СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 8707

В.Н.Ефимов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.

II. Одномерное уравнение

1975

P4 - 8707

В.Н.Ефимов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.

II. Одномерное уравнение

1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущем сообщении /1/ * были записаны уравнения Шредингера и Фаддеева для связанного состояния трех тождественных бесспиновых частиц, взаимодействие которых описывается парными потенциалами $\hat{V}(r)$. Запись потенциалов в виде $\hat{V}(\vec{r})$ подразумевает зависимость взаимодействия от относительного орбитального момента пары частиц. Для простоты далее будем считать, что частицы взаимодействуют только в s-состоянии и что полный орбитальный момент L системы трех частиц равен нулю: $L = 0$. В этом случае трехчастичная волновая функция $\Psi(\vec{r},\vec{\rho})$ будет зависеть только от r, ρ и угла между $\vec{r}$ и $\vec{\rho}$ / $\vec{r}, \vec{\rho}$ - координаты Якоби/, а результат воздействия $\hat{V}(\vec{r})$ на $\Psi(\vec{r}, \vec{\rho})$ будет определяться соотношением:

$$\hat{V}(\vec{r})|\Psi(\vec{r},\vec{\rho}) = V(r)\Psi_0(r,\rho), \qquad /1/$$

где

$$\Psi_0(r,\rho) = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega_{\vec{r}}\Psi(\vec{r},\vec{\rho}). \qquad /2/$$

Уравнение для $\Psi_0(r,\rho)$ непосредственно следует из уравнения Шредингера (E1, 22) и, с учетом симметрии (E1,21) волновой функции $\Psi(\vec{r},\vec{\rho})$, имеет вид:

$$\frac{1}{r_1\rho_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{3}{4}\frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} + E\right) r_1\rho_1\Psi_0(r_1,\rho_1) = V(r_1)\Psi_0(r_1,\rho_1) +$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int d\Omega_{\vec{r}_1}\left[V(r_2)\Psi_0(r_2,\rho_2) + V(r_3)\Psi_0(r_3,\rho_3)\right], \qquad /3/$$

---

* Далее ссылки на формулы работы /1/ будут указываться как (E1,...).

где $E<0$ - энергия связи трех частиц, $\vec{r}_i$, $\vec{\rho}_i$ - координаты Якоби, получающиеся из $\vec{r}_1$, $\vec{\rho}_1$ (E1, 20) с помощью циклических перестановок индексов.

В рассматриваемом нами частном случае $L=0$ полная волновая функция $\Psi(\vec{r}_1, \vec{\rho}_1)$ имеет вид

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{\rho}_1) = \psi(r_1,\rho_1) + \psi(r_2,\rho_2) + \psi(r_3,\rho_3), \qquad /4/$$

где функция канала $\psi(r,\rho)$, согласно (E1, 24), следующим образом выражается через $V(r)\,\Psi_0(r,\rho)$:

$$\psi(r,\rho) = \int\limits_0^\infty r'^2 dr' \int\limits_0^\infty \rho'^2 d\rho'\, G_0(r,\rho;r',\rho';E)\, V(r')\,\Psi_0(r',\rho'), \qquad /5/$$

$$G_0(r,\rho;r',\rho';E) = -\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\infty k^2 dk \int\limits_0^\infty q^2 dq\, \frac{j_0(kr)\, j_0(kr')\, j_0(q\rho)\, j_0(q\rho')}{k^2+\frac{3}{4}q^2 - E}. \qquad /6/$$

По аналогии с /2/ введем s-компоненту $\Psi_0(r,q)$ фурье-образа (E1, 29) волновой функции /4/ по переменной $\vec{\rho}$:

$$\Psi_0(r,q) = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega_{\vec{r}}\, \Psi(\vec{r},\vec{q}) = 4\pi\int\limits_0^\infty \rho^2 d\rho\, j_0(q\rho)\,\Psi_0(r,\rho), \qquad /7/$$

которая, согласно /3/, удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{1}{r_1}\left[\frac{d^2}{dr_1^2} + E_q - V(r_1)\right] r_1\Psi_0(r_1,q) = S(r_1,q), \qquad /8/$$

где

$$E_q = E - \frac{3}{4}q^2, \qquad /9/$$

$$S(r_1,q) = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega_{\vec{r}_1}\, d\vec{\rho}_1\, e^{-i\vec{q}\vec{\rho}_1}\left[V(r_2)\Psi_0(r_2,\rho_2) + V(r_3)\Psi_0(r_3,\rho_3)\right].$$

Зависимость от r $\Psi_0(r,q)$, в соответствии с (E1, 30), будет определяться соотношением:

$$\Psi_0(r,q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{p}\, \Psi_{0p}(r,E_q)\,[\,\phi(-\frac{1}{2}\vec{p}+\frac{3}{4}\vec{q},-\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q})+$$

$$+\phi(-\frac{1}{2}\vec{p}-\frac{3}{4}\vec{q},\ \vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q})\,]\ , \qquad /10/$$

где $\Psi_{0p}(r,E)$ - s -компонента внемассовой двухчастичной функции с асимптотикой (E1,4).

Таким образом, из /4/ и /5/ следует, что как функция канала $\phi(r,\rho)$, так и полная функция $\Psi(r,\rho)$ будут однозначно определены, если будет определено $V(r)\Psi_0(r,q)$. Это обстоятельство позволяет получить трехчастичное уравнение в модели граничных условий /М.Г.У./, так как в М.Г.У. произведение $V(r)\Psi_0(r,q)$ имеет вполне определенный и однозначный смысл.

2. *Модель граничных условий в задаче трех частиц*

Рассмотрим сначала, как и в задаче двух частиц /1/, "нормальные" двухчастичные потенциалы $V(r)$. В этом случае можно построить функцию Грина $H(r,r',E)$ неоднородного уравнения /8/:

$$H(r,r',E) = \begin{cases} -i\sqrt{E}\,\Psi_{\sqrt{E}}(r,E)\,\phi(r',E), & r<r', \\ -i\sqrt{E}\,\Psi_{\sqrt{E}}(r',E)\,\phi(r,E), & r>r', \end{cases} \qquad /11/$$

если считать, что известны два линейно-независимых решения однородного уравнения /8/ $\Psi_{\sqrt{E}}(r,E)$ и $\phi(r,E)$ со следующей асимптотикой при $r\to\infty$:

$$\Psi_{\sqrt{E}}(r,E) \sim j_0(r\sqrt{E}) + i\sqrt{E}\; t_0(\sqrt{E},\sqrt{E},E)\,h_0^{(1)}(r\sqrt{E}),$$

$$\phi(r,E) \sim h_0^{(1)}(r\sqrt{E}), \qquad /12/$$

где $j_0(x)$, $h_0^{(1)}(x)$ -, соответственно, сферические функции Бесселя и Ганкеля 1-го рода, $t(\sqrt{E},\sqrt{E},E)$- s-компонента двухчастичной t-матрицы (E1,1) на энергетической поверхности. С помощью функции Грина /11/ решение уравнения /8/ формально может быть записано следующим образом:

$$\Psi_0(r,q)=\int_0^\infty r'^2dr'H(r,r',E_q)S(r',q). \qquad /13/$$

Для потенциала $V(r)$ с конечным радиусом действия c /$V(r)=0$ при $r>c$/ из выражений /11/-/13/ следует, что произведение $V(r)\Psi_0(r,q)$, необходимое для определения трехчастичной волновой функции, можно представить в виде, не содержащем явным образом потенциала $V(r)$:

$$V(r)\Psi_0(r,q)=\Theta(c-r)D(r,q)+g(r,E_q)R(q), \qquad /14/$$

где $\Theta(x)=1$, $x>0$; $\Theta(x)=0$, $x<0$,

$$R(q)=i\sqrt{E_q}\int_c^\infty r^2dr\,h_0^{(1)}(r\sqrt{E_q})\,S(r,q), \qquad /15/$$

$$g(r,E)=-V(r)\,\Psi_{\sqrt{E}}(r,E). \qquad /16/$$

С помощью определения (E1,1) двухчастичной t-матрицы выражение /16/ может быть представлено также в виде

$$g(r,E)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty p^2dp\,j_0(pr)\,t_0(p,\sqrt{E},E). \qquad /17/$$

В модели граничных условий двухчастичная t-матрица имеет вполне определенное значение (E1,9–10), поэтому будем считать, что соотношения /14/ и /17/ имеют место и в случае, когда взаимодействие частиц описывается М.Г.У. Таким образом, задача нахождения трехчастичной волновой функции в М.Г.У. свелась к определению двухмерной функции $D(r,q)$ и одномерной функции $R(q)$. Уравнения для функций $D(r,q)$ и $R(q)$ могут быть получены на основе выражения /10/ и граничных условий (E1,6–7) для двухчастичной волновой функции, согласно которым для s -компоненты $\Psi_0(r,q)$ трехчастичной волновой функции будем иметь

$$\Psi_0(r,q) = 0 , \qquad r \le c_- , \qquad /18/$$

$$c\left[\frac{d}{dr} r\Psi_0(r,q)\right]_{r=c_+} = f_0\left[r\Psi_0(r,q)\right]_{r=c_+} . \qquad /19/$$

где $c_+ = c + \epsilon$, $\epsilon \to 0$.

Условие /18/ можно записать, согласно /7/, в координатном представлении, и тогда из /18/ и из уравнения /3/ следует, что в области $r_1 < c$ будет иметь место равенство:

$$V(r_1)\Psi_0(r_1,\rho_1) + \frac{1}{4\pi}\int d\Omega_{r_1}\left[V(r_2)\Psi_0(r_2,\rho_2) + V(r_3)\Psi_0(r_3,\rho_3)\right] = 0 , \qquad r_1 < c . \qquad /20/$$

Заметим, что если в области $r_1 < c$ выполнено уравнение /20/, то это с необходимостью приводит к тому, что $\Psi_0(r_1,\rho_1) = 0$, так как отличное от нуля решение однородного уравнения /3/, конечное при $\rho_1 \to 0$, несовместимо с граничным условием при $\rho_1 \to \infty$.

Первое уравнение для функций $D(r,q)$ и $R(q)$ следует из /20/ после подстановки выражения /14/ и использования явного вида функции $g(r,E)$. При получении последнего можно использовать соотношение /17/, что дает возможность избежать введения какой-либо конкретной формы для потенциала взаимодействия $V(r)$. Подстановка в /17/ явного выражения (Е1, 9) для полумассовой t -матрицы в М.Г.У. приводит к результату

$$g(r,E) = -\frac{1}{r}\,\frac{e^{-ic\sqrt{E}}}{f_0 - ic\sqrt{E}}\left[f_0\delta(r-c) + c\delta'(r-c)\right] , \qquad /21/$$

что позволяет получить следующее уравнение:

$$\Theta(c-r_1)D(r_1,\rho_1)+\frac{1}{4\pi}\Theta(c-r_1)\int d\Omega_{\vec r_1}\,[\Theta(c-r_2)D(r_2,\rho_2)+$$

$$+\Theta(c-r_3)D(r_3,\rho_3)]=-\Theta(c-r_1)F(r_1,\rho_1), \qquad /22/$$

где

$$F(r_1,\rho_1)=\frac{1}{2\pi^2}\int d\Omega_{\vec r_1}\int_0^\infty q^2dq\,[g(r_2,E_q)\,j_0(q\rho_2)+$$

$$+g(r_3,E_q)\,j_0(q\rho_3)]\,R(q), \qquad /23/$$

а координаты Якоби $\vec r_2, \vec\rho_2$ и $\vec r_3, \vec\rho_3$ связаны, согласно (Б.1.20), с $\vec r_1$, $\vec\rho_1$ соотношениями:

$$\vec r_2=-\frac{1}{2}\vec r_1+\vec\rho_1, \qquad \vec r_3=-\frac{1}{2}\vec r_1-\vec\rho_1, \qquad /24/$$

$$\vec\rho_2=-\frac{3}{4}\vec r_1-\frac{1}{2}\vec\rho_1, \qquad \vec\rho_3=\frac{3}{4}\vec r_1-\frac{1}{2}\vec\rho_1 .$$

При получении уравнения /22/ была введена функция

$$D(r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty q^2dq\,j_0(q\rho)\,D(r,q) \qquad /25/$$

и было использовано соотношение

$$\Theta(c-r)\,g(r,E)=0, \qquad /26/$$

которое следует из того факта, что, согласно М.Г.У., в /21/ под c следует понимать $c_+=c+\epsilon$, $\epsilon\to 0$.

Второе уравнение для функций $D(r,\rho)$ и $R(q)$ получается из граничного условия /19/, для чего полную волновую функцию необходимо выразить через функции каналов согласно соотношению /4/. В соответствии с выражениями /5/, /6/ и /7/ из /14/ следует, что в импульсном представлении функция канала $\psi(k,q)$ имеет вид

$$\psi(k,q) = -\frac{4\pi c}{k^2+\frac{3}{4}q^2-E}\,\frac{\cos kc - f(E_q)\,j_0(kc)}{f(E_q)-ic\sqrt{E_q}}\,e^{-ic\sqrt{E_q}}R(q) -$$

$$-\frac{1}{4\pi(k^2+\frac{3}{4}q^2-E)}\int d\vec{r}\,d\vec{\rho}\,e^{i\vec{k}\vec{r}+i\vec{q}\vec{\rho}}\,\Theta(c-r)\,D(r,\rho)\,, \qquad /27/$$

причем индекс $\ell=0$ у логарифмической производной f опущен и явным образом указана возможная зависимость f от энергии $E_q = E-\frac{3}{4}q^2$. Окончательно легко показать, что условие /19/ приводит к следующему уравнению:

$$e^{-ic\sqrt{E_q}}R(q) - \frac{c}{\pi^2}\int d\vec{q}\,'\,\frac{\cos p_1 c - f(E_{q'})\,j_0(p_1 c)}{q^2+q'^2+\vec{q}\vec{q}\,'-E}\,\cdot$$

$$\cdot\frac{[\cos p_2 c - f(E_q)\,j_0(p_2 c)]\,e^{-ic\sqrt{E_{q'}}}\,R(q')}{L(E_q)\,[f(E_q)-ic\sqrt{E_q}\,][f(E_{q'})-ic\sqrt{E_{q'}}\,]} + \qquad /28/$$

$$+\frac{1}{cL(E_q)\,[f(E_q)-ic\sqrt{E_q}\,]}\left\{c\left[\frac{d}{dr}\,r\Psi_0^{(1)}(r,q)\right]\Big|_{c+} -\right.$$

$$\left.-f(E_q)\left[r\Psi_0^{(1)}(r,q)\right]\Big|_{c+}\right\} = 0\,,$$

где

$$\vec{p}_1 = \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{q}\,'\,, \qquad \vec{p}_2 = \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{q}\,'\,,$$

$$E_q = E - \frac{3}{4}q^2, \qquad E_{q'} = E - \frac{3}{4}q'^2\,,$$

$$L(E) = \frac{1}{2ic\sqrt{E}}\left[\frac{f(E)+ic\sqrt{E}}{f(E)-ic\sqrt{E}} - e^{2ic\sqrt{E}}\right],$$

$$\Psi_0^{(1)}(r,q) = -\frac{1}{(4\pi)^2}\int d\vec{r}_1 d\vec{\rho}_1 K_0(r,r_1,E_q)\, j_0(q\rho_1)\,\times$$

$$\times[\Theta(c-r_1)D(r_1,\rho_1)+\Theta(c-r_2)D(r_2,\rho_2)+\Theta(c-r_3)D(r_3,\rho_3)],$$

$$K_0(r,r_1,E) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty k^2 dk\, \frac{j_0(kr)\, j_0(kr_1)}{k^2-E}.$$

3. Решение уравнения для функции $D(r,\rho)$

Уравнение /28/ содержит неизвестную двухмерную функцию $D(r,\rho)$, которая,в свою очередь, удовлетворяет уравнению /22/. В работе /2/* было показано, что в случае твердого кора для этого уравнения можно найти точное аналитическое решение. С помощью метода, предложенного в /2/ уравнение /22/ может быть решено аналитически и для более общего случая модели граничных условий. Это обстоятельство совместно с выражением /23/ позволяет точным образом, без каких-либо приближений, привести двухмерное уравнение /28/ к одномерному уравнению для одной функции $R(q)$, что является характерной особенностью трехчастичной задачи в случае двухчастичных взаимодействий, описываемых с помощью М.Г.У.

Правая часть уравнения /22/, согласно /21/ и /23/, имеет вид:

$$\Theta(c-r_1)F(r_1,\rho_1) = -\frac{1}{r_1\rho_1}\Theta(c-r_1)\chi(R) -$$

$$-\frac{c}{r_1\rho_1}\Theta(c-r_1)[\delta(\tfrac{1}{2}r_1+\rho_1-c)-\delta(\tfrac{1}{2}r_1-\rho_1-c)]\phi(R). \qquad /29/$$

---

* Автор работы /2/ В.Ефимов /ИЯФ, Ленинград/ - однофамилец автора данного сообщения.

где

$$\chi(R) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty q^2 dq\, R(q)\, b(E_q)\, F_0(q,R)\,, \qquad /30/$$

$$\phi(R) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty q^2 dq\, R(q)\, b(E_q)\, j_0(q\rho_0)\,, \qquad /31/$$

$$b(E) = e^{-ic\sqrt{E}}\left[f(E) - ic\sqrt{E}\right]^{-1}\,,$$

$$F_0(q,R) = f(E_q)\, j_0(q\rho_0) - \frac{3}{4}\frac{qc^2}{\rho_0}\, j_1(q\rho_0)\,, \qquad /32/$$

$$R^2 = r_1^2 + \frac{4}{3}\rho_1^2\,, \qquad \rho_0^2 = \frac{3}{4}(R^2 - c^2)\,.$$

В приведенных выше формулах, как в /27/ и /28/, явным образом указана возможная зависимость логарифмической производной f от энергии E, а функция $F_0(q,R)$ отлична от нуля только в области

$$\left|\frac{1}{2}r_1 - \rho_1\right| < c < \frac{1}{2}r_1 + \rho_1\,. \qquad /33/$$

В соответствии с /29/ решение уравнения /22/ будем искать в виде:

$$\Theta(c-r)\, D(r,\rho) = \Theta(c-r)\frac{1}{r\rho}A(r,\rho) + \Theta(c-r)\frac{c}{r\rho}\left[\delta\left(\frac{1}{2}r + \rho - c\right) - \delta\left(\left|\frac{1}{2}r - \rho\right| - c\right)\right]\phi(R)\,, \qquad /34/$$

где функция $A(r,\rho)$ в области $r < c$ удовлетворяет уравнению:

$$A(r,\rho) + 2\int_{\left|\frac{1}{2}r-\rho\right|}^{\frac{1}{2}r+\rho}\frac{dr'}{\rho'}\,\Theta(c-r')\,A(r',\rho') = \chi(R) - 2c\phi(R)\, G(r,\rho)\,, \qquad /35/$$

$$G(r,\rho) = \int\limits_{|\frac{1}{2}r-\rho|}^{\frac{1}{2}r+\rho} \frac{dr'}{\rho'}\Theta(c-r')\left[\delta\left(\frac{1}{2}r'+\rho'-c\right)-\delta\left(\left|\frac{1}{2}r'-\rho'\right|-c\right)\right],$$

$$\rho'^2 = \frac{3}{4}(R^2-r'^2), \quad R^2 = r^2+\frac{4}{3}\rho^2 . \qquad /36/$$

Введем далее, как и в работе [2], новые переменные R, α, α':

$$r = R\sin\alpha, \quad \rho = \frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\alpha,$$

$$r' = R\sin\alpha', \quad \rho' = \frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\alpha', \qquad /37/$$

$$R^2 = r^2+\frac{4}{3}\rho^2 = r'^2+\frac{4}{3}\rho'^2 ,$$

в которых уравнение /35/ и выражение /36/ приобретают вид:

$$A(R,\alpha) + \frac{4}{\sqrt{3}} \int\limits_{|\frac{\pi}{3}-\alpha|}^{\min(\frac{\pi}{3}+\alpha,\, \frac{2\pi}{3}-\alpha)} d\alpha'\Theta(c-R\sin\alpha')A(R,\alpha') = \qquad /38/$$

$$= \chi(R) - 2c\delta(R)\,G(R,\alpha) ,$$

$$G(R,\alpha) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int\limits_{|\frac{\pi}{3}-\alpha|}^{\min(\frac{\pi}{3}+\alpha,\, \frac{2\pi}{3}-\alpha)} d\alpha'\Theta(c-R\sin\alpha')\left\{\delta\left[R\Theta\left(\frac{\pi}{6}-\alpha'\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha'\right)+\right.\right. \qquad /39/$$

$$\left.\left. + R\Theta\left(\alpha'-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha'\right)-c\right]-\delta\left[R\sin\left|\frac{\pi}{3}-\alpha'\right|-c\right]\right\}.$$

В уравнении /38/ переменная R является параметром, и в зависимости от значения R область $r < c$ делится, согласно /37/ и /33/, на ряд областей, изображенных на *рис. 1*, в которых как правая часть, так и пределы

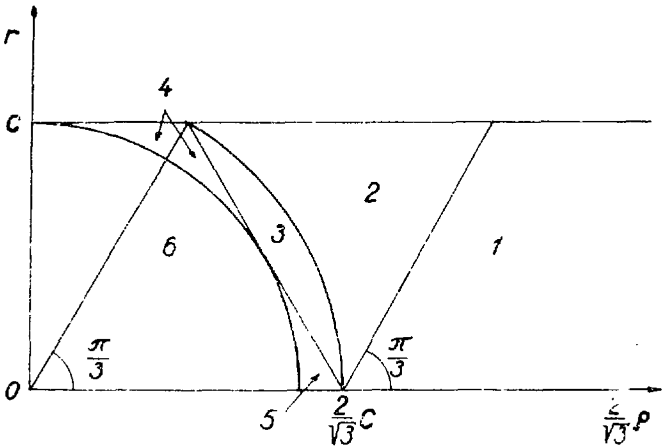

Рис. 1. Области определения функции $A(R,\alpha)$.

интегрирования в /38/ имеют разные значения. Используя явный вид $G(R,\alpha)$ /38/, легко показать, что в областях 1-6, указанных на *рис. 1*, функция $A(R,\alpha)$ удовлетворяет уравнениям:

$$A_1(R,\alpha) = 0\,,$$

/40/

$$A_2(R,\alpha) + \frac{4}{\sqrt{3}} \int\limits_{\frac{\pi}{3}-\alpha}^{\alpha_0} d\alpha' A_2(R,\alpha') = \chi(R)\,,$$

$$A_3(R,\alpha) + \frac{4}{\sqrt{3}} \int\limits_{\frac{\pi}{3}-\alpha}^{\alpha_1} d\alpha' A_3(R,\alpha') + \qquad /41/$$

$$+\frac{4}{\sqrt{3}}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_0} d\alpha\ A_4(R,\alpha') = \chi(R) - \frac{4c}{\sqrt{3}\,R\cos\alpha_0}\,\delta(R),$$

$$A_4(R,\alpha) + \frac{4}{\sqrt{3}}\int\limits_{\alpha_1}^{\frac{2\pi}{3}-\alpha} d\alpha'\,A_4(R,\alpha') + \frac{4}{\sqrt{3}}\int\limits_{\left|\frac{\pi}{3}-\alpha\right|}^{\alpha_2} d\alpha'\,A_5(R,\alpha') + \tag{42}$$

$$+\frac{4}{\sqrt{3}}\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1} d\alpha'\,A_3(R,\alpha') = -\frac{8c}{\sqrt{3}\,R\cos\alpha_0}\,\delta(R),$$

$$A_5(R,\alpha) + \frac{4}{\sqrt{3}}\int\limits_{\frac{\pi}{3}-\alpha}^{\frac{\pi}{3}+\alpha} d\alpha'\,A_4(R,\alpha') = 0, \tag{43}$$

$$A_6(R,\alpha) + \frac{4}{\sqrt{3}}\int\limits_{\left|\frac{\pi}{3}-\alpha\right|}^{\min\left(\frac{\pi}{3}+\alpha,\,\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)} d\alpha'\,A_6(R,\alpha') = 0, \tag{44}$$

где $\alpha_0 = \arcsin\frac{c}{R}$, $\alpha_1 = \frac{2\pi}{3} - \alpha_0$, $\alpha_2 = \alpha_0 - \frac{\pi}{3}$.

Эти уравнения отличаются от уравнений работы /2/ только правыми частями, и для их решения можно использовать метод, предложенный в /2/ и заключающийся в последовательном дифференцировании уравнений /40/-/44/ по α и в использовании этих уравнений для определения функций $A(R,\alpha)$ от сдвинутого аргумента α.

Применение вышеизложенной процедуры приводит к следующим дифференциальным уравнениям для $A(R,\alpha)$:

$$A''_{2,3}(R,\alpha) + \frac{16}{3}A_{2,3}(R,\alpha) = 0, \tag{45}$$

$$A''_{4,5}(R,\alpha) + 16A_{4,5}(R,\alpha) = 0. \tag{46}$$

Легко убедиться, что решения уравнений /45/ и /46/, удовлетворяющие интегральным уравнениям /40/-/43/, имеют следующий вид:

$$A_2(R,\alpha) = B(R)\sin\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{4}\right], \qquad /47/$$

$$A_3(R,\alpha) = C(R)\sin\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{4}\right], \qquad /48/$$

$$A_4(R,\alpha) = A_5(R,\alpha) = D(R)\sin 4\alpha, \qquad /49/$$

где

$$B(R) = -\frac{\chi(R)}{\sin\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\alpha_0-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{4}\right]},$$

$$C(R) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\,Q(R)}\left[\chi(R)\sin 4\kappa_0 + \frac{4c\,\phi(R)}{R\cos\alpha_0}\cos 4\kappa_0\right],$$

$$D(R) = -\frac{\sqrt{3}}{2Q(R)}\left[\chi(R)\sin\frac{4}{\sqrt{3}}\kappa_0 + \frac{4c\,\phi(R)}{\sqrt{3}\,R\cos\alpha_0}\cos\frac{4}{\sqrt{3}}\kappa_0\right],$$

$$Q(R) = \frac{\sin\left(4+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\kappa_0}{4+\frac{4}{\sqrt{3}}} - \frac{\sin\left(4-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\kappa_0}{4-\frac{4}{\sqrt{3}}},$$

$$\kappa_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha_0,$$

а функции $\chi(R)$ и $\omega(R)$ определяются выражениями /30/ и /31/.

В области 6 решение $A_6(R,\alpha)$ уравнения /44/ будет иметь вид:

$$A_6(R,\alpha) = F(R)\ \sin 4\alpha \quad , \qquad /50/$$

где $F(R)$ - произвольная функция R. Наличие этого произвола соответствует указанному в работе /3/ факту, что в М.Г.У. трехчастичная волновая функция определяется неоднозначно. Для устранения этой неоднозначности в /3,4/ вводится дополнительное условие, содержащее существенно трехчастичный параметр. Однако для системы трех тождественных бозонов из условия симметрии полной волновой функции /4/ следует, как это показано в работе /2/, что в /50/ $F(R) = 0$, если М.Г.У. считать предельным случаем потенциала, рассмотренного в /5/:

$$V(r) = V_0\,\Theta(c-r) - c\,V_1\,\delta(r-c),$$

$$V_0, V_1 \to \infty, \qquad c(\sqrt{V_0} - c\,V_1) = 1 .$$

Таким образом, из уравнения /28/ с помощью соотношения /27/ однозначно определяется волновая функция системы трех бозонов. Аналогичные соображения применимы также и к системе трех нуклонов, для которой компоненты волновой функции в случае зарядовой инвариантности обладают определенной перестановочной симметрией.

Изложенный выше метод решения трехчастичной задачи является по существу методом решения непосредственно уравнения Шредингера /3/ с учетом граничных условий /18/ и /19/ и в этом отношении он существенным образом отличается от метода работы /3/, основанного на модификации уравнений Фаддеева в случае М.Г.У.

Литература

1. В.Н.Ефимов. ОИЯИ, Р4-8580, Дубна, 1975.
2. В.Ефимов. ЯФ, 10, 107 /1969/.
3. D.D.Brayshaw. Phys.Rev., D7, 1835 (1973).
4. D.D.Brayshaw. Phys. Rev., D8, 2572 (1973).
5. Y.E.Kim, A.Tubis. Phys.Rev., C1, 414 (1970).

*Рукопись поступила в издательский отдел
19 марта 1975 года.*