

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Б-191

P4-88-16

Д.Бакалов

ЭФФЕКТИВНЫЙ
РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ГАМИЛЬТониАН
МЕЗОМОЛЕКУЛ $dd\mu$ И $dt\mu$

1988

1. ВВЕДЕНИЕ

Принята точка зрения, что для детального количественного описания мюонного катализа необходимо знать энергии связи мезомолекул $dd\mu(i,i)$ и $dt\mu(i,i)$, с учетом релятивистских, структурных и пр. эффектов, с точностью 10^{-3} эВ^{1/1}. Вычисленные в ^{2/} значения релятивистских поправок получены в первом порядке теории возмущений по гамильтониану релятивистского взаимодействия, построенному из двухчастичной амплитуды рассеяния в приближении однофотонного обмена. Источниками возможных погрешностей в этих значениях релятивистских поправок являются:

1/ пренебрежение вкладом высших квантовоэлектродинамических поправок в гамильтониане взаимодействия;

2/ выбор нерелятивистских адиабатических волновых функций мезомолекул в качестве нулевого приближения /включая обрывание адиабатического разложения, неточности в значениях адиабатических функций при малых или больших межъядерных расстояниях и т.д./, а также пренебрежение высших порядков теории возмущений по гамильтониану взаимодействия;

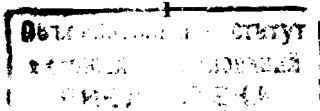
3/ использованные численные методы для вычисления многократных сингулярных интегралов, через которые выражаются матричные элементы гамильтониана в адиабатическом представлении^{3,4/}.

Затронутые в п.1 проблемы обсуждены подробно в ^{5/}; на наш взгляд, они не могут приводить к суммарной погрешности больше 1 мэВ. Численные методы обеспечивают относительную точность 10^{-4} . Открытыми пока остаются только вопросы в п.2, связанные с использованием адиабатических функций; ответ на них даст сравнение с результатами, полученными вне рамок адиабатического подхода.

Данная работа содержит вычисленные в адиабатическом подходе значения всех "числовых реперов", по которым должно проходить сравнение с результатами других подходов. Приведены коэффициенты эффективного релятивистского гамильтониана мезомолекул $dd\mu(i,i)$ и $dt\mu(i,i)$ в приближении точечных ядер. Выписаны также выражения для этих коэффициентов E_n через средние значения Y_{ij} операторов Y_{ij} из введенного в ^{6/} "стандартного" набора и приведены сами значения Y_{ij} .

2. ЭФФЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН МЕЗОМОЛЕКУЛ

Эффективный гамильтониан системы спиновых частиц определяется как оператор, действующий в пространстве прямого произведения представлений $(J) \otimes (S_1) \otimes (S_2) \otimes \dots$ алгебры $su(2)$ /где J - орбитальный момент



системы, а $S_i, i=1,2,\dots$ - спин i -й частицы/, собственные значения которого совпадают с уровнями энергии сверхтонкого мультиплета состояний, в которые расщепляется нерелятивистский уровень с орбитальным моментом J . Эффективный гамильтониан H^{eff} получается из гамильтониана системы H усреднением по /зависящей только от пространственных переменных/ волновой функции невозмущенного состояния. Для слабосвязанных состояний мезомолекул $dd\mu(1,1)$ и $dt\mu(1,1)$ H^{eff} имеет вид

$$H^{eff} = E_0 + E_1 (\vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3) + E_2 (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3) + E_3 (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) + E_4 (\vec{s}_1 \cdot \vec{J}) + E_5 (\vec{s}_2 \cdot \vec{J}) + E_6 (\vec{s}_3 \cdot \vec{J}) + E_7 (\vec{s}_3 \cdot \vec{J})(\vec{s}_2 \cdot \vec{J}) - \frac{\vec{J}^2 (\vec{s}_3 \cdot \vec{s}_2)}{3} + E_8 ((\vec{s}_3 \cdot \vec{J})(\vec{s}_1 \cdot \vec{J}) - \frac{\vec{J}^2 (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3)}{3}) + E_9 ((\vec{s}_1 \cdot \vec{J})(\vec{s}_2 \cdot \vec{J}) - \frac{\vec{J}^2 (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2)}{3}) + E_{10} ((\vec{s}_1 \cdot \vec{J})^2 - \frac{\vec{J}^2 \vec{s}_1^2}{3}) + E_{11} ((\vec{s}_2 \cdot \vec{J})^2 - \frac{\vec{J}^2 \vec{s}_2^2}{3}).$$

Члены $E_i, i=1,2,\dots,11$ и E_0 описывают соответственно сверхтонкое расщепление и релятивистский сдвиг невозмущенных уровней. В величину сдвига E_0 можно выделить вклад эффектов поляризации вакуума E^{VP} , "релятивистской массы" E^{RM} , дарвиновских членов E^D и релятивистской поправки к кинетической энергии E^{RK} :

$$E_0 = E^{VP} + E^D + E^{RM} + E^{RK}.$$

Значения постоянных E_i , вычисленные с использованием адiabатической волновой функции мезомолекул $(dd\mu(1,1))$ и $(dt\mu(1,1))$, приведены в табл. 1.

Используя представление трехчастичного релятивистского гамильтониана H в виде суммы членов с факторизованной зависимостью от угловых, спиновых и сферических переменных /6/

$$H = \sum_t C_t Y_{i_t} (X_{i_t}, Z_{k_t}),$$

где C_t - постоянные коэффициенты, зависящие от масс, зарядов и пр. характеристик частиц, а $\{X_{i_t}\}, \{Z_{k_t}\}$ и $\{Y_{i_t}\}$ - "стандартные" наборы неприводимых /анти-/эрмитовых операторов, действующие соответственно на углы Эйлера Φ, Θ и φ , на спины и на сферические переменные F, η и R /см. Приложение/, можно получить явные выражения для E_m через средние значения операторов Y_{i_t} . Представляя нерелятивистскую волновую функцию мезомолекулы $\psi^J \psi^J(\vec{R}, \vec{r})$ в виде $\psi^J \psi^J(\vec{R}, \vec{r}) = \sum_{m=0}^J \mathcal{D}_{\lambda m} J M(\Phi, \Theta, \varphi) u_m^J(\xi, \eta, R)$, $\lambda = (-1)^J$, //

где $\mathcal{D}_{\lambda m} J M$ - симметризованные D -функции Вигнера

$$\mathcal{D}_{\lambda m} J M(\Phi, \Theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2J+1}{16\pi^2(1+\delta_{0,m})}} ((-1)^m D_{Mm}^J(\Phi, \Theta, \varphi) + \lambda (-1)^J D_{M-m}^J(\Phi, \Theta, \varphi))$$

и вводя обозначение

$$Y_{ij} = Y_{(j) m' m} = \int_0^\pi dR \frac{R^5}{8} \int_0^\pi d\xi \int_{-1}^1 d\eta (\xi^2 - \eta^2) u_m^J(\xi, \eta, R) Y_{ij} u_m^J(\xi, \eta, R), \quad (2)$$

имеем

$$E_1 = \frac{2\alpha^2}{3} \frac{\mu_2 \mu_3}{s_2 M_2 M_3} Y_{(42)00}, \quad E_2 = \frac{2\alpha^2}{3} \frac{\mu_1 \mu_3}{s_1 M_1 M_3} Y'_{(42)00}, \quad E_3 = 0,$$

$$E_4 = \frac{\alpha^2}{4M_1^2} (1 - \frac{\mu_1}{s_1}) \left\{ - (2Y_{(1)00} + Y'_{(1)00}) + (Y_{(2)01} - Y_{(3)01} - Y_{(4)01} - Y_{(5)01}) + \frac{1}{2} (Y'_{(7)01} - Y'_{(8)01} + Y_{(4)01} - Y_{(10)01} + Y_{(11)01}) + (-Y_{(1)11} + Y_{(6)11}) \right\} + \frac{\alpha^2 \mu_1}{4s_1 M_1 M_3} (-Y'_{(7)01} + Y'_{(8)01} - Y'_{(6)11}) + \frac{\alpha^2 \mu_1}{2s_1 M_1 M_2} (Y_{(1)00} + \frac{1}{2} (Y_{(1)11} - Y_{(2)01} + Y_{(3)01} - Y_{(4)01} - Y_{(5)01})),$$

$$E_5 = \frac{\alpha^2}{4M_2^2} (1 - \frac{\mu_2}{s_2}) \left\{ - (2Y_{(1)00} + Y_{(9)00}) + (Y_{(2)01} - Y_{(3)01} + Y_{(4)01} + Y_{(5)01}) + \frac{1}{2} (Y_{(7)01} - Y_{(8)01} - Y_{(10)01} + Y_{(11)01} + Y_{(11)01}) + (-Y_{(1)11} + Y_{(6)11}) \right\} + \frac{\alpha^2 \mu_2}{4s_2 M_2 M_3} (Y_{(3)01} - Y_{(7)01} - Y_{(6)11}) + \frac{\alpha^2 \mu_2}{2s_2 M_2 M_1} (Y_{(1)00} + \frac{1}{2} (Y_{(1)11} - Y_{(2)01} + Y_{(3)01} + Y_{(4)01} + Y_{(5)01})),$$

$$E_6 = \frac{\mu_3 \alpha^2}{2M_2 M_3} (Y_{(9)00} + \frac{1}{2} (Y_{(10)01} - Y_{(11)01} - Y_{(4)01} - Y_{(6)11})) - \frac{\alpha^2}{4M_3^2} (\mu_3 (2 + \frac{M_3}{M_2}) - 1) (Y_{(7)01} - Y_{(8)01} + Y_{(6)11}) + \frac{\alpha^2 \mu_3}{2M_1 M_3} (Y'_{(9)00} + \frac{1}{2} (Y'_{(10)01} - Y'_{(11)01} - Y'_{(4)01} - Y'_{(6)11})) - \frac{\alpha^2}{4M_3^2} (\mu_3 (2 + \frac{M_3}{M_1}) - 1) (Y'_{(7)01} - Y'_{(8)01} + Y_{(6)11}),$$

$$E_7 = -\frac{3\alpha^2}{10} \frac{\mu_2 \mu_3}{s_2 M_2 M_3} (Y_{(12)00} - \frac{1}{2} Y_{(12)11} + 6 Y_{(13)01}),$$

$$E_8 = -\frac{3\alpha^2}{10} \frac{\mu_1 \mu_3}{S_1 M_1 M_3} (y'_{(12)00} - \frac{1}{2} y'_{(12)11} + 6 y'_{(12)01}),$$

$$E_9 = \frac{3\alpha^2}{10} \frac{\mu_1 \mu_2}{S_1 M_1 S_2 M_2} (y_{(1)00} - \frac{1}{2} y_{(1)11}),$$

$$E_{10} = \frac{3\alpha^2}{10} Q_1 (y'_{(12)00} - \frac{1}{2} y'_{(12)11} - 2 y_{(1)00} + 6 y'_{(12)01} + y_{(1)11}),$$

$$E_{11} = \frac{3\alpha^2}{10} Q_2 (y_{(12)00} - \frac{1}{2} y_{(12)11} - 2 y_{(1)00} + 6 y_{(12)01} + y_{(1)11}),$$

$$E^{VP} = \alpha^2 (y_{(46)00} + y_{(46)11} + y'_{(46)00} + y'_{(46)11}) + \alpha^3 (y_{(49)00} + y_{(49)11} + y'_{(49)00} + y'_{(49)11}) + \alpha^2 (y_{(43)00} + y_{(43)11}),$$

$$E^D = -\frac{\alpha^2}{4M_3^2} (1 - 2\mu_3) (y_{(42)00} + y'_{(42)00}) - \frac{\alpha^2}{M_2^2} \frac{S_2}{2S_2+1} (1 - \frac{\mu_2}{S_2}) y_{(42)00} - \frac{\alpha^2}{M_1^2} \frac{S_1}{2S_1+1} (1 - \frac{\mu_1}{S_1}) y'_{(42)00},$$

$$E^{RM} = -\frac{\alpha^2}{2M_2 M_3} (y_{(14)00} - 2y_{(15)01} - y_{(17)01} + y_{(14)11} + y_{(16)11}) - \frac{\alpha^2}{2M_1 M_3} (y_{(14)00} - 2y_{(15)01} - y_{(17)01} + y_{(14)11} + y_{(16)11}) + \frac{\alpha^2}{2M_1 M_2} (2(y_{(1)00} + y_{(1)11}) + y_{(8)00} + y_{(10)11} + 2y_{(2)01} - 2y_{(3)01} + y_{(19)11}),$$

$$E^{RK} = -\frac{\alpha^2}{8m^3} (1 - \frac{3m}{M}) (y_{(50)00} - \frac{1}{2} y_{(52)00} + y_{(54)00} + y_{(55)00} + y_{(56)00} - (y_{(58)00} + y_{(58)11}) + 4(y_{(61)00} + y_{(61)11}) + y_{(59)00} + y_{(59)11}) - \alpha^2 (\frac{1}{8M_3^3} + \frac{1-3m/M}{128m^3}) \cdot (y_{(32)00} + y_{(32)11} + y_{(33)11} + 2y_{(34)11}) - \frac{\alpha^2 \alpha}{4m^3} (1 - \frac{m}{M}) (-\frac{1}{4} y_{(51)00} + y_{(53)00} + y_{(57)00} + 2(y_{(60)00} + y_{(60)11})).$$

Здесь:

$$M = M_1 + M_2, m = M_1 M_2 / M, \alpha_2 = (M_2 - M_1) / M;$$

Таблица 1. Коэффициенты E_k эффективного релятивистского гамильтониана H^{eff} мезомолекул $dt\mu(1,1)$ и $dd\mu(1,1)$ /в эВ/

	Релятивистское смещение уровней		Спиновый гамильтониан		
	$dt\mu$	$dd\mu$	$dt\mu$	$dd\mu$	
Вклад эффектов поляризации вакуума E^{VP}	-2,2241	-2,1358	E_1	0,00652	0,01626
Вклад дарвиновских членов E^D	+0,1356	+0,1268	E_2	0,19235	0,01626
Релятивистская поправка к массе E^{RM}	-0,0107	-0,0139	E_3	0	0
Эффекты релятивистской кинематики E^{RK}	-0,1594	-0,1495	E_4	-0,00009	-0,00001
Суммарный сдвиг E_0	-2,2585	-2,1713	E_5	-0,00001	-0,00001
			E_6	0,00039	0,00037
			E_7	-0,00017	-0,00013
			E_8	-0,00108	-0,00013
			E_9	0,00009	+0,00001
			E_{10}	0	-0,00007
			E_{11}	-0,00008	-0,00007

Таблица 2. Отличные от нуля средние значения Y_{ij}^{mm} операторов Y_j в мезомолекуле $dd\mu(1,1)$ /в единицах $e = \hbar = m_{d\mu} = 1$

Y_j	$Y_j^{(j)00}$		$Y_j^{(j)11}$		$Y_j^{(j)01}$	
	точное знач.	одноур.прибл.				
Y_1	0,14474E-1	0,14465E-1	Y_1	0,32779E-6	Y_2	0,45848E-4
Y_3	-0,26430E-1	-0,26317E-1	Y_6	0,14310E-5	Y_3	-0,31489E-4
Y_{12}	0,17991E-1	0,17918E-1	Y_9	-0,36558E-7	Y_7	0,24518E-4
Y_{14}	0,97443E0	0,97668E0	Y_{14}	0,26950E-5	Y_8	0,55165E-4
Y_{16}	0,10230E0	0,10529E0	Y_{16}	0,20998E-5	Y_{10}	0,21656E-3
Y_{32}	0,49343E1	0,49369E1	Y_{18}	0,43620E-5	Y_{11}	-0,60322E-4
Y_{42}	0,99264E0	0,99322E0	Y_{19}	0,63577E-7	Y_{13}	-0,99953E-6
Y_{43}	0,22258E-1	0,22246E-1	Y_{28}	0,11238E-5	Y_{15}	0,16274E-3
Y_{46}	-0,37476E1	-0,37496E1	Y_{32}	0,11134E-4	Y_{17}	0,13026E-3
Y_{49}	-0,38994E1	-0,39015E1	Y_{33}	0,12549E-4	Y_{44}	0,69480E-4
Y_{50}	—	0,21107E1	Y_{34}	-0,55966E-5		
Y_{52}	—	-0,22394E1	Y_{43}	0,27269E-6		
Y_{54}	—	0,86521E0	Y_4	-0,22292E-5		
Y_{55}	—	0,15048E-1	Y_{49}	-0,27159E-5		
Y_{56}	—	0,30966E-1				
Y_{58}	—	-0,42148E-1				
Y_{59}	—	0,21832E-1				
Y_{64}	—	0,86163E-2				

Таблица 3. Отличные от нуля средние значения $Y_{ij}^{(j)m'm}$ операторов Y_j в мезомолекуле $d\mu(1,1)$ /в единицах $e = \hbar = m_e \mu = 1$ /

$Y_{ij}^{(j)00}$ точное знач. двухур.прибд.		$Y_{ij}^{(j)01}$		$Y_{ij}^{(j)11}$	
Y_1	0,17004E-1	Y_2	0,41544E-4	Y_1	0,64744E-6
Y_3	-0,31096E-1	Y_3	-0,23632E-4	Y_6	0,10638E-5
Y_9	-0,30790E-1	Y_4	0,29390E-4	Y_6'	0,10782E-5
Y_{12}	0,21898E-1	Y_5	0,41034E-4	Y_9	-0,18807E-7
Y_{12}'	0,20057E-1	Y_7	-0,16573E-4	Y_9'	-0,17113E-6
Y_{14}	0,36437E0	Y_7'	0,65251E-4	Y_{14}	0,22880E-5
Y_{14}'	0,15805E1	Y_8	0,10727E-3	Y_{14}'	0,15274E-5
Y_{18}	0,13581E0	Y_8'	0,10255E-4	Y_{16}	0,15691E-5
Y_{32}	0,49327E1	Y_{10}	0,23507E-3	Y_{16}'	0,14317E-5
Y_{42}	0,39653E0*	Y_{10}'	0,11634E-3	Y_{18}	0,55585E-5
Y_{42}'	0,15979E1*	Y_{11}	-0,71889E-4	Y_{18}'	-0,18609E-6
Y_{43}	0,26516E-1	Y_{11}'	0,30970E-4	Y_{28}	0,83645E-6
Y_{46}	-0,15128E1	Y_{13}	-0,14399E-4	Y_{28}'	0,82986E-6
Y_{46}'	-0,61607E1	Y_{13}'	0,15724E-4	Y_{32}	0,88328E-5
Y_{49}	-0,15753E1	Y_{15}	0,18179E-3	Y_{33}	0,99747E-5
Y_{50}	0,21131E1	Y_{15}'	0,75651E-4	Y_{34}	-0,47877E-5
Y_{51}	-0,27118E1	Y_{17}	0,15808E-3	Y_{43}	0,10648E-5
Y_{52}	-0,22777E1	Y_{17}'	0,49946E-4	Y_{46}	-0,18495E-5
Y_{53}	0,70659E0	Y_{41}	0,64582E-4	Y_{46}'	-0,17639E-5
Y_{54}	0,99714E0	Y_{41}'	0,48798E-4	Y_{49}	-0,22495E-5
Y_{55}	0,16541E-1			Y_{49}'	-0,21472E-5
Y_{56}	0,35474E-1				
Y_{57}	0,61448E-2				
Y_{58}	-0,47876E-1				
Y_{59}	0,28924E-1				
Y_{60}	0,48385E-2				
Y_{61}	0,10103E-1				
Y_{49}'	-0,64025E1				
	-0,64153E1				

*) Вклад непрерывного спектра в разложении (4) в значения

$$Y_{(42)00} \times Y_{(42)00} \text{ соответственно равен}$$

$$\int Y_{(42)00} = 0,00908, \quad \int Y_{(42)00}' = -0,00186.$$

через M_i, S_i, μ_i и $Q_i, i=1,2,3$ обозначены соответственно масса, величина спина, магнитный дипольный и электрический квадрупольный моменты i -й частицы и использованы единицы $e = \hbar = m_e = 1$, где $m_e = m_e (M_1^{-1} + M_2^{-1})^{-1}$. Выражения для операторов Y_j в сферических координатах приведены в Приложении, а их средние значения $Y_{ij}^{(j)m'm}$, вычисленные по программе MAIN /4/ в адиабатическом представлении трехчастичной волновой функции (1)

$$u_m^{Jv}(\xi, \eta, R) = \sum_{j_i} \sum_{p=q,u} R^{-1} \chi_{pim}^{Jv}(R) \varphi_{pim}(\xi, \eta; R) \quad /4/$$

с использованием численных значений амплитуд χ_{pim}^{Jv} для мезомолекул $d\mu(1,1)$ и $dd\mu(1,1)$, найденных в /7/, приведены соответственно в Таблицах 2 и 3.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

При наличии выражений (3) для коэффициентов эффективного гамильтониана $E_n, n=0, \dots, 11$ задача о вычислении сверхтонкого расщепления и релятивистского сдвига уровней энергии мезомолекул $d\mu(1,1)$ и $dd\mu(1,1)$ сводится к вычислению интегралов $Y_{ij}^{(j)m'm}$ (2). Выражения (3) следует использовать и в будущих расчетах релятивистских эффектов в мезомолекулах вне рамок адиабатического подхода. Сравнение найденных в них значений интегралов $Y_{ij}^{(j)m'm}$ с содержанием таблиц 2 и 3 даст тогда ценную информацию о совпадении /или отличии/ соответствующих новых волновых функций мезомолекул с адиабатическими функциями работы /7/ в областях, дающих - в соответствии с особенностями подынтегральных выражений - основной вклад в интегралы $Y_{ij}^{(j)m'm}$.

Результаты данной работы позволяют также оценить относительный вклад в релятивистские поправки к уровням энергии от отдельных слагаемых в релятивистском трехчастичном гамильтониане /2/ и отсюда - точность их вычисления, необходимую для достижения требуемой точности $\sim 10^{-8}$ значений энергии связей. В частности, из таблиц 2 и 3 видны границы применимости т.н. "двухуровневого" приближения, соответствующего учету лишь основного состояния дискретного спектра / $i=0$ / в адиабатическом разложении (4), и необходимость учитывать вклад непрерывного спектра при вычислении интегралов $Y_{(42)00}$ и $Y_{(42)00}'$.

В заключение автор выражает благодарность С.И.Виницкому, В.С.Мележину и Л.И.Пономареву за поддержку в работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Явные выражения для операторов Y_j в сферических координатах

$$Y_1 = \frac{1}{R^3}, \quad Y_2 = \frac{\xi\eta}{R^3\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}, \quad Y_3 = \frac{1}{R^3} \left(\frac{2\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}{\xi^2-\eta^2} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \right) - \frac{\xi\eta}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}} \right),$$

$$Y_4 = \frac{1}{R^3\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}, \quad Y_5 = \frac{1}{R^3} \left(\frac{2\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}{\xi^2-\eta^2} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}} \right), \quad Y_6 = \frac{8}{R^3(\xi-\eta)^3},$$

$$Y_7 = \frac{8}{R^3} \frac{\xi\eta-1}{(\xi-\eta)^3\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}, \quad Y_8 = \frac{8}{R^3(\xi-\eta)^3} \left\{ \frac{2\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}{\xi+\eta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) - \frac{\xi\eta-1}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}} \right\},$$

$$Y_9 = \frac{8}{R^3} \frac{\xi\eta-1}{(\xi-\eta)^3}, \quad Y_{10} = \frac{8}{R^3} \frac{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}{(\xi-\eta)^3},$$

$$Y_{11} = \frac{8}{R^3} \frac{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}{(\xi-\eta)^3} \left(2R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\xi^2+\eta^2-\xi\eta-1}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)} - \frac{2}{(\xi+\eta)} \left((\xi^2\xi\eta-1) \frac{\partial}{\partial \xi} + (\eta^2\xi\eta-1) \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right),$$

$$Y_{12} = \frac{8}{R^3} \frac{3\xi^2\eta^2-4\xi\eta+3-\xi^2\eta^2}{(\xi-\eta)^5}, \quad Y_{13} = \frac{8}{R^3} \frac{(\xi^2-1)(1-\eta^2)(\xi\eta-1)}{(\xi-\eta)^5},$$

$$Y_{14} = -\frac{4}{R^2(\xi-\eta)^3(\xi+\eta)} \left((2\xi^2\eta-2\eta+\xi-\xi\eta^2) \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2-1) \frac{\partial}{\partial \xi} + (\xi^2\eta-\eta+2\xi-2\xi\eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} (1-\eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} - (\xi+\eta)(\xi^2-1)(1-\eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + (2\xi\eta-\xi^2+1)(1-\eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - (2\xi\eta-\eta^2+1)(\xi^2-1) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) + \frac{4}{R^2(\xi-\eta)^3(\xi+\eta)} \left((2\xi\eta-\eta^2-1)(\xi^2-1) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial R} - (2\xi\eta-\xi^2-1)(1-\eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial R} \right),$$

$$Y_{15} = \frac{4(\xi^2-1)(1-\eta^2)}{R^3(\xi-\eta)^3(\xi+\eta)} \left((2\xi^2-\xi\eta-1) \frac{\partial}{\partial \xi} + (2\eta^2-\xi\eta-1) \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{R^3\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}(\xi-\eta)},$$

$$Y_{16} = \frac{4}{R^3(\xi^2-1)(1-\eta^2)} \frac{\xi\eta+1}{(\xi-\eta)}, \quad Y_{17} = \frac{4}{R^3\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}(\xi-\eta)},$$

$$Y_{18} = -\frac{2}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{4}{R^2} \frac{\xi(\xi^2-1)}{\xi^2-\eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial R} + \frac{4}{R^2} \frac{\eta(1-\eta^2)}{\xi^2-\eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial R} - \frac{2\xi^2+\eta^2-3}{R^3(\xi^2-\eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2-1) \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{2\eta^2+\xi^2-3}{R^3(\xi^2-\eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} (1-\eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{2\xi(\xi^2-1)}{R^3(\xi^2-\eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{2\eta(1-\eta^2)}{R^3(\xi^2-\eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$Y_{19} = \frac{2\xi^2\eta^2-\xi^2-\eta^2}{R^3(\xi^2-\eta^2)(1-\eta^2)}, \quad Y_{28} = \frac{8(\xi^2-1)(1-\eta^2)}{R^3(\xi-\eta)^5}, \quad Y_{33} = \frac{16}{R^4(\xi^2-1)^2(1-\eta^2)^2},$$

$$Y_{34} = -\frac{16}{R^4(\xi^2-1)(1-\eta^2)(\xi^2-\eta^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2-1) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (1-\eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right),$$

$$Y_{37} = \frac{4}{R^2(\xi^2-\eta^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2-1) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (1-\eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad Y_{32} = Y_{37} \cdot Y_{37},$$

$$Y_{42} = \frac{8}{\xi^2-\eta^2} \delta(\xi-1) \delta(\eta-1),$$

$$Y_{43} = V(R; m_a), \quad Y_{46} = -V\left(\frac{R}{2}(\xi-\eta); m_a\right)$$

$$\text{где } V(x; m_a) = \frac{2}{3\alpha\pi x} \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \sqrt{t^2-1} \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) e^{-\frac{2t m_a x}{\alpha}},$$

m_e - масса электрона, а m_a - приведенная масса частиц 1 и 3,

$$Y_{50} = Y_{39} Y_{39}, \quad Y_{51} = Y_{37} Y_{39}, \quad Y_{52} = Y_{37} Y_{35},$$

$$Y_{53} = Y_{39} Y_{35}, \quad Y_{54} = Y_{35} Y_{35},$$

$$Y_{55} = \frac{4}{R^4} \frac{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}{(\xi^2-\eta^2)^2} \left(\xi^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi\eta \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right),$$

$$Y_{56} = \frac{4}{R^4} \frac{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}{(\xi^2-\eta^2)^2} \left(\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} - \xi\eta \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right),$$

$$Y_{57} = \frac{4}{R^4} \frac{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}{(\xi^2-\eta^2)^2} \left(\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi\eta \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right),$$

$$Y_{58} = \frac{1}{R^2} Y_{37}, \quad Y_{59} = \frac{1}{R^2} Y_{35}, \quad Y_{60} = \frac{1}{R^2} Y_{39}, \quad Y_{61} = \frac{1}{R^4},$$

$$Y_{35} = -\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{2}{R^2} \left(\frac{\xi(\xi^2-1)}{\xi^2-\eta^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\eta(1-\eta^2)}{\xi^2-\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(1 + R \frac{\partial}{\partial R} \right) -$$

$$-\frac{\xi^2+\eta^2-1}{R^2(\xi^2-\eta^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2-1) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (1-\eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right),$$

$$Y_{39} = \frac{2}{R^2} \left(\frac{\xi\eta}{\xi^2-\eta^2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2-1) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (1-\eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{\eta(\xi^2-1)}{\xi^2-\eta^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\xi(1-\eta^2)}{\xi^2-\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(1 + R \frac{\partial}{\partial R} \right) \right).$$

Стрелки в выражениях для $Y_{55,56,57}$ означают, что в матричном элементе $\langle j | m' | Y_j | m \rangle$ операторы дифференцирования действуют на бра- или кет-векторы соответственно. Выражения для обозначенных штрихами операторов Y_j' получаются из приведенных выше заменой $\eta \rightarrow -\eta$:

$$Y_j'(\xi, \eta, R) = Y_j(\xi, -\eta, R).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. L.I. Ponomarev, G. Fiorentini. *Maon-Catal. Fus.* 1, 1987, p.3.
2. D. Bakalov et al. *Phys.Lett.* 161B, 1985, p.5.
3. Л.Александров, Д.Бакалов. Препринт ОИЯИ 11-83-876, 1983.
4. Д.Бакалов. Сообщение ОИЯИ 11-83-875, 1983.
5. Д.Бакалов. Препр. ОИЯИ Р4-87-816; принято к печати в ЯФ.
6. Д.Бакалов, В.С.Мелехик. Препринт ОИЯИ Р4-87-493; Дубна, 1987.
7. A. Gocheva et al. *Phys. Lett.* B153, p.349, 1985.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

D13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
D2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
D1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
D17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. (2 тома)	7 р. 75 к.
D11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р. 00 к.
D13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна, 1985.	4 р. 80 к.
D4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
D3,4,17-86-747	Труды V Международной школы по нейтронной физике Алушта, 1986.	4 р. 50 к.
—	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984. (2 тома)	13 р. 50 к.
D1,2-86-668	Труды VIII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1986. (2 тома)	7 р. 35 к.
D9-87-105	Труды X Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1986. (2 тома)	13 р. 45 к.
D7-87-68	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Дубна, 1986.	7 р. 10 к.
D2-87-123	Труды Совещания "Ренормгруппа - 86". Дубна, 1986.	4 р. 45 к.
D4-87-692	Труды Международного совещания по теории малочастичных и кварк-адронных систем. Дубна, 1987.	4 р. 30 к.
D2-87-798	Труды VIII Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1987.	3 р. 55 к.
D14-87-799	Труды Международного симпозиума по проблемам взаимодействия мюонов и пионов с веществом. Дубна, 1987.	4 р. 20 к.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 января 1988 года.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79. Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.