ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 8744

В.К.Лукьянов

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ В ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

1975

P4 - 8744

В.К.Лукьянов

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ В ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Направлено в ТМФ

1. Получение явного выражения для амплитуды рассеяния $f(\theta)$ на основе трехмерной формулировки высокоэнергетического приближения ВЭП /$E/V \gg 1$, $ka \gg 1$, где a - область действия потенциала/, представляет как теоретический, так и практический интерес. Последний связан с надеждой иметь для амплитуды простое выражение и избежать таким образом вычисления большого числа фаз рассеяния и суммирования плохо сходящегося парциального ряда. Кроме того, в трехмерной формулировке не требуется специального рассмотрения для нецентральных потенциалов.

В этом направлении выходит много работ /см. ссылки, напр., в [1,2] /. Однако в практических расчетах наиболее простыми пока остаются формулы Глаубера [3] и Шиффа [4]. . Первая получена на основе эйконального подхода и справедлива в области динамически малых углов $\theta < 1/\sqrt{ka}$. Вторая получена суммированием борновского ряда методом стационарной фазы для $\theta > 1/\sqrt{ka}$. Ее точность составляет $\approx$ 20-30% [5]. Поэтому в тех случаях, когда потенциал не параметризуется подгонкой под эксперимент, а известен точно, как например, в задачах рассеяния электронов ядрами, необходимо искать для $f(\theta)$ более строгое выражение. Цель настоящей работы - получить амплитуду ВЭП в области малых и больших углов рассеяния с единых позиций - на основе трехмерной квазиклассики.

2. Запишем волновое уравнение

$$\Delta\chi + K^2(\vec{r})\chi = 0, \qquad /1/$$

где импульс в поле $K = \sqrt{k^2 - U}$, а $V = \frac{\hbar^2}{2m}U$ - потенциал взаимодействия. Квазиклассические решения ищем в виде

$$\chi_{sc} = u \cdot e^{iS} . \qquad /2/$$

Подставляя /2/ в /1/, получаем, что функция действия $S(\vec r)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби:

$$(\nabla S)^2 = k^2 , \qquad /3/$$

определяющему S как интеграл по классической траектории

$$S(\vec r) = \int_{\vec r\,'} k\, ds , \qquad /4/$$

а амплитудная функция $u(\vec r)$ - уравнению сохранения тока

$$(u^2 \nabla S) = 0 \qquad /5/$$

или

$$u^2(\vec r_1)\, K(\vec r_1)\, D(\vec r_1) = u^2(\vec r_2)\, K(\vec r_2)\, D(\vec r_2) . \qquad /6/$$

где $D(\vec r)$ есть площадь нормального сечения трубки тока в точке $\vec r$. Напомним /6, 7/, что справа в /3/ отброшен квазиклассически малый член $\Delta u/u \sim (1/ka)^2$.

В условиях квазиклассики при $V/E \ll 1$ основную область рассеяния составляют классически недоступные углы $\theta > \theta_c \approx V/E$, куда, очевидно, частица попадает с экспоненциально малой вероятностью. В то же время найти соответствующую рассеянную волну на основе собственно квазиклассики невозможно, ибо χ_{sc} есть асимптотический ряд по степеням $(1/ka)^2$, а при такой точности теряются искомые экспоненциально малые члены. Из этого затруднения можно выйти, если воспользоваться методом /6/, согласно которому функцию ищем в виде $\chi = \chi_{sc} + \phi$. Тогда задача сводится к решению соответствующего неоднородного уравнения для ϕ .

3. В основе такого решения лежит квазиклассическая функция - поэтому исследуем ее более подробно, исполь-

зуя для этого ВЭП. Теперь в качестве траекторий можно брать прямые линии вдоль падающего пучка $oz\uparrow\uparrow\vec{k}_i$, а фазы /4/ раскладывать по малости V/E, ограничиваясь линейными членами. В качестве исходной функции достаточно взять суперпозицию двух решений вида /2/. Одно - плоская волна с амплитудой $u = 1$ - соответствует движению по трубе тока вдали от области действия потенциала ($r \gg a$), второе - соответствует движению по трубке тока, проходящего внутри области $r \leq a$. Тогда

$$\chi^{(+)}_{HE}(\vec{r},\vec{k}_i) = e^{i\vec{k}_i\vec{r}} + \psi^{(+)}_i(\vec{r},\vec{k}_i), \qquad /7/$$

где

$$\psi^{(+)}_i = u^{(+)}_i \cdot e^{iS_i} \qquad /8/$$

$$S_i = \vec{k}_i\vec{r} + \Phi_i(\vec{r},\vec{k}_i) \qquad \Phi = -\frac{1}{2k}\int_0^\infty V(\vec{r}-\hat{k}_i s)\,ds. \qquad /9/$$

В /7/ не учитывается несущественный для дальнейшего фактор $\exp(ik_i L)$ $(L\to\infty)$, который появляется в обеих функциях из-за интегрирования в фазе $k_i\int_{-L}^{z} dz$ по прямой вдоль падающего пучка.

Вид функции $u^{(+)}_i$ определяется на основе /6/. Левая часть уравнения /6/ определяется начальными условиями ($\vec{k}_i\vec{r} = -\infty$) : $u_0 = 1$, $K_0 = k_i$, $D_0 = \rho_0 d\rho_0 d\phi$. Справа входят величины в области действия потенциала $r \approx a$: $K = k_i(1 - V/2E)$, $D = \rho d\rho d\phi$ /ρ_0 и ρ - соответствующие прицельные параметры/. Для оценки отношения D/D_0 используем закон сохранения момента:

$$\rho_0 k_i = \rho k_i(1 - V/2E). \qquad /10/$$

откуда

$$d\rho_0 = [1 - (\rho/2E)(\partial V/d\rho)]d\rho. \qquad /11/$$

Тогда из /6/, /10/, /11/ получаем

$$u_i^{(+)}(r \approx a) = 1 - (V/4E)\,x\,, \qquad /12/$$

где

$$x = 1 + (\rho/V)(\partial V/\partial\rho)\,. \qquad /13/$$

Например, для гауссовского потенциала $V = V_G \exp(-3r^2/2\bar{R}^2)$, где $\bar{R}$ - среднеквадратичный радиус, величина x равна

$$x_G = 1 - 3\rho^2/\bar{R}^2\,. \qquad /14/$$

Аналогично найдем $u_i^{(+)}$ на бесконечности после рассеяния $(k_i r = +\infty)$, где $D = r^2 dr d\Omega$, $K = k_i$ $/ d\Omega$ - телесный угол/. Вводя классическое дифференциальное сечение $d\sigma_c/d\Omega = \rho_0 d\rho_0 d\phi/d\Omega$, получаем

$$u_i^{(+)}(r \to +\infty) = (1/r)\sqrt{d\sigma_c(\theta)/d\Omega}\,. \qquad /15/$$

При этом для функции /7/ приходим к известному асимптотическому выражению

$$\chi_{HE}^{(+)} = e^{i\vec{k}_i\vec{r}} + f_c(\theta)\, e^{ikr}/r\,, \qquad /16/$$

где амплитуда рассеяния

$$f_c(\theta) = \sqrt{d\sigma_c(\theta)/d\Omega}\; e^{i\Phi_i(r\to\infty)} \qquad /17/$$

имеет смысл лишь в области классических углов рассеяния $\theta < \theta_c \approx V/E \ll 1$. В фазе /17/ отброшен квадратичный по (V/E) член $k(z-r) \cong -kr\theta^2/2$, который на самом деле компенсируется точно, если в разложении /9/ оставлять аналогичную $(V/E)^2$ -поправку за счет отклонения траектории от направления падающего пучка на участке $(0,+\infty)$. В более общем случае к Φ_i надо добавить еще $n\pi/2$, где n - число точек касания траектории с каустикой.

4. Чтобы получить амплитуду рассеяния в области классически недоступных углов $\theta > \theta_c \approx V/E$, будем искать решение в виде

$$\chi^{(+)} = \chi_{HE}^{(+)} + \phi\,. \qquad /18/$$

Подставляя /18/ в /1/ и используя /3/, /5/, /7/, получаем для ϕ неоднородное уравнение

$$\Lambda\phi + K^2\phi = U e^{i\vec{k}_i\vec{r}} - \Lambda u_i^{(+)} e^{iS_i} , \qquad /19/$$

решение которого есть

$$\phi(\vec{r}) = \int [U(\vec{r}') e^{i\vec{k}_i\vec{r}'} - \Lambda' u (\vec{r}'\vec{k}_i) e^{iS(\vec{r}'\vec{k}_i)}] G(\vec{r}\vec{r}') d\vec{r}' . \qquad /20/$$

В первом интеграле переменная $\vec{r}'$ ограничена конечной областью действия потенциала, во втором - за счет поведения $\Lambda' u^{(+)}$. Действительно, в п.3 мы видели, что всюду вне области действия потенциала $u^{(+)} = 1$ и $\Lambda' u^{(+)} = 0$, за исключением участка траектории $(0, +\infty)$, где $u^{(+)}(\vec{r}') \simeq 1/r'$ и $\Lambda' u^{(+)} \simeq 1/r'^3$ Такое поведение подынтегральной функции /20/ позволяет сразу перейти в асимптотическую область $r \to \infty$, где функция Грина

$$G(\vec{r}\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \psi_f^{(-)*} ,$$

а

$$\psi_f^{(-)*} = u_f^{(-)*} e^{-iS_f} , \qquad /22/$$

$$S_f = \vec{k}_f\vec{r} - \Phi_f(\vec{r}\vec{k}) ; \quad \Phi_f = -\frac{1}{2k}\int_0^\infty U(\vec{r} + \hat{k}_f s)\, ds . \qquad /23/$$

Функция $\psi^{(-)}$ получается из $\psi^{(+)}$ операцией отражения времени[8] $\psi^{(-)}(\vec{r},\vec{k}) = \psi^{(+)*}(\vec{r},-\vec{k})$. Смысл $\psi^{(-)*}$ выясняется из рассмотрения движения соответствующего пакета волн. Легко видеть, что он описывает движение частицы из $+\infty$ в $-\infty$ вдоль $-\vec{K}$. Для точного квантово-механического решения на участке $(0, -\infty)$ появляется еще рассеянная волна. Это означает, что по аналогии с рассмотрением $\psi^{(+)}$ для амплитуды функции $\psi^{(-)*}$ имеем

$$u^{(-)*}(\vec{k}\vec{r} = +\infty) = 1; \; u^{(-)*}(\vec{k}\vec{r} = -\infty) = (\frac{1}{r}) \sqrt{d\sigma_c(\pi-\theta)/d\Omega} . \qquad /24/$$

Подставляя /21/ в /20/, получаем амплитуду рассеяния

$$f = f_1 + f_2 \ , \qquad /25/$$

$$f_1 = -\frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}u^{(-)*}e^{i\vec{q}\vec{r} + i\Phi_f} \ , \qquad /26/$$

$$f_2 = \frac{1}{4\pi}\int dr\Psi_f^{(-)*}\cdot\left(\frac{\Delta u_i^{(+)}}{u_i^{(+)}}\right)\cdot\Psi_i^{(+)}, \qquad /27/$$

где $q = 2k\sin\theta/2$ - переданный импульс. Ниже увидим, что f_1 определяет поведение амплитуды в области динамически малых $\theta < 1/\sqrt{ka}$, а f_2 - больших $\theta > 1/\sqrt{ka}$ углов рассеяния.

5. Воспроизведем вывод обычного эйконального выражения /3/, который получается здесь из формулы /26/. Для этого сделаем замену $\vec{r} = \vec{z} + \vec{\rho}$, где ρ - прицельный параметр. Основной вклад в интеграл дает область $r \lesssim a$. Поэтому можно положить $u^{(-)*} = 1$, а в приближении малых углов $\theta \ll 1/\sqrt{ka}$ отбросить в фазе добавку $\vec{q}\vec{z} \ll 1$. Тогда

$$f_1 = -\frac{ik}{2\pi}\int d\vec{\rho}e^{i\vec{q}\vec{\rho}}\int_{-\infty}^{\infty} d\left(-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\infty} U dz'\right) e^{\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{z} U dz'} , \qquad /28/$$

откуда

$$f_1 = -\frac{ik}{2\pi}\int \rho d\rho d\phi e^{i\vec{q}\vec{\rho}}\left[e^{-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\infty} U dz} - 1\right]. \qquad /29/$$

Для азимутально-симметричных потенциалов в приближении малых углов $\vec{q}\vec{\rho} \approx k\rho\theta\cos\phi$ можно выполнить еще одно интегрирование по $d\phi$ с помощью определения J_0 - функции Бесселя:

$$f_1(\theta) = -ik \int_0^{\infty} \rho d\rho J_0(k\rho\theta)\,[e^{-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\infty} U(\rho+\hat{k}z)} - 1]\,. \qquad /30/$$

Выражение для амплитуды вида /29/, где все взаимодействие стоит в фазе, наиболее просто использовать для построения теории многократного рассеяния Глаубера-Ситенко /3,9/, которая находит сейчас большое применение. Поскольку, однако, основные экспериментальные данные сосредоточены в области геометрически малых углов $\theta \lesssim 1$, необходимо делать обобщения /29/ на интервал $(1/\sqrt{ka}) < \theta < 1$. Имеется ряд возможностей такого обобщения /см., напр., /2,10/ и ссылки там же/. В эйкональном подходе это проще всего делать, модифицируя функцию Грина. Таким способом в работе /2/ получены выражения типа /29/.

6. В нашем случае амплитуда для $\theta > 1/\sqrt{ka}$ получается на основе единого квазиклассического рассмотрения, причем не возникает ограничения, связанного с геометрической малостью угла рассеяния. Проведем необходимые упрощения /27/.

В выражении /12/ не хватает нужной точности для отыскания $\Delta u_i^{(+)}$, которое входит в f_2 -амплитуду /27/. Однако можно,используя теорему Грина, перенести действие Δ на остальную часть подынтегрального выражения. Причем для этого удобно так преобразовать /27/, чтобы эта часть исчезала на асимптотике и соответствующие интегралы по бесконечно удаленной поверхности обращались в ноль. С этой целью проведем в /27/ интегрирование по частям:

$$f_2 = -\frac{1}{4\pi}\int dx\,dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\, u_f^{(-)*} e^{i\Phi_f}\, \frac{d}{dz}\int_z^{\infty} dz\,\Delta u_i^{(+)} e^{i\vec{q}\vec{r}+i\Phi_i} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int dx\,dy\, \{u_f^{(-)*} e^{i\Phi_f} \int_z^{\infty} dz\,\Delta u_i^{(+)} e^{i\vec{q}\vec{r}+i\Phi_i}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \qquad /31/$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{d}{dz}\,[u_f^{(-)*} e^{i\Phi_f}] \int_z^{\infty} dz\,\Delta u_i^{(+)} e^{i\vec{q}\vec{r}+i\Phi_i}\}\,.$$

Первый член здесь исчезает, что очевидно для верхнего предела, а для нижнего происходит в силу условия /24/. Во втором члене при дифференцировании по dz учтем, что $u^{(-)}$ изменяется слабо и вносит в производную поправку малости $O(1/ka)$ в сравнении с единицей. В результате:

$$f_2 = -\frac{i}{8k\pi}\int d\vec{r}\, u^{(-)*} e^{i\Phi_f}\, U(\vec{r}) \int_z^{\infty} e^{iq_z z + i\Phi_i}\, \Delta u_i^{(+)} dz. \qquad /32/$$

Интегрируя в последнем интеграле по частям, получаем ряд по обратным степеням $q_z = 2k\sin^2\theta/2$:

$$\int_z^{\infty} dz\, \Delta u_i^{(+)} e^{iq_z z + i\Phi_i} = \qquad /33/$$

$$= \Delta u_i^{(+)} \frac{e^{iq_z z + i\Phi_i}}{q_z}\Bigg|_z^{\infty} - \frac{1}{iq_z}\int_z^{\infty} dz e^{iq_z z}\frac{d}{dz}[\Delta u_i^{(+)} e^{i\Phi_i}].$$

Подставляя в /32/ только первый член из /33/, что справедливо в приближении больших углов $\theta \gg 1/\sqrt{ka}$, и используя затем теорему Грина, получаем

$$f_2 = \frac{1}{8\pi k q_z}\int d\vec{r}\, u_i^{(+)} \Delta\, [u_f^{(-)*} U e^{i\vec{q}\vec{r} + i\Phi_i + i\Phi_f}]. \qquad /34/$$

Легко видеть, что основной результат под интегралом определяется действием Δ на наиболее быстро меняющуюся функцию $\exp(i\vec{q}\vec{r})$. При этом остальные члены оказываются порядка малости $O(1/ka\theta)$ и $O(V/Eka)$ в сравнении с единицей. В результате амплитуда /34/ принимает вид $(\theta > 1/\sqrt{ka})$:

$$f_2 = -\frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}\, u_f^{(-)*} u_i^{(+)} e^{i\vec{q}\vec{r} + i\Phi_i + i\Phi_f} \cdot U(\vec{r}), \qquad /35/$$

или

$$f_2 = -\frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}\, \Psi_f^{(-)*}\, U(\vec{r})\, \psi_i^{(+)}. \qquad /36/$$

Если теперь положить $u_f^{(-)*} u_i^{(+)} = 1$, то /35/ переходит в формулу Шиффа /4/. Оценки, приведенные для нее и амплитуды /29/ в работе /11/, показывают, что f_1 и f_2 действительно работают в разных областях углов рассеяния $\theta < 1/\sqrt{ka}$ и $\theta > 1/\sqrt{ka}$, соответственно, и имеют небольшую область перекрытия.

7. Итак, на основе трехмерной квазиклассики в высокоэнергетическом приближении удалось единым образом получить амплитуды /26/ и /35/ для динамически малых и больших углов рассеяния. Эти выражения отличаются от известных формул Глаубера и Шиффа наличием под интегралом, соответственно, $u_f^{(-)*}$ - и $u_f^{(-)*} u_i^{(+)}$ - предэкспоненциальных множителей. Эффекты, возникающие за счет этих добавок, вообще говоря, малы. Поэтому в задачах рассеяния сильновзаимодействующих частиц они проявляются лишь при сравнениях с точными расчетами. При сравнении же с экспериментом их обычно имитируют небольшими вариациями параметров потенциала, которые получить другим способом, кроме как из эксперимента, пока все равно невозможно.

По-видимому, впервые роль таких предэкспоненциальных поправок в практических задачах была выявлена в работах /12, 13/, где рассматривалось кулоновское рассеяние электронов ядрами. В этом случае, кроме обычного домножения формул Глаубера и Шиффа на фактор $(v_f^+ v_i)$, где $v_{i,f}$ - спинорные функции соответствующих каналов, пришлось модифицировать саму структуру исходных амплитуд. Без каких-либо выкладок, на основе лишь сравнения с точными расчетами и экспериментом, авторы по существу интуитивно пришли именно к той записи амплитуд /26/ /в /12/ / и /35/ /в /13/ /, которая получена нами как результат квазиклассического рассмотрения. Последующие многочисленные расчеты и сравнения зарядовых формфакторов ядер /14/ показали, что эти формулы всегда работают с большой точностью.

8. Квазиклассические функции начального и конечного состояний рассеяния $\Psi^{(\pm)}$ можно с успехом использовать также для расчета других процессов, например, неупругого рассеяния с переходом ядра из основного ($|i\rangle$) в возбужденное ($|f\rangle$) состояние. Пусть такой

переход вызывается остаточным взаимодействием U_{int} /теперь полный потенциал есть $U = U + U_{int}(r,\xi)$, , где ξ - внутриядерные переменные/. Тогда, используя ВЭП, учтем, что при $E \gg V$ всегда выполняется приближение удара $E \gg E_{if}$ /E_{if} - энергия перехода в ядре/. Это значит, что процесс рассеяния происходит значительно быстрее внутриядерного движения. Тогда амплитуду упругого рассеяния можно рассчитать на "замороженном" ядре / ξ - считать постоянными/, а неупругую получить затем усреднением по заданным начальному и конечному состояниям.

$$f^{inel}(\theta) = \langle f|\bar{\bar{f}}^{el}(\theta\xi)|i\rangle, \qquad /37/$$

где

$$f^{el}(\theta\xi) = f^{el}(U \to \bar{\bar{U}} + U_{int}(\vec{r}\xi)) . \qquad /38/$$

Здесь потенциал перехода U_{int} входит в $\bar{f}^{el}$ нелинейным образом, в частности, в фазу экспонент /26/ и /35/ и приводит к появлению в f^{inel} высших порядков по U_{int}. Если же переходы слабые, то можно ограничиться линейным по U_{int} членом. Тогда для углов $\theta > 1/\sqrt{ka}$ получаем из /36/:

$$f_2^{inel}(\theta > 1/\sqrt{ka}) = -\frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}\,\Psi_f^{(-)*}\langle f|U_{int}|i\rangle \Psi_i^{(+)}, \qquad /39/$$

что совпадает с известным выражением метода искаженных волн.

В заключение автор выражает благодарность М.Х.Ханхасаеву за обсуждение ряда затронутых в статье вопросов.

Литература

1. *Б.М.Барбашов, Д.И.Блохинцев, В.В.Нестеренко, В.Н.Первушин, ЭЧАЯ, 4, 623 /1973/.*
2. *А.Г.Ситенко. ЭЧАЯ, 4, 546 /1973/.*
3. *R.J.Glauber. Lectures in Theoretical Physics, v. 1, p. 315, N.Y. /1959/.*

4. L.I.Schiff. Phys.Rev., 103, 443 /1956/.
5. J.J.Tiemann. Phys.Rev., 109, 183 /1958/.
6. И.И.Гольдман, А.Б.Мигдал. ЖЭТФ, 28, 394 /1955/.
7. А.Б.Мигдал, В.П.Крайнов. Приближенные методы квантовой механики. М., Наука, 1966.
8. А.И.Базь, Я.Б.Зельдович, А.М.Переломов, Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., Наука, 1971.
9. А.Г.Ситенко. Укр.физ.журнал, 4, 152 /1959/.
10. М.Х.Ханхасаев. Сообщение ОИЯИ, Р4-8475, Дубна, 1974.
11. D.S.Saxon, L.I.Schiff. Nuovo Cim., 6, 614 /1957/.
12. A.Baker. Phys.Rev., 134, B240 /1964/.
13. D.R.Yennie, F.L.Boos, D.C.Ravenhall. Phys.Rev., 137, B882 /1965/.
14. В.К.Лукьянов, Ю.С.Поль. ЭЧАЯ, 5, 955 /1974/.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 марта 1975 года.