СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 8774

Г.Очирбат

ЗАМЕТКА
ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫЧИСЛЕНИЯ СИЛОВЫХ ФУНКЦИЙ

1975

Р4 - 8774

Г.Очирбат

ЗАМЕТКА
ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫЧИСЛЕНИЯ СИЛОВЫХ ФУНКЦИЙ

Простые квазичастичные и фононные конфигурации в ядре не являются чистыми в средней и высоковозбужденной области. Их взаимодействие имеет весьма сложный характер и ведет к сильному смешиванию коллективных и частичных возбуждений.

Фрагментацию простых конфигураций по многим ядерным уровням можно описывать в терминах силовой функции, зависящей от энергии и представляющей собой силу этих конфигураций, усредненную по некоторому энергетическому интервалу.

В полумикроскопической теории ядра, основываясь на гамильтониане

$$H = H_0 + V \quad , \qquad (1)$$

где H_0 -часть полного гамильтониана, описывающая свободные квазичастицы и фононы, V -взаимодействие квазичастиц и фононов, делают попытку вычислить нейтронную силовую функцию/1/.

Ниже излагаемый результат имеет не зависящее от конкретного вида H_0 и V применение при условии, что расположение уровней настолько плотно, что имеет смысл проводить усреднение в некотором интервале около каждой точки на оси энергии. Поэтому мы не конкретизируем вид H_0 и V, предполагая только, что H есть вещественный и симметричный гамильтониан.

Рассмотрим оператор $\frac{1}{E-H}$ и функцию

$$G_a(E) = \langle a | \frac{1}{E-H} | a \rangle \,, \tag{2}$$

где $|a\rangle$ -один из собственных векторов .

Полюса этой функции E_λ^c являются собственными значениями полного гамильтониана, а вычеты в полюсах E_λ^c - сила простого состояния $|a\rangle$ в составном состоянии $|\lambda\rangle$ с энергией E_λ^c,

$$G_a(E) = \sum_\lambda \frac{|\langle a|\lambda\rangle|^2}{E - E_\lambda^c} \,. \tag{3}$$

Используем представление, в котором H_0 имеет диагональный вид:

$$H_0 |i\rangle = E_i |i\rangle \,, \tag{4}$$

где E_i, $|i\rangle$ -собственное значение и собственный вектор H_0.

Полагаем, что

$$V_{ii} = \langle i | V | i \rangle = 0 \,.$$

Запишем в этом представлении матрицу $E-H$:

$$E-H = \begin{pmatrix} E-E_1, & -V_{12}, & -V_{13}, \dots \\ -V_{21}, & E-E_2, & -V_{23}, \dots \\ -V_{31}, & -V_{32}, & E-E_3, \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Воспользовавшись определением обратного оператора, находим, что

$$G_a(E) = \frac{\det(E-H)_a}{\det(E-H)} \,, \tag{6}$$

где $\det(E-H)$ -определитель матрицы (5), а $\det(E-H)_a$ - определитель матрицы,полученной из (5) вычеркиванием одной

строки и одного столбца,на пересечении которых лежит элемент $E-E_a$, т.е. матрицы:

$$(E-H)_a = \begin{pmatrix} E-E_1, & -V_{12}, & \dots, & -V_{1a}, & \dots \\ -V_{21}, & E-E_2, & \dots, & -V_{2a}, & \dots \\ \vdots & & & \vdots & \\ -V_{a1}, & \dots & & E-E_a, & \dots \\ \vdots & & & \vdots & \end{pmatrix} . \tag{7}$$

Дальше $\det(E-H)$ можно записать в виде суммы двух слагаемых:

$$\det(E-H) = (E-E_a)\cdot\det(E-H)_a + \det(E-H+g) \,, \tag{8}$$

где g -матрица, элемент которой

$$g_{ij} = -(E-E_a)\cdot\delta_{ia}\,\delta_{ja} \,. \tag{9}$$

Разлагая матрицу (7) по произведениям диагональных элементов, можно написать, что

$$\det(E-H)_a = \prod_{i\neq a}(E-E_i)\left\{1+\sum_{i\neq a}\frac{e_i^{(1)}}{E-E_i}\right\} , \tag{10}$$

где

$$e_i^{(1)} = \sum_{j\neq i,a}\frac{1}{E_i-E_j}\,S_{ij} + \sum_{\substack{j>k\\(\neq i,a)}}\frac{1}{(E_i-E_j)(E_i-E_k)}\,S_{ijk} \,, \tag{11}$$

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -V_{ij} \\ -V_{ji} & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{ijk} = \begin{pmatrix} 0, & -V_{ij}, & -V_{ik} \\ -V_{ji}, & 0, & -V_{jk} \\ -V_{ki}, & V_{kj}, & 0 \end{pmatrix} . \tag{12}$$

Аналогично находим ,что

$$\det(E-H+g) = \prod_{i\neq a}(E-E_i)\cdot\sum_{i\neq a}\frac{e_i^{(2)}}{E-E_i} \,, \tag{13}$$

где

$$e_i^{(2)} = S_{ai} + \sum_{j\neq a,i} \frac{1}{E_i - E_j} S_{aij} + \sum_{\substack{j>k\\ l\neq a,i}} \frac{1}{(E_i-E_j)(E_i-E_k)} S_{aijk} + \cdots \quad (14)$$

С помощью (10) и (13) находим, что

$$G_a(E) = \frac{1}{E - E_a + \sum_{i\neq a} \frac{e_i^{(2)}}{E-E_i}\left(1 + \sum_{i\neq a} \frac{e_i^{(1)}}{E-E_i}\right)^{-1}} \quad . \qquad (15)$$

Энергия составного состояния определяется из уравнения

$$E - E_a + \sum_{i\neq a} \frac{e_i^{(2)}}{E-E_i}\left(1 + \sum_{i\neq a} \frac{e_i^{(1)}}{E-E_i}\right)^{-1} = 0 \quad . \qquad (16)$$

Замечая, что $e_i^{(1)}$ не зависит от матричных элементов V_{ai}, $i = 1,2,\ldots$, а $e_i^{(2)}$ выражается через них, заключаем, что при неучете состояния $a\rangle$ мы получили бы вместо (16) уравнение

$$1 + \sum_{i\neq a} \frac{e_i^{(1)}}{E-E_i} = 0 \quad . \qquad (17)$$

Корни этого уравнения обозначим через E_i^{B}.

Тогда с помощью формулы, имеющей место для двух полиномов $P_M(x)$ и $P_N(x)$, при $M < N$,

$$\frac{P_M(x)}{P_N(x)} = \frac{1}{a_N} \sum_i \frac{P_M(x_i)}{x - x_i} \cdot \frac{1}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} \quad ,$$

где M, N – степени полиномов, a_N – коэффициент при x^N, x_i –корни $P_N(x)$, можно придать уравнению (16) вид:

$$E - E_a - \sum_i \frac{\hat{V}_{ai}^2}{E - E_i^B} = 0 \quad . \qquad (18)$$

Это уравнение можно получить другим способом, диагонализируя предварительно матрицу (7).

Пусть O^B –ортогональная матрица, диагонализирующая (7). Тогда

$$\det(E-H)_a = \det O^B (E-H)_a O^B = \prod_{j\neq a}(E - E_j^B) \quad . \qquad (19)$$

Беря расширенную ортогональную матрицу:

$$\bar{O}^B = \begin{pmatrix} 1, & 0, \ldots \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{O^B} \end{pmatrix} \quad , \qquad (20)$$

получим, что

$$\det(E-H+g) = \det \bar{O}^B (E-H+g) \bar{O}^B =$$
$$= -\sum_i \prod_{j\neq a,i} (E - E_j^B)\, \hat{V}_{ai}^2 \quad , \qquad (21)$$

где

$$\hat{V}_{aj} = \sum_l V_{al} C_{lj} = \sum_l V_{al} C_l(j) \quad , \qquad (22)$$

причем $C_l(j)$ –амплитуда простого состояния $|l\rangle$ в сложном состоянии $|j\rangle$, в которое не входит состояние $a\rangle$. Формулы (18) и (22) представляют собой модель Бора-Моттельсона, которая приводит к выражению силовой функции /2/:

$$P_a(E) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma + \Delta}{(E_a + \Delta E_a - E)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma + \Delta)^2} \quad , \qquad (23)$$

где Γ, ΔE_a –функции от E, Δ –интервал усреднения. Формула (23) носит общий характер, так как любую матрицу вида (5) можно привести к той, которую они использовали.

Отметим, однако, что в этой работе /2/ Γ, ΔE_a выражались через $\tilde{V}_{ij}$, которые, в свою очередь, определялись согласно (22) через неизвестные $C_\ell(j)$, подлежащие определению.

Исходя из свойств функции Грина, мы можем выразить через нее силовую функцию, которая по определению /2/ есть

$$\rho_a(E)=\sum_i \rho(E-E_i)\, C_a^2(E_i)\ . \qquad (24)$$

Здесь $C_a^2(E_i)$ -сила простого состояния $|a\rangle$ в составном состоянии с энергией E_i, $\rho(x)$ -некоторая нормированная положительная функция, быстро уменьшающаяся на расстоянии порядка Δ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\,dx = 1\ . \qquad (25)$$

Формула (3) позволяет писать (24) в виде

$$\rho_a(E)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \rho(E-\nu)\, G_a(\nu)\, d\nu\ . \qquad (26)$$

C - контуры, охватывающие внутри себя полюсы функции $G_a(\nu)$. Следуя /2/, берем в качестве $\rho(x)$ простую функцию

$$\rho(x)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{\Delta}{x^2+(\Delta/2)^2}\ . \qquad (27)$$

Тогда (26) будет иметь вид

$$\rho_a(E)=\frac{1}{\pi}\, \mathrm{Im}\, G_a\left(E-i\frac{\Delta}{2}\right)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{\Gamma+\Delta}{(E_a+\Delta E_a-E)^2+1/4\,(\Gamma+\Delta)^2}\ . \qquad (28)$$

Воспользовавшись формулами (10-15), дадим явные выражения для функций Γ и ΔE_a.

Введем обозначения:

$$\delta_1=\sum_{i\neq a}\frac{e_i^{(1)}(E-E_i)}{(E-E_i)^2+(\Delta/2)^2}\ ;\qquad \delta_1'=\Delta\sum_{i\neq a}\frac{e_i^{(1)}}{(E-E_i)^2+(\Delta/2)^2}\ ; \qquad (29)$$

$$\delta_2=\sum_{i\neq a}\frac{e_i^{(2)}(E-E_i)}{(E-E_i)^2+(\Delta/2)^2}\ ;\qquad \delta_2'=\Delta\cdot\sum_{i\neq a}\frac{e_i^{(2)}}{(E-E_i)^2+(\Delta/2)^2}\ . \qquad (30)$$

Тогда

$$\Delta E_a=-\frac{\delta_2(1+\delta_1)+\delta_1'\delta_2'/4}{(1+\delta_1)^2+1/4\ \delta_1'^2}\ , \qquad (31)$$

$$\Gamma=\frac{\delta_1'\delta_2-(1+\delta_1)\,\delta_2'}{(1+\delta_1)^2+1/4\ \delta_1'^2}\ , \qquad (32)$$

формулы (29-32) можно использовать для счета на ЭВМ. Однако они очень громоздки, поэтому могут быть особенно полезны, если ограничиваться небольшими степенями по V_{ij} в $e_i^{(1)}$ и $e_i^{(2)}$.

Автор выражает благодарность Л.А.Малову за обсуждение и В.Г.Соловьеву за внимание к данной работе.

Литература

1. Л.А.Малов, В.Г.Соловьев. Препринт ОИЯИ, Е4-8558, Дубна, 1975.
2. О.Бор и Б.Моттельсон. Структура атомного ядра. Изд."Мир", Москва, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 апреля 1975 г.