hat{x}_\alpha)$ с энергией $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}_\alpha > 0$, определенной согласно (12''').

Таким образом, вектор $\Phi_\pm^1(\infty, \cdot)$ можно характеризовать набором $\hat{\mathcal{H}}_\pm^1 = \{ \alpha, \mathcal{H} \}$, принимая во внимание, что $|\alpha, \mathcal{H}|$, определенное в (12'''), пробегает счетное число значений.

IV) Для функций $\Phi_\pm(|X| \rightarrow \infty, \cdot)$ имеет место представление $\omega_{\alpha\lambda} \in \mathbb{S}^3(u_\alpha, \hat{x}_\alpha)$:

$$\Phi_\pm(|X| \rightarrow \infty, \cdot) = \sum_{m_\lambda} \varphi_{\alpha n \ell m_\lambda}(|X| \rightarrow \infty, \omega_{\alpha\lambda}) D_{\alpha \ell m_\lambda}^L(\hat{x}_\alpha), \quad (17')$$

где $\eta_{\alpha \ell m_\lambda}^L = (Y_{\ell m_\lambda} \cdot Y_{\ell_\lambda}^L)$ - базис приведенных шаровых функций в $L^2(\mathbb{S}^2(\hat{x}_\alpha))$. Коэффициенты $\varphi_{\alpha n \ell m_\lambda}$ в пределе $|X| \rightarrow \infty$ переходят в собственные функции $\varphi_A(\alpha_\alpha)$ состояний $A = | \alpha n \ell m_\lambda \rangle$, $n \in n_\alpha$ - главное квантовое число дискретного спектра $\mathcal{E}_\alpha(h_\alpha)$ парных гамильтонианов h_α :

$$(-\Delta_{x_\alpha} + V_\alpha(|x_\alpha|) + \mathcal{E}_A^-) \varphi_A(x_\alpha) = 0,$$

описывающих связанное состояние пары α в $x_\alpha \in \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{S}^2(\hat{x}_\alpha) \subset \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{S}^2(\hat{x}_\alpha)$ с энергией $\mathcal{E}_A = -\mathcal{E}_A^- < 0$. Таким образом, вектор $\Phi_\pm(\infty, \cdot)$ характеризуется набором $\hat{\mathcal{H}}_\pm = \{ \alpha, n \ell \} \equiv \{ n_\alpha, \alpha_\alpha \}$, $\alpha_\alpha = \{ \ell_\alpha, \lambda_\alpha \}$, который получается из A заменой $m_\ell \rightarrow \lambda$.

Введенная классификация состояний $|i\rangle$ и разбиение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ с помощью проекторов (14) позволяют представить адиабатическое разложение (8) в пределе $|X| \rightarrow \infty$ при фиксированном \mathcal{L} в виде:

$$\begin{aligned} \Psi_{\hat{i}}^{as}(X, |p|) &\approx \sum_{\hat{j}_+} \Phi_{\hat{j}_+}(|X| \rightarrow \infty, \hat{x}) |X|^{-1} \chi_{\hat{j}_+}^{as}(|X|, |p|) + \\ &+ \sum_{\hat{j}_+} \Phi_{\hat{j}_+}(\infty, \hat{x}) |X|^{-1-\delta} \chi_{\hat{j}_+}^{as}(|X|, |p|) + \sum_{\hat{j}_-} \Phi_{\hat{j}_-}(|X| \rightarrow \infty, \hat{x}) |X|^{-1} \chi_{\hat{j}_-}^{as}(|X|, |p|) \\ &= \Psi_{\hat{i}}^{as} + \Psi_{\alpha \hat{i}}^{as} + \Psi_{-\hat{i}}^{as} = \Psi_{+\hat{i}}^{as} + \Psi_{-\hat{i}}^{as}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь первый мультииндекс \hat{j} радиальной функции χ отвечает каналовой компоненте, второй \hat{i} нумерует начальное состояние системы. Асимптотическое разложение Ψ позволяет разделить состояния Ψ_+ главного канала развала на три части $E = E_0 + P^2 \in [0, \infty)$ от состояний Ψ_- с кластеризацией частиц $E = E_A(P_A) = P_A^2 + \mathcal{E}_A \in [-\mathcal{E}_A^2, \infty)$. Более детальное разбиение Ψ_+ на Ψ_{+1} и Ψ_{+0} дает возможность явно выделить вклады известных однократных эйконолов в Ψ_{+1} , для которых $\chi_{\hat{j}_+ \hat{i}_+}^{(1)}$ имеют асимптотику:

$$\chi_{\hat{j}_+ \hat{i}_+}^{(1)}(|X|, |k|) \approx (2i)^{-1} e^{\pm i|X||k|} S_{\hat{j}_+ \hat{i}_+}^{(1)}(|k|),$$

где $S_{\hat{j}_+ \hat{i}_+}^{(1)}$ - матрица рассеяния на парном потенциале $V_\alpha(|X|, u_\alpha)$ при энергии $\mathcal{E}_\alpha = k_\alpha^2 = E - \mathcal{E}_\alpha$. Для наиболее важных $2 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$ процессов перерассеяние несущественно. Для процессов $3 \rightarrow 3$ и $3 \rightarrow 2$ однократные

эйконы $\hat{\Psi}_+$ следует "исключить", используя технику проецирования^{4/}, и задать трехчастичную матрицу рассеяния на физических состояниях $|0+\rangle$ и $|-\rangle$. При необходимости можно явно выделить вклад от возникающего эффективного потенциала, используя второе борновское приближение для парной амплитуды. Указанная процедура соответствует выделению из $\hat{\Psi}_+$ однократных и двукратных эйконов и позволяет остаться в классе решений, который в пределе $|X| \rightarrow \infty$ можно вложить в класс $S_{E,\epsilon}$, определенный в ^{1/}. Таким образом, в двухкомпонентном разбиении $|+\rangle$ и $|-\rangle$ выделяются физические состояния рассеяния, необходимые для однозначного определения амплитуды рассеяния в системе трех частиц.

3. Система радиальных уравнений

Перепишем разложение (8) для L_+ -парциальной волновой функции

$$\hat{\Psi}_\xi = \sum_j \Phi_j |x|^{-1} \hat{\chi}_{j\xi} = (\hat{\Phi} |x|^{-1} \hat{\chi})_\xi, \quad (8')$$

явно разделяя состояния развала $\hat{\Psi}_+$ и кластерные состояния $\hat{\Psi}_-$:

$$\hat{\Psi}_\xi = \hat{\Psi}_{+\xi} + \hat{\Psi}_{-\xi} = \sum_{j+} \Phi_{j+} |x|^{-1} \hat{\chi}_{j+\xi} + \sum_{j-} \Phi_{j-} |x|^{-1} \hat{\chi}_{j-\xi}. \quad (8'')$$

Полная физическая волновая функция Ψ_ξ^{ph} , описывающая "состояния рассеяния" при фиксированном направлении \hat{P}_ξ импульса P_ξ падающей шестимерной плоской $|\xi=\alpha\rangle$ или кластерной $|\xi=n_\alpha\rangle$ волны, имеет вид:

$$\Psi_\xi^{ph}(x, P_\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sum_{I \in \mathcal{I}} \Psi_{\xi I}^{(ph)}(x, |p|) \Phi_{\xi I}^L(\infty, \hat{P}_\xi) |P_\xi|^{-1-\gamma} \quad (I9)$$

Здесь мультииндекс I равен: $I = \hat{i}_+(\infty)$ при $\xi = \alpha$ и $I = \alpha$ при $\xi = n_\alpha$. Диагональная матрица импульсов $|p|$ задана в соответствии с разбиением (I4') в 2x2 блочном виде

$$|p| = \begin{pmatrix} |p_{+1} & 0 \\ 0 & |p_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_\infty 1_+ - \hat{E}_+(\infty)} & 0 \\ 0 & \sqrt{E_\infty 1_- - \hat{E}_-(\infty)} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Здесь $|p_{\pm 1} = \{ |p_{\pm 1}^1, |p_{\pm 1}^0 \}$ - диагональная матрица модулей импульсов трех свободных частиц с энергией E : $|p_{+1}^1| = |k_2| = \sqrt{E - p_2^2}$ - модули импульсов относительного движения в паре α при заданном импульсе p_α свободного движения третьей частицы, $|p_{+1}^0|$ - модуль импульса $|P| = \sqrt{E}$ трех свободных частиц ($E_+(\infty) = 0$), $|p_{-1}|$ - матрица модулей импульсов $|P_A| = \sqrt{E - E_A}$ относительного движения центров масс фрагментов α с внутренней энергией $E_A = -\alpha \epsilon_A^2 < 0$. Радиальная функция $\hat{\chi}$ представлена также в блочном 2x2 виде:

$$\hat{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{++} & \chi_{+-} \\ \chi_{-+} & \chi_{--} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Подстановка (8'') в уравнение Шредингера (2) и проецирование на полную систему функций $\hat{\Phi}$ согласно (I3)-(I5) позволяет осуществить блочное 2x2 разбиение в системе уравнений (9):

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Phi} | \{ -|x|^{-5} \partial_{|x|} |x|^5 \partial_{|x|} + H(|x|) - E \} (1 + \Pi_+ + \Pi_-) \hat{\Psi} \rangle &= \\ = \{ -D^2(|x|) + U(|x|) - P^2 \} \hat{\chi}(|x|, |p|) &= 0. \quad (9') \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения: $D(|x|) = \Delta \partial_{|x|} + A(|x|)$ - ковариантная производная, $A = -A^\dagger = \langle e | U \partial_{|x|} U | e \rangle + \gamma |x|^{-1} \partial_{|x|}$ - оператор связности в ассоциированном гильбертовом расслоении $\{ e \equiv \Phi(|x|, \cdot) \} \in \{ \mathcal{H}(|x|), \mathcal{B} \}$, $\mathcal{H}(|x|) \sim L^2(\mathcal{S}_{|x|}^5(\cdot))$, $U^\dagger = U^{-1}$ принадлежит семейству операторов параллельного переноса (I3): $U(|x|) \equiv U(|x|, |x|)$ в каждой фиксированной точке $|x| \in \mathcal{B}$, $U(|x|) = \hat{E}(|x|) - \hat{E}(\infty) + \gamma(\gamma+1)|x|^{-2} \otimes \mathbb{1}$ - эффективный оператор потенциальной энергии, $\mathbb{1} = \langle e | U^{-1} U | e \rangle$ - единичный оператор. Появление полюсных членов $\sim |x|^{-1}$ и $\sim |x|^{-2}$ связано с выбором меры интегрирования $d\Omega^5(|x|, \cdot) = |x|^{2\delta} d\Omega^5(\cdot)$ в скалярном произведении (I0). Принимая во внимание блочную 2x2 структуру (I5) оператора U , имеем явное 2x2 блочное представление для системы уравнений (9'):

$$\begin{pmatrix} -D_{++}^2 + U_{++} - P_{+}^2 & -dA_{+-} - A_{+-}d - (A_{+-})^2 \\ -dA_{-+} - A_{-+}d - (A_{-+})^2 & -D_{--}^2 + U_{--} - P_{--}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{++} & \chi_{+-} \\ \chi_{-+} & \chi_{--} \end{pmatrix} = 0. \quad (9'')$$

Теперь "состояния рассеяния"^{*} можно описать с помощью Ψ_ξ (I9), требуя надлежащие асимптотики решений $\hat{\chi}$, которые обеспечивают в пределе $|x| \rightarrow \infty$ переход Ψ_ξ за вычетом заданных в $\mathcal{H} = R_+^4 \times \mathcal{S}_{|x|}^5$ падающей шестимерной плоской волны $|\xi=\alpha\rangle$ и однократных эйконов или шестимерной кластерной $|\xi=n_\alpha\rangle$ волны, в класс $S_{E,\epsilon}$, определенный в ^{1/} (гл. IV и VI). Они устанавливаются согласованием разложений (I9), (I8), спроецированных на открытые каналы с физическими асимптотическими условиями на фаддеевские компоненты (I), (4) и имеют вид:

* Как известно, функции Ψ_ξ , описывающие "состояния рассеяния", не являются элементами \mathcal{H} , и их последовательное рассмотрение должно проводиться в рамках формализма интегральных уравнений Фаддеева в подходящих банаховых пространствах. С учетом этого замечания решения $\hat{\chi}$ системы уравнений (9'') можно, не опасаясь недоразумений, рассматривать в смысле, указанном в ^{8/}.

$$\begin{aligned} \chi_{++}^{rh} &\approx -(2i)^{-1} \left\{ e^{-i(x||p_+ - \sqrt{2}r)} - e^{i(x||p_+ - \sqrt{2}r)} \right\} \frac{1}{|p_+|} \hat{S}_{++} |p_+|^{1/2}, \\ \chi_{-+}^{rh} &\approx (2i)^{-1} e^{i(x||p_+ - \sqrt{2}r)} |p_+|^{-1/2} \hat{S}_{-+} |p_+|^{1/2}, \\ \chi_{+-}^{rh} &\approx (2i)^{-1} e^{i(x||p_+ - \sqrt{2}r)} |p_+|^{-1/2} \hat{S}_{+-} |p_+|^{1/2}, \\ \chi_{--}^{rh} &\approx -(2i)^{-1} \left\{ e^{-i(x||p_+ - \sqrt{2}r)} - e^{i(x||p_+ - \sqrt{2}r)} \right\} \frac{1}{|p_+|} \hat{S}_{--} |p_+|^{1/2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Решение системы уравнений (9'') с асимптотическими условиями (22) позволяет найти матричные элементы унитарного оператора рассеяния $\hat{S} = S \hat{I}$, где \hat{I} - оператор полной инверсии (I6) в $\mathcal{H} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}_{x_1}^2$, а S -матрица действует как интегральный оператор на единичной сфере, и, следовательно, позволяет определить амплитуды рассеяния всех возможных процессов рассеяния в системе трех частиц с быстроубывающими парными потенциалами.

4. Радиальные решения

Для исследования структуры решений χ обратимся к стандартной процедуре, использующей матричные решения Йоста^{5,10}. Прежде всего, введем регулярные решения χ^{reg} для системы радиальных уравнений (9') с граничными условиями при $|x| \rightarrow 0$:

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \chi^{reg} \partial^{\alpha} (|x||p|) |x|^{-\alpha} = \mathbb{1}. \quad (23)$$

(Здесь и далее знак матричности "а" для χ , заданной (2I), будем опускать.) Выполнение этого условия обеспечивается асимптотикой (I2) $U(x|x_1) \approx_{|x_1 \rightarrow 0} [E_{\mathcal{H}} + \delta(x_1) \circ \mathbb{1}] |x|^{-2}$ и регулярным поведением $A(x|x_1)$ и $d_{|x_1} \chi(x|x_1, |p|)$ при $|x| \rightarrow 0$. Матрица регулярных решений представляется в виде линейной комбинации матричных решений Йоста

$$\chi^{reg} = -(2i)^{-1} \{ F_-(x|x_1, |p|) |p|^{-1} F_+(|p|) - F_+(x|x_1, |p|) |p|^{-1} F_-(|p|) \}, \quad (24)$$

которые удовлетворяют системе уравнений (9') и граничным условиям

$$F_{\pm}(x|x_1, |p|) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \mathbb{1} \otimes e^{\pm i(x||p| - \sqrt{2}r)}. \quad (25)$$

Здесь и далее знак "+" и "-" отвечает расходящимся и сходящимся волнам. Матричная функция Йоста по определению равна

$$\begin{aligned} F_{\pm}(|p|) &= W \{ F_{\pm}(x|x_1, |p|), \chi^{reg}(x|x_1, |p|) \} = \\ &= \hat{F}_{\pm}(x|x_1, |p|) D(x|x_1) \chi^{reg}(x|x_1, |p|) - \{ D(x|x_1) F_{\pm}(x|x_1, |p|) \} \chi^{reg}(x|x_1, |p|). \end{aligned}$$

Здесь знак \sim означает транспонирование; $F_{\pm}(|p|)$ связана с асимптотической $\hat{F}_{\pm}(x|x_1, |p|)$ соотношением

$$F_{\pm}(|p|) = 2(\mathcal{K} + \delta + \gamma/2) \lim_{|x| \rightarrow 0} |x|^{-\mathcal{K} + \gamma} \hat{F}_{\pm}(x|x_1, |p|).$$

Таким образом, регулярные решения χ^{reg} нормированы условием

$$(2/\pi) \int \tilde{\chi}^{reg}(x|x_1, |p|) \chi^{reg}(x|x_1, |p'|) = |p|^{-2} \delta(|p| - |p'|)$$

и имеют асимптотическое поведение

$$\chi^{reg} \approx_{|x||p| \rightarrow \infty} -(2i)^{-1} |p|^{-1} \left\{ e^{-i(x||p| - \sqrt{2}r)} F_+(|p|) - e^{i(x||p| - \sqrt{2}r)} F_-(|p|) \right\}.$$

Физические решения выражаются через регулярные обычным образом

$$\begin{aligned} \chi^{rh} &= \chi^{reg} F_+^{-1}(|p|) |p| = \\ &= -(2i)^{-1} \{ F_-(x|x_1, |p|) - F_+(x|x_1, |p|) \hat{S}(|p|) \} \rightarrow \\ &\rightarrow -(2i)^{-1} \left\{ \mathbb{1} \otimes e^{-i(x||p| - \sqrt{2}r)} - e^{i(x||p| - \sqrt{2}r)} \hat{S}(|p|) \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Матричные функции Йоста задают матрицу рассеяния

$$\hat{S} = |p|^{-1} F_-(|p|) F_+^{-1}(|p|) |p|. \quad (27)$$

Как следствие равенства $-W \{ \chi^{reg}, \chi^{reg} \} = 0$, имеем известные соотношения

$$\hat{F}_+ |p|^{-1} F_- = \hat{F}_- |p|^{-1} F_+, \quad |p|^{-1} F_- F_+^{-1} |p| = \hat{F}_+^{-1} \hat{F}_-.$$

Они позволяют ввести симметричную $\hat{S} \equiv \hat{S}(|p|)$ матрицу:

$$\hat{S} = |p|^{1/2} \hat{S} |p|^{-1/2}, \quad \hat{S}^{-1} = \hat{S}. \quad (28)$$

В результате стандартного проецирования на открытые каналы из симметричной \hat{S} -матрицы выделяется унитарная \hat{S} -матрица

$$\hat{S}^+ \hat{S} = \hat{S} \hat{S}^+ = \mathbb{1} \quad (29)$$

и соответствующие ей физические решения

$$\chi^{rh} = -(2i)^{-1} \{ F_-(x|x_1, |p|) - F_+(x|x_1, |p|) |p|^{-1/2} \hat{S} |p|^{1/2} \} \quad (30)$$

Они удовлетворяют соотношению ортогональности и полноты:

$$\begin{aligned} (2/\pi) \int d|x| \tilde{\chi}^{rh}(x|x_1, |p|) \chi^{rh}(x|x_1, |p'|) &= \delta(|p| - |p'|), \\ (2/\pi) \int_0^{\infty} d|p| \tilde{\chi}^{rh}(x|x_1, |p|) \chi^{rh}(x|x_1, |p|) &+ \sum_n \tilde{\chi}^{rh}(x|x_1) \chi^{rh}(x|x_1) = \delta(|x| - |x_1|). \end{aligned} \quad (31)$$

(n нумерует дискретный спектр $\mathcal{E}_d(\mathcal{H})$ гамильтониана \mathcal{H}) и имеют асимптотическое поведение

$$\chi^{rh} \rightarrow_{|x||p| \rightarrow \infty} -(2i)^{-1} \left\{ \mathbb{1} \otimes e^{-i(x||p| - \sqrt{2}r)} - e^{i(x||p| - \sqrt{2}r)} |p|^{-1/2} \hat{S} |p|^{1/2} \right\} \quad (30)$$

Фиксация граничных условий (3I) приводит к сохранению радиального тока

$$d_{|x|} J = 0, \quad J = -i W \{ \chi^{rh}, \chi^{rh} \}, \quad (32)$$

т.е. обеспечивает сохранение потока вероятности, необходимое для вычисления сечений процессов рассеяния. При этом унитарный произвол в калибровке радиальных функций $\chi' \Rightarrow \chi = U\chi'$ оставляет W инвариантным. Отсюда следует, что равенство $d_{\chi} W = 0$ также калибровочно инвариантно. Калибровочный произвол формально позволяет привести систему уравнений (9') к стандартному виду

$$\left\{ -d_{\chi}^2 - UVU^{-1} - P^2 \right\} \chi' = 0$$

и использовать для доказательства соотношений ортогональности и полноты (31) решений χ' известную процедуру (5').

Для вычисления \hat{S} -матрицы удобно перейти к представлению собственных фазовых сдвигов $S(\text{Im} S = 0)$:

$$\hat{S} B = B e^{2iS}, \quad F_{\pm} = |p|^{1/2} B e^{\mp iS}, \quad (33)$$

где B - ортогональная матрица:

$$B \hat{B} = 1, \quad B = |p|^{-1/2} \text{Re} (F_{\pm} (|p| e^{\pm iS})).$$

Физическая волновая функция (8'), (22)

$$\Psi^{ph} = \Psi^{ph}(\chi, |p|) = \tilde{\Phi}(\chi, \hat{\chi}) |\chi|^{-1} \chi^{ph}(\chi, |p|)$$

в представлении собственных фазовых сдвигов S .

$$\Psi^{ph} = \Psi^{ph} B \rightarrow - (2i)^{-1} |\chi|^{-1} \tilde{\Phi}(\chi, \hat{\chi}) \cdot (e^{-i(\chi|p| - \pi/2)} B - e^{i(\chi|p| - \pi/2)} B e^{2iS}) \quad (34)$$

содержит падающие волны во всех каналах, а коэффициенты B играют роль параметров смешивания. Преобразование Кели для \hat{S} -матрицы дает возможность работать с вещественной и симметричной K -матрицей

$$KB = B \hat{S} B.$$

Таким образом, решение радиальных уравнений (9'') дает возможность построить унитарную парциальную \hat{S} -матрицу (29), (28) системы трех сильно взаимодействующих частиц при наличии каналов трехчастичного развала $|+\rangle$ и перераспределения $|-\rangle$:

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{++} & \hat{S}_{+-} \\ \hat{S}_{-+} & \hat{S}_{--} \end{pmatrix}. \quad (29')$$

При этом, согласно (26), (27) как для каналов развала, так и перераспределения, \hat{S} -матрица определяется единообразно: амплитудой падающей волны F_{\pm}^{-1} , распространяющейся из $|in\rangle$ состояния к окрестности точки тройного соударения $|\chi| \leq 1$, где происходит перемешивание состояний, и амплитудой расходящейся волны F_{\pm} , распростра-

нящейся в $|out\rangle$ состоянии. Наше продвижение обусловлено использованием инвариантной адиабатической переменной $|\chi| = \sqrt{x^2 + y^2}$, эффективно характеризующей состояние между фрагментами в $|in\rangle$ и $|out\rangle$ состояниях и построением "глобального" адиабатического разложения (19) волновой функции $\Psi_{\xi}(x, P_{\xi})$ в виде суммы локальных адиабатических разложений для фаддеевских компонент $F_{\beta\xi}(x, P_{\xi})$. Напомним, что в классических руководствах обычно отмечают, что невозможна корректная формулировка многоканальной задачи рассеяния с перераспределением и выше трехчастичного порога развала в рамках каких-либо радиальных уравнений (см., например, (5'), стр. 468).

5. Амплитуда рассеяния

Полная волновая функция $\Psi_{\xi}^{ph}(x, P_{\xi})$ (19) с физическими асимптотическими условиями (22) должна описывать процессы рассеяния в $\mathcal{H} = R_+^1 \times S_{\chi}^5$, при фиксированной энергии E и направлении \hat{P}_{ξ} импульса P_{ξ} падающей шестимерной плоской $|\xi = \alpha\rangle$ или кластерной $|\xi = n_{\alpha}\rangle$ волны:

$$\Psi_{\xi}^{ph}(x, P_{\xi}) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \sum_{L \in I, \xi'} \phi_{\xi' I}^h(x, \hat{\chi}) |\chi|^{-1} \chi_{\xi' I}^{ph}(\chi, |p|) \phi_{\xi' I}^h(\omega, \hat{P}_{\xi}) |p|. \quad (19')$$

Вклады падающих волн $|\xi\rangle$ формально выделяются, если в асимптотике физической радиальной функции $\chi^{ph} = \chi_{\xi' I}^{ph}(\chi, |p|)$, заданной (30)-(31), добавить и вычесть радиальную составляющую $|\xi\rangle$:

$$\chi^{ph} = - (2i)^{-1} \left\{ \mu e^{-i(\chi|p| - \pi/2)} - e^{i(\chi|p| - \pi/2)} I \right\} + e^{i(\chi|p| - \pi/2)} \left\{ |p|^{-1/2} \hat{S} |p|^{1/2} - I \right\} (2i)^{-1}, \quad (30'')$$

где I - матричные элементы оператора \hat{I} полной инверсии (16) в $\mathcal{H} = R_+^1 \times S_{\chi}^5$. Полная амплитуда перехода $f_{\xi' \xi}$ из состояния $|\xi\rangle$ системы трех частиц в состояние $|\xi'\rangle$ определяется через унитарную \hat{S} матрицу (29):

$$f_{\xi' \xi}^h(\hat{\chi}, P_{\xi}) = 4\pi \sum_{L \in I, \xi'} \phi_{\xi' I}^h(\omega, \hat{\chi}) f_{\xi' I, \xi I}^h(|p|) \phi_{\xi I}^h(\omega, P_{\xi}) \quad (35)$$

где

$$f_{\xi' I, \xi I}^h(|p|) = \left\{ \hat{S}(|p|) - \hat{I} \right\}_{\xi' I, \xi I}^{-1} (2i)^{-1} |p|^{-1-2\beta(\xi)} \quad (36)$$

инвариантная унитарная парциальная амплитуда, индекс $\beta(\xi)$ равен: $\beta(\alpha) = \delta$ и $\beta(n_{\alpha}) = 0$.

В качестве иллюстрации рассмотрим реакцию $2 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$ с кластером α в начальном состоянии $|A\rangle$.

Для процессов $2 \rightarrow 2$ амплитуда перехода f_{BA} из состояния $A = |n_{\alpha} m_{\alpha}\rangle$ одного кластера α в состояние $B = |n_{\beta} m_{\beta}\rangle$ другого кластера β получается усреднением полной амплитуды по асимптотическим состояниям $|A\rangle$ и $|B\rangle$:

$$f_{BA} = \iint d\omega_{\beta} \Psi_{\beta}(\infty, \omega_{\beta}) f_{n_{\beta} m_{\beta}}(\hat{X}, P_{n_{\beta}}) \Psi_{\alpha}(\infty, \omega_{\alpha}) d\omega_{\alpha} \quad (37)$$

Используя асимптотическое представление (17) для кластерных функций $\Phi_{n_{\alpha} m_{\alpha}}^L(\infty, \omega_{\alpha})$ и свойство ортогональности состояний, имеем

$$f_{BA}(\hat{Y}_{\beta}, P_A) = 4\pi \sum_{l_{\beta} m_{\beta} \lambda_{\beta}} \eta_{l_{\beta} m_{\beta} \lambda_{\beta}}^L(\hat{Y}_{\beta}) f_{n_{\beta} m_{\beta} \lambda_{\beta}}^L(l_{\beta}) \eta_{l_{\alpha} m_{\alpha} \lambda_{\alpha}}^L(-\hat{P}_A) \quad (37')$$

Амплитуда процессов $2 \rightarrow 3$ выше трехчастичного порога развала f_{0A} из состояния $|A\rangle$ кластера α во все допустимые состояния свободного движения $|0\rangle$ с фиксированной энергией E находится в результате усреднения полной амплитуды

$$f_{0n_{\alpha}}(\hat{X}, P_{n_{\alpha}}) = \sum_{\beta} f_{\beta n_{\alpha}}(\hat{X}, P_{n_{\alpha}}) \quad (38)$$

по асимптотическим состояниям

$$f_{0A}(\hat{X}, P_A) = \int d\omega_{\alpha} f_{0n_{\alpha}}(\hat{X}, P_{n_{\alpha}}) \Psi_{\alpha}(\infty, \omega_{\alpha}) \quad (39)$$

Выполняя необходимое интегрирование, имеем:

$$f_{0A}(\hat{X}, P_A) = 4\pi \sum_{l_{\alpha} m_{\alpha} \lambda_{\alpha}} \Phi_{\alpha}^L(\infty, \hat{X}) f_{l_{\alpha} m_{\alpha} \lambda_{\alpha}}^L(l_{\alpha}) \eta_{l_{\alpha} m_{\alpha} \lambda_{\alpha}}^L(-\hat{P}_A) \quad (39')$$

Физическая волновая функция $\Psi_A(X, P_A)$, описывающая процессы $2 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$ в конфигурационном пространстве \mathcal{H} с кластером α в начальном состоянии $|A\rangle$, формально получается усреднением (19) при $|X|/|P_A| \rightarrow \infty$ по асимптотическому состоянию $|A\rangle$:

$$\Psi_A^{P_A}(X, P_A) = \int d\omega_{\alpha} \Psi_{n_{\alpha}}^{P_A}(X, P_{n_{\alpha}}) |P_A|^{\delta} \Psi_{\alpha}(\infty, \omega_{\alpha}) \quad (40)$$

Выполнив интегрирование и все необходимые подстановки (29'), (35)-(39') в пределе $|X|/|P_A| \rightarrow \infty$, имеем:

$$\begin{aligned} \Psi_A^{P_A}(X, P_A) \sim (2\pi)^{-3/2} \left\{ \sum_{\beta} \Phi_{\beta}(1X \rightarrow \infty, \omega_{\beta}) \left[\chi_{\beta}(X \rightarrow \infty, \hat{Y}_{\beta}, P_{\beta}) \delta_{BA} \right. \right. \\ \left. \left. + |X|^{-1} e^{i(|X|/|P_{\beta}| - \sqrt{2}\delta)} f_{BA}(\hat{Y}_{\beta}, P_A) \right] \right. \\ \left. + |X|^{-1-\delta} e^{i(|X|\sqrt{E} - \sqrt{2}\delta)} f_{0A}(\hat{X}, P_A) \right\} \quad (40') \end{aligned}$$

Здесь

$$(2\pi)^{-3/2} \chi_{\beta}(X, |X| \rightarrow \infty, \hat{Y}_{\beta}, P_{\beta}) \delta_{BA} \approx \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (-2i|X|)^{-1} \delta_{n_{\beta} m_{\beta}} \quad (41)$$

$$\cdot \sum_{l_{\beta} m_{\beta} \lambda_{\beta}} \eta_{l_{\beta} m_{\beta} \lambda_{\beta}}^L(\hat{Y}_{\beta}) \left\{ e^{-i(|X|/|P_{\beta}| - \sqrt{2}\delta)} e^{i(|X|/|P_{\beta}| - \sqrt{2}\delta)} \int \Psi_{\beta}(\infty, \hat{P}_A) |P_A|^{-1} \right\}$$

появляется в пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{R}_+^1 \times S_{1X|}^3$ в результате проецирования (40) и представляет аналог трехмерной плоской волны в $\mathbb{R}_{Y_{\beta}}^3$ со фазой:

$$(2\pi)^{-3/2} e^{i(Y_{\beta} P_{\beta})} \approx \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (-2i|Y_{\beta}|)^{-1} \left\{ e^{-i|Y_{\beta}|/|P_{\beta}|} \delta(\hat{Y}_{\beta} + \hat{P}_A) - e^{i|Y_{\beta}|/|P_{\beta}|} \delta(\hat{Y}_{\beta} - \hat{P}_A) \right\} |P_{\beta}|^{-1}$$

Этот факт очевиден, если принимать во внимание соотношение полноты

$$\sum_{l_{\beta} m_{\beta} \lambda_{\beta}} \eta_{l_{\beta} m_{\beta} \lambda_{\beta}}^L(\hat{Y}_{\beta}) \eta_{l_{\beta} m_{\beta} \lambda_{\beta}}^L(\hat{P}_A) = \delta(\hat{Y}_{\beta} - \hat{P}_A) \delta_{l_{\beta} m_{\beta} \lambda_{\beta}}$$

Условие согласования (I2''') связностей $(A_{--})^2$ с асимптотическими граничными условиями на фаддеевские компоненты $F_{BA}(X, P_A)$ приводит к тому, что поведение радиальной функции χ_{--} при $|X| \rightarrow \infty$ определяется лишь центробежным барьером $\lambda_{\alpha}(\lambda_{\alpha} + 1)|X|^{-2}$ относительного движения третьей частицы и пары α , при этом зависимость от Y в (30') исчезает

$$\chi_{--}^{as} \approx -(2i)^{-1} |P_A| e^{-i|X|/|P_A|} - e^{i|X|/|P_A|} |P_A|^{-1/2} \delta_{--} |P_A|^{-1/2} \quad (30'')$$

Это означает, что сшивая решения χ_{--}^{ph} и χ_{--}^{as} в окрестности $|X| \rightarrow \infty$, можно установить связь \hat{S} -матрицы, определенной на физических решениях (30'), с \hat{S}^{as} -матрицей, заданной на асимптотических решениях (30''):

$$\hat{S}_{--} = e^{i\sqrt{2}\delta} \hat{S}_{--}^{as} e^{i\sqrt{2}\delta} \quad (42)$$

В результате имеем асимптотическую волновую функцию $\Psi_A^{as}(X, P_A)$, поведение которой согласовано с асимптотическими граничными условиями на фаддеевские компоненты $F_{BA}(X, P_A)$:

$$\begin{aligned} \Psi_A^{as}(X, P_A) \approx (2\pi)^{-3/2} \left\{ \sum_{\beta} \Phi_{\beta}(1X \rightarrow \infty, \omega_{\beta}) \left[\chi_{\beta}(1=0, |X| \rightarrow \infty, \hat{Y}_{\beta}, P_{\beta}) \delta_{BA} \right. \right. \\ \left. \left. + |X|^{-1} e^{i|X|/|P_{\beta}|} f_{BA}^{as}(\hat{Y}_{\beta}, P_A) \right] \right. \\ \left. + |X|^{-1-\delta} e^{i(|X|\sqrt{E} - \sqrt{2}\delta)} f_{0A}(\hat{X}, P_A) \right\} \quad (43) \end{aligned}$$

и полную асимптотическую амплитуду f_{BA}^{as} , которая определяется через \hat{S}_{--}^{as} :

$$f_{BA}^{as}(\hat{y}_p, p_A) = 4\pi \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \eta_{\lambda_1 \lambda_2}^4 \int_{\rho_1 \rho_2 \rho_3} (\hat{y}_p) \hat{f}_{\rho_1 \rho_2 \rho_3}^{(as)4} (|p|) \eta_{\lambda_1 \lambda_2}^{*4} (-\hat{p}_A), \quad (44)$$

где

$$\hat{f}_{\rho_1 \rho_2 \rho_3}^{(as)4} (|p|) = \left\{ \hat{S}^{as}(|p|) - \hat{I} \right\}_{\rho_1 \rho_2 \rho_3, \mu_1 \mu_2 \mu_3}^4 (2i|p_{\mu_1}|)^{-1}$$

инвариантная унитарная асимптотическая парциальная амплитуда. Дальнейшее упрощение записи для процессов $2 \rightarrow 2$ достигается, если при переходе из $|A\rangle$ в $|B\rangle$ выполнено условие: $(-1)^{e_B + e_A} = 1$. Тогда имеем определение волновой функции:

$$\Psi_A^{as}(X, p_A) \approx (2\pi)^{-3/2} \sum_B \varphi_B(X| \rightarrow \infty, \omega_p) \left[e^{i(X|\cos\theta_{p_A}|p_A)} S_{BA} + |X|^{-1} e^{i(X||p_B|} f_{BA}^{as}(\hat{y}_p, p_A) \right], \quad (45)$$

в которое входит трехмерная плоская волна (ср. (40')) при $\gamma = 0$) в $\mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{S}^2(y_p)$:

$$(2\pi)^{-3/2} e^{i(X|\cos\theta_{p_A}|p_A)} S_{BA} \approx (2/\pi)^{1/2} (-2i|X|)^{-1} S_{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \eta_{\lambda_1 \lambda_2}^4 (\hat{y}_p) \left\{ e^{-i(X||p_A|} - e^{i(X||p_A|} \rho_{\hat{p}_A} \right\}_{\rho_1 \rho_2 \rho_3}^{*4} (-\hat{p}_A) |p_A|^{-1}$$

где $\rho_{\hat{p}_A}$ - оператор четности на $\mathbb{S}^2(\hat{p}_A)$. Выполняя предельный переход $^{II}/|X| \rightarrow \infty$, имеем известное определение для волновой функции, описывающей процесс $2 \rightarrow 2$ с возбуждением кластера α из состояния $|A\rangle$ в состояние $|A'\rangle$:

$$\Psi_A^{as}(X, p_A) \approx (2\pi)^{-3/2} \sum_{A'} \varphi_{A'}(x_\alpha) \left[e^{i(y_\alpha p_A)} S_{A'A} + |y_\alpha|^{-1} e^{i|y_\alpha||p_A|} f_{BA}^{as}(\hat{y}_p, p_A) \right],$$

которое согласуется со стандартным ^{15/} (стр. 451, 454) в якобиевской параметризации пространства $\mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{S}^2(\hat{x}_\alpha) \times \mathbb{S}^2(\hat{y}_\alpha)$.

Решение системы радиальных уравнений (9'') с асимптотическими условиями (30'') для χ_{\pm}^{as} и (30') для χ_{\pm}^{ph} каким-либо численным методом, их сшивка по формуле (40) позволяют вычислить матричные элементы \hat{S}_{--} и \hat{S}_{+-} унитарного оператора рассеяния \hat{S} , определенного на открытых каналах и соответствующие им полные амплитуды (37') и (39') процессов $2 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$. Необходимые для этого асимптотики решений $\chi_{\pm}^{as} \sim O(|X|^{-1})$, следующие из условия согласования недиагональных матричных элементов оператора связности $A_{\pm}^{as}(|X| \rightarrow \infty)$, которые обеспечивают предельный переход (40), даны в ^{II/}. Тогда закон сохранения потока для волновой функции (19') в терминах обобщенного вронскиана (32) позволяет привести стандартные выражения для

дифференциальных сечений процессов $2 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$:

$$d\sigma_{BA}/d\hat{y}_p = |f_{BA}(\hat{y}_p, p_A)|^2, \\ d\sigma_{0A}/d\hat{X} = |f_{0A}(\hat{X}, p_A)|^2.$$

Заключение

В работе сформулирована новая адиабатическая постановка многоканальной задачи рассеяния в системе трех частиц в классе ограниченных и быстроубывающих парных потенциалов. Решение этой задачи является первым шагом в реализации программы исследования геометрических аспектов адиабатического представления в квантовой задаче нескольких частиц, намеченной в ^{4,12/}

Использование в качестве универсальной адиабатической переменной $|X| = \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}$, единой для всех асимптотических каналов, позволило последовательным образом ввести естественные для задачи геометрические объекты - гильбертово расслоение $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}(|X|), \mathbb{B} \ni |X|\}$ и его связность $A(|X|)$. Введение адиабатического разложения с базой \mathbb{B} для компонент компактных уравнений Фаддеева сводит исходную многомерную задачу (I) в $\mathcal{H} = \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{S}_{|X|}^5(\cdot) \subset \mathbb{R}^6$ к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в \mathbb{R}_+^1 .

Для анализа их решений существенным образом используются свойства оператора параллельного переноса \hat{U} гильбертова репера при движении по некомпактной базе \mathbb{B} и асимптотики оператора связности $A(|X|)$ при $|X| \rightarrow \infty$. Последнее необходимо для сшивки физической волновой функции Ψ^{ph} в адиабатическом представлении с известными асимптотиками F_{β}^{as} фаддеевских компонент.

Учет вкладов перерассеяния осуществляется с помощью процедуры спектрального проецирования ^{4/}, которая дает возможность определить унитарный оператор рассеяния \hat{S} на асимптотических состояниях при сферически расходящихся волнах в пространстве \mathcal{H} и тем самым в пределе $|X| \rightarrow \infty$ остаться в классе решений $S_{E, \epsilon}$. Аккуратное выделение оператора полной инверсии \hat{I} в $\mathcal{H} = \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{S}_{|X|}^5(\hat{X})$ позволяет реально работать в представлении собственных фазовых сдвигов (33) и дает корректную параметризацию унитарного оператора рассеяния $\hat{S} = S\hat{I}$, полезную для решения практических задач.

Реализация предложенной формулировки (2)-(II) для заряженных частиц осуществляется в настоящее время и будет дана в последующих работах.

Авторы благодарят Ю.А.Куперина, К.А.Макарова, Б.С.Павлова за сотрудничество и помощь в работе; А.А.Квицинского, И.В.Комарова, Д.Б.Мельникова, В.М.Музафарова и Р.Ньютона за полезные обсуждения. Авторы признательны В.Г.Кадлышевскому, С.П.Меркурьеву, О.Г.Мартыненко и Л.И.Пономареву за поддержку работы.

Литература

1. С.П.Меркурьев, Л.Д.Фаддеев. Теория рассеяния для систем нескольких частиц. Наука, М., 1985.
2. U.Fano, Phys.Rev. A24(1981) 2462;
ibid. A25(1982) 1203.
3. М.В.Кадомтсев, С.И.Винитский. J.Phys. B20 (1987) 5723.
4. К.А.Макаров, Ю.А.Куперин, В.С.Павлов, В.М.Дубовик, В.Л.Марковски, С.И.Винитский. A Local Adiabatic Representation in the Few-Body Quantum Scattering Problem, Preprint FUB-HEP/87-11, 1987, Berlin (West).
5. Р.Ньютон. Теория рассеяния волн частиц. Мир, М., 1969.
6. Ф.М.Морс, Г.Фешбах. Методы теоретической физики. ИИЛ., М., 1960, том 2, гл.12.
7. Wells R.O. Differential Analysis on Complex Manifolds, Benfice Hall, N.J., 1973.
8. М.Гольдбергер, К.Ватсон. Теория столкновений, Мир, М., 1967.
9. М.Рид, Б.Саймон. Методы современной математической физики. Мир, М., 1982, т.3, гл.II.6.
10. H.Klar. Phys.Rev. A15 (1977) 1452.
11. М.В.Кадомтсев, С.И.Винитский, F.R.Vucajlovich, Phys. Rev. A36 (1987) 4552.
12. V.M.Dubovik, B.L.Markovski, S.I.Vinitzky. Multistep Adiabatic Representation, JINR, E4-87-743, Dubna, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 июля 1988 года.

Виницкий С.И. и др.

P4-88-532

Адиабатическое представление задачи рассеяния в квантовой системе трех тел

Предложено адиабатическое представление волновой функции $\psi(x)$ в конфигурационном пространстве относительного движения трех заряженных частиц: $X=x_a \circ y_a \in \mathcal{K} = \mathcal{R}_+^1 + \mathcal{S}_{|x|}^5(\hat{X})$, $a=1,2,3$, в виде суммы локальных адиабатических разложений трех фаддеевских компонент $F_a(|X|, \hat{X}_a)$. На основе этого представления развита корректная адиабатическая формулировка многоканальной задачи рассеяния в системе трех частиц в классе ограниченных и быстроубывающих парных потенциалов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Vinitzky S.I. et al.

P4-88-532

Adiabatic Representation of Scattering Problem in Three-Body Quantum System

In the configuration space $X=x_a \circ y_a \in \mathcal{K} = \mathcal{R}_+^1 + \mathcal{S}_{|x|}^5(\hat{X})$, $a=1,2,3$ of the three charged bodies relative motion new adiabatic representation of the wave function $\psi(X)$ is suggested in terms of the local adiabatic expansion of the Faddeev's components $F_a(|X|, \hat{X}_a)$. Using this representation an adiabatic formulation of the multichannel three-particle-scattering problem for bounded and fastly decreasing pair potentials is correctly performed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988