

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

B-486

P4-87-929

**С.И.Виницкий, В.М.Дубовик, Ю.А.Куперин*,
К.А.Макаров*, Б.Л.Марковски, Б.С.Павлов***

**ЛОКАЛЬНОЕ АДИАБАТИЧЕСКОЕ
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ
В КВАНТОВОЙ СИСТЕМЕ НЕСКОЛЬКИХ ЧАСТИЦ**

Направлено в "International Journal of Modern
Physics"

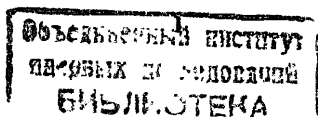
* Ленинградский государственный университет

1987

ВВЕДЕНИЕ

В стандартном адиабатическом рассмотрении задачи нескольких тел^{/1/} разбиение на быструю и медленную подсистемы обычно жестко фиксируют для всех секторов задачи. На самом деле такое разбиение не может быть универсальным. Выделение быстрых и медленных подсистем следует, вообще говоря, производить различным образом в различных областях конфигурационного пространства; таким образом, эта операция имеет динамический характер. По этой причине методы дифференциальной геометрии и алгебраической топологии являются естественными для глобального описания подобных задач^{/2,3/}. При таком подходе нетривиальная ковариантная производная и дифференциальные топологические инварианты (фаза Берри^{/4/}, классы Черна^{/5/} и т.п.) могут быть выражены в терминах спектральных свойств "быстрого" гамильтониана или, выражаясь упрощенно, в терминах спектральной геометрии.

Геометрический анализ секторов рассеяния задачи нескольких тел осложняется дополнительно из-за некомпактности конфигурационного пространства^{/6/}. В этом случае еще более очевидным становится то обстоятельство, что различным разбиениям спектра соответствуют, вообще говоря, различные эффективные динамические уравнения для медленных подсистем. Поэтому изучение геометрии конфигурационного пространства составляет первый этап данного подхода^{/7,8/}. Волновые функции состояний системы рассматриваются как сечения векторного расслоения с данной базой и эрмитовыми скалярными произведениями в слоях^{/9/}. Соответствующее гильбертово пространство сечения с естественно определенным скалярным произведением иногда называется гильбертовым расслоением. Спектральное разложение шредингеровского оператора задает разложение единицы в гильбертовом пространстве, и, когда гамильтониан является эллиптическим оператором, дискретному и непрерывному спектрам сопоставляют компактные и некомпактные базовые пространства соответственно. Последнее относится к случаю физически интересных процессов рассеяния с перераспределением частиц. Поскольку конструктивная теория некомпактных многообразий все еще развита недостаточно для практических целей, обычно приходится вводить подходящие компактификации. Тогда изучение глобальных свойств адиабатического представления сво-



дится в конечном счете к построению и исследованию равномерных асимптотик волновых функций. Применение методов теории гомотопий и хирургии многообразий, в принципе, позволяет с помощью этих асимптотик эффективно конструировать соответствующие расслоения. Впоследствии мы будем для упрощения предполагать без дальнейших оговорок, что все необходимые регуляризации, использующие волновые пакеты вместо плоских волн, уже введены с тем, чтобы можно было работать с векторами обычного гильбертова пространства.

Структура настоящей работы такова. В разделе I определены основные объекты геометрического типа для трехчастичной квантовой задачи. В их терминах построен оператор эволюции репера и показано, что этот оператор имеет блочную структуру, отвечающую различным частям спектра многочастичного гамильтониана. В разделе 2 методом усреднения по подвижному реперу построены соответствующие реперному расслоению связности. Определены аналогии массовых операторов. В разделе 3 методом спектрального проектирования задана эрмитова метрика на слоях комплексного векторного расслоения, которая стандартным образом продолжается на пространстве сечений этого расслоения. Выписаны условия согласования метрики с определенной в разделе 2 линейной связностью. В разделе 4 процедура получения эффективных динамических уравнений реализована для уравнений Фаддеева. Некоторые геометрические свойства, следующие из спектральных характеристик эффективных гамильтонианов, проиллюстрированы на простых примерах в разделе 5.

I. ОПЕРАТОР ЭВОЛЮЦИИ РЕПЕРА

Рассмотрим систему трех бесспиновых частиц, конфигурационное пространство которой, после отделения движения центра масс, есть $\mathbb{R}^6 = \mathcal{X}_\alpha = \mathbb{R}^3_{x_\alpha} \times \mathbb{R}^3_{y_\alpha}$. В терминах приведенных координат Якоби $x_\alpha, y_\alpha, X = x_\alpha \oplus y_\alpha$ гамильтониан системы H запишется в виде ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$)

$$H = -\Delta_{x_\alpha} - \Delta_{y_\alpha} + \sum_{\beta} V_{\beta}(x_{\beta}). \quad (1)$$

В качестве базы выберем $\mathcal{B}_\alpha = \mathbb{R}^3_{x_\alpha}$. Соответствующий оператор Шредингера в слое

$$H(x_\alpha) = -\Delta_{y_\alpha} + \sum_{\beta \neq \alpha} V_{\beta}(y_\alpha, x_\alpha) \equiv -\Delta_{y_\alpha} + \bar{V} \quad (2)$$

зависит от точки x_α базы \mathcal{B}_α как от параметра.

Спектральная задача для гамильтониана $H(x_\alpha)$

$$H(x_\alpha) \varphi(x_\alpha, y_\alpha) = E \varphi(x_\alpha, y_\alpha), \quad (3)$$

$$\varphi(x_\alpha, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3_{y_\alpha})$$

порождает гильбертово расслоение с некомпактной базой \mathcal{B}_α . В случае быстроубывающих потенциалов V_β спектр $\mathcal{E}(H(x_\alpha))$ оператора $H(x_\alpha)$ состоит из дискретной \mathcal{E}_d и абсолютно непрерывной \mathcal{E}_c компонент. Соответствующие волновые функции будем обозначать через φ_n и φ_{q_α} , комбинируя их в вектор-столбец $\varphi = \{\varphi_n, \varphi_{q_\alpha}\}$, где $E = q_\alpha^2$ для φ_{q_α} и $E = E_n(x_\alpha)$ для φ_n .

Обычные соотношения ортогональности

$$\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nn'}, \quad (4)$$

$$\langle \varphi_{q_\alpha} | \varphi_{q'_\alpha} \rangle = \delta(q_\alpha - q'_\alpha)$$

и полноты определяют тогда подвижный репер в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^3_{y_\alpha})$. В построенном гильбертовом расслоении с любыми двумя точками базы $x_\alpha, x'_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ связан унитарный в $L^2(\mathbb{R}^3_{y_\alpha})$ оператор $\mathcal{U}(x_\alpha, x'_\alpha)$ эволюции репера. Для определения оператора \mathcal{U} воспользуемся ассоциированным с гамильтонианом $H(x_\alpha)$ спектральным разложением пространства $L^2(\mathbb{R}^3_{y_\alpha})$: $L^2(\mathbb{R}^3_{y_\alpha}) = \mathcal{H}_c(x_\alpha) \oplus \mathcal{H}_d(x_\alpha)$, где $\mathcal{H}_{d,c} = \mathcal{P}_{d,c} L^2(\mathbb{R}^3_{y_\alpha})$, $\mathcal{P}_{d,c}$ - спектральные проекторы на дискретное и абсолютно непрерывное подпространства оператора $H(x_\alpha)$. В терминах спектрального разложения оператор \mathcal{U}

$$\varphi(x_\alpha, \cdot) = \mathcal{U} \varphi(x'_\alpha, \cdot) \quad (5)$$

имеет блочную структуру:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{cc} & \mathcal{U}_{cd} \\ \mathcal{U}_{dc} & \mathcal{U}_{dd} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь диагональные блоки описывают эволюцию дискретной и непрерывной частей репера φ , а внедиагональные блоки - переходы между ними.

В ситуации общего положения размерность $d(x_\alpha) = \dim \mathcal{H}_d(x_\alpha)$ дискретного подпространства $\mathcal{H}_d(x_\alpha)$ зависит от точки базы $x_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$. Если $d < \infty$, то $d(x_\alpha)$ - кусочно-постоянная функция на \mathcal{B}_α , а многообразия его разрывов отвечают выходу термов $E_n(x_\alpha)$ в непрерывный спектр.

2. ЭФФЕКТИВНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Для получения эффективного уравнения представим волновые функции $\Psi(X)$ полного гамильтониана H в виде формального разложения по подвижному реперу \mathcal{C} с подлежащими определению коэффициентами χ :

$$\Psi(x_\alpha, y_\alpha) = \int \langle \varphi, \chi \rangle \equiv \sum_n \varphi_n(x_\alpha, y_\alpha) \chi_n(x_\alpha) + \int d^3 q_\alpha \varphi_{q_\alpha}(x_\alpha, y_\alpha) \chi_{q_\alpha}(x_\alpha). \quad (7)$$

Подставляя разложение (7) в уравнение Шредингера

$$H \Psi = E \Psi \quad (8)$$

и проецируя на состояния φ , получим бесконечную систему уравнений относительно функций χ :

$$\langle \varphi | -\Delta_{x_\alpha} - \Delta_{y_\alpha} + \sum_\beta V_\beta(x_\beta) - E | \Psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3_{x_\alpha})} = 0. \quad (9)$$

Для получения из (9) дифференциальных уравнений типа Шредингера следует подсчитать средние по φ значения входящих в (9) операторов. С этой целью, фиксируя произвольную точку $x'_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$, определим семейство операторов $\mathcal{U}(x_\alpha) = \mathcal{U}(x_\alpha, x'_\alpha)$; x'_α - фиксировано. В терминах операторов $\mathcal{U}(x_\alpha)$ матричные элементы операторов Лапласа могут быть представлены в виде

$$\langle \varphi | -\Delta_{x_\alpha} | \varphi \rangle = - \langle e | \mathcal{U}^\dagger \Delta_{x_\alpha} \mathcal{U} | e \rangle, \quad (10)$$

$$\langle \varphi | -\Delta_{y_\alpha} | \varphi \rangle = \langle e | (\partial_k \circ \mathcal{U})^\dagger \partial_k \circ \mathcal{U} | e \rangle. \quad (11)$$

Здесь $e = \varphi(x'_\alpha, \cdot)$ и, кроме того, введены следующие обозначения: под $\partial_k \circ \mathcal{U}$ понимается композиция оператора \mathcal{U} и оператора дифференцирования по k -й компоненте вектора y_α , для нумерации которых мы используем латинские индексы. Символом $\partial_\nu \mathcal{U}$ будем обозначать результат дифференцирования операторнозначной функции $\mathcal{U}(x_\alpha)$ по ν -й компоненте вектора x_α , для которых мы используем греческие индексы.

Преобразуем матричные элементы (10), (11), воспользовавшись условием полноты системы функций φ : $\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^{-1}$. Именно, справедливо следующее соотношение:

$$\mathcal{U}^{-1} \Delta_{x_\alpha} \circ \mathcal{U} = (\partial_\mu + \mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \mathcal{U})^2. \quad (12)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{-1} \Delta_{x_\alpha} \circ \mathcal{U} &= \mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \circ \partial_\mu \circ \mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \circ (\partial_\mu \mathcal{U} + \mathcal{U} \partial_\mu) = \\ &= \mathcal{U}^{-1} (\partial_\mu^2 \mathcal{U} + 2 \partial_\mu \mathcal{U} \partial_\mu + \mathcal{U} \partial_\mu^2). \end{aligned} \quad (13)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (\partial_\mu + \mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \mathcal{U})^2 &= \partial_\mu^2 + \partial_\mu \circ (\mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \mathcal{U}) + \mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \mathcal{U} \partial_\mu + (\mathcal{U}^{-1} \partial_\mu)^2 = \\ &= \partial_\mu^2 + 2 \mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \mathcal{U} \partial_\mu + \mathcal{U}^{-1} \partial_\mu^2 \mathcal{U}, \end{aligned} \quad (14)$$

где использовано правило дифференцирования

$$\partial_\mu \mathcal{U}^{-1} = - \mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \mathcal{U} \mathcal{U}^{-1}. \quad (15)$$

Сравнивая (13) и (14), убеждаемся в справедливости (12).

Проведенные вычисления показывают, что процедура усреднения по подвижному реперу приводит к удлинению производной по базе (см. (12)) в эффективной системе уравнений для функций χ . Соответствующую ковариантную производную обозначим через D_μ :

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \mathcal{U}. \quad (16)$$

Таким образом, эффективная система уравнений для определения вектор-функций χ принимает вид

$$(-D_\mu^2 + a^\dagger a + \mathcal{U}^{-1} V \mathcal{U}) \chi = E \chi, \quad (17)$$

где

$$a^\dagger a = (\partial_k \circ \mathcal{U})^\dagger (\partial_k \circ \mathcal{U}), \quad V = \sum_\beta V_\beta(x_\beta).$$

Оператор $a^\dagger a$ неотрицателен и может, таким образом, быть интерпретирован как оператор массы, параметрически зависящий от точки базы $x_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$.

$$\text{Оператор } A^\mu(x_\alpha) = \mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \mathcal{U}, \quad (18)$$

удлиняющий производную, имеет смысл связности в ассоциированном векторном расслоении и в силу бесконечномерности слоя является оператором, действующим в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

3. ПРОЦЕДУРА СОГЛАСОВАНИЯ СВЯЗНОСТЕЙ

Оператор эволюции репера $\mathcal{U}(x_\alpha)$ определен с точностью до калибровочного преобразования

$$\mathcal{U} \rightarrow e^{i\delta(x_\alpha)} \mathcal{U} \quad (19)$$

ввиду неоднозначности выбора фаз подвижного репера φ . Под действием этого калибровочного преобразования связность A^μ преобразуется следующим образом:

$$A^\mu \rightarrow \mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \mathcal{U} + i \mathcal{U}^{-1} (\partial_\mu \delta) \mathcal{U}. \quad (20)$$

Можно найти также правило преобразования массового оператора $a^+ a$, используя замену

$$a \rightarrow e^{i\delta} a + [\partial_\mu, e^{i\delta}] \mathcal{U}.$$

Если оператор эволюции репера $\mathcal{U}(x_\alpha)$ гладко зависит от точки базы $x_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$, то связность A^μ имеет нулевую неабелеву кривизну $F^{\mu\nu}$:

$$F = dA + [A, A] \equiv 0. \quad (21)$$

Для выделения нетривиальной части связности следует рассмотреть отдельно вклады непрерывного и дискретного спектров гамильтониана $H(x_\alpha)$. Именно

$$\begin{aligned} A^\mu &= \mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \mathcal{U} = [(\mathcal{P}_c + \mathcal{P}_d) \mathcal{U}]^+ \partial_\mu (\mathcal{P}_c + \mathcal{P}_d) \mathcal{U} = \\ &= (\mathcal{P}_c \mathcal{U})^+ \partial_\mu (\mathcal{P}_c \mathcal{U}) + (\mathcal{P}_c \mathcal{U})^+ \partial_\mu (\mathcal{P}_d \mathcal{U}) + \\ &+ (\mathcal{P}_d \mathcal{U})^+ \partial_\mu (\mathcal{P}_c \mathcal{U}) + (\mathcal{P}_d \mathcal{U})^+ \partial_\mu (\mathcal{P}_d \mathcal{U}) \equiv \begin{pmatrix} A_{cc} & A_{cd} \\ A_{dc} & A_{dd} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

Построенная по отвечающей дискретному спектру части связности $A_{dd} = (\mathcal{P}_d \mathcal{U})^+ \nabla (\mathcal{P}_d \mathcal{U})$ кривизна F_d нетривиальна тогда и только тогда, когда сужение $\mathcal{P}_d \mathcal{U}$ на \mathcal{H}_d неунитарно.

Перейдем к эффективной системе уравнений, получаемой проектированием на \mathcal{H}_d . Учитывая блочный вид (6) оператора \mathcal{U} и связности (22), уравнение для медленных компонент χ можно переписать следующим образом (параметр μ имеет смысл приведенной массы):

$$\left\{ - \begin{pmatrix} \nabla + A_{cc} & A_{cd} \\ A_{dc} & \nabla + A_{dd} \end{pmatrix}^2 + \mathcal{M}(a^+ a + V - E) \right\} \begin{pmatrix} \chi_c \\ \chi_d \end{pmatrix} \equiv (-\partial^2 + \Gamma) \begin{pmatrix} \chi_c \\ \chi_d \end{pmatrix} = 0, \quad (23)$$

где $A_{cc} = -A_{cc}^+$, $A_{dd} = -A_{dd}^+$, $A_{cd} = -A_{cd}^+$, $A_{dc} = -A_{dc}^+$ определены записью (22). Далее, используя резольвенту оператора

$$- (\nabla + A_{cc})^2 - A_{cd} A_{dc} + \Gamma_{cc} = \bar{R}^{-1}(E), \quad (24)$$

выразим χ_c через χ_d (неунитарным) преобразованием

$$\begin{aligned} \chi_c &= R(E) (A_{cd} \nabla + A_{cd} A_{dd} + \nabla A_{cd} + A_{cc} A_{cd} - \Gamma_{cd}) \chi_d \equiv \\ &\equiv R(E) (S_{cd} - \Gamma_{cd}) \chi_d. \end{aligned}$$

Таким образом, проектирование на \mathcal{H}_d приводит к эффективному скалярному произведению

$$\langle\langle \chi_d \chi_d' \rangle\rangle = \int \chi_d^+ (1 + (S_{cd}^+ - \Gamma_{cd}^+) R^2(E) (S_{cd} - \Gamma_{cd})) \chi_d' dx_\alpha. \quad (25)$$

Аналогично в случае проектирования на непрерывный спектр возникает индуцированное скалярное произведение

$$\langle\langle \chi_c \chi_c' \rangle\rangle = \int \chi_c^+ (1 + (S_{dc}^+ - \Gamma_{dc}^+) R^2(E) (S_{dc} - \Gamma_{dc})) \chi_c' dx_\alpha. \quad (26)$$

Отметим, что везде, где приходится вычислять скалярное произведение функций непрерывного спектра, неявно предполагая использование волновых пакетов (т.е. переход к обобщенным функциям), мы не будем акцентировать внимание на этом, поскольку такая нестрогость не сказывается на окончательных выводах. Когда размерность $\dim \mathcal{H}_d$ конечна ($=N$), будем интерпретировать (25) как скалярное произведение в пространстве сечений комплексного векторного расслоения размерности $N + \dim \mathcal{B}_\alpha$ с эрмитовой метрикой

$$h = 1 + (S_{cd}^+ - \Gamma_{cd}^+) R^2(E) (S_{cd} - \Gamma_{cd}). \quad (27)$$

Далее можно исключить из (24) и (25) лишние компоненты χ_c и получить уравнение

$$(-(\nabla + A_{dd})^2 + M) \chi_d \equiv H_{eff} \chi_d = 0, \quad (28)$$

где оператор M задается как

$$M = -A_{dc} A_{cd} + \Gamma_{dd} - (S_{cd}^+ - \Gamma_{cd}^+) R(E) (S_{cd} - \Gamma_{cd}). \quad (29)$$

Теперь условие самосопряженности оператора $-\mathcal{D}_{dd}^2 + M$ относительно (25) приводит к условию согласования связности A_{dd} с метрикой h :

$$\nabla h = [A_{dd} - M, h], \quad (30)$$

где A_{dd} и h рассматриваются как операторы, принадлежащие

$$\text{Hom}(\mathcal{H}_d \otimes L_2(\mathbb{R}^B), \mathcal{H}_d \otimes L_2(\mathbb{R}^B)).$$

Из определения (24) вытекает, что условие (30) накладывает дополнительные ограничения на потенциал V , которые требуют специального рассмотрения.

Таким образом, исходная система дифференциальных уравнений Шредингера после спектрального проектирования переходит в интегродифференциальные уравнения, подобно тому как в уравнении Дирака в квазиклассическом пределе появляются нелокальные операторы, действующие на компоненты Вейля. Проводя эту аналогию дальше, легко заметить, что процедура спектрального проектирования приводит к появлению эффективной кривизны базы исходного расслоения. Действительно, применяя преобразование типа Фолди-Воутхойзена к оператору $-\mathcal{D}^2 + \Gamma$, нетрудно убедиться, что кинетический член в эффективном гамильтониане H_{eff} приобретает с точностью до $O(\mu^{-2})$ следующий вид:

$$-(S^{\alpha\beta} - (4\mu^{-1} A_{dc}^{\alpha} R(E) A_{cd}^{\beta})) \partial_{x_{\alpha} x_{\beta}}^2 \equiv g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}.$$

Тем самым величины $g^{\alpha\beta}$ выступают как элементы эффективной контравариантной метрики базы, если только условия на асимптотики A и V таковы, что компактификация допустима. Для того, чтобы сделать это соответствие более конкретным, мы приведем вычисление $g^{\alpha\beta}$ с помощью теории возмущений для частного случая проектирования на одно уравнение при одномерной базе.

Существенным моментом исследования полученного эффективного уравнения (17) является изучение поведения связности $A_d(x_\alpha)$ при $x_\alpha \rightarrow \infty$. В случае существования предельных значений связности A_d на бесконечности возможна компактификация базы \mathcal{B}_α и, таким образом, степень отображения, скажем

$$S^b \rightarrow SU(N), \quad b = \dim \mathcal{B}_\alpha, \quad N = \dim \text{coker } P_{cc},$$

может оказаться нетривиальной. В этом случае было бы интересно связать ненулевые классы Черна C_k :

$$\det(I + \lambda F_d) = \sum_k C_k \lambda^k,$$

с глобальными инвариантами трехчастичной S -матрицы. Мы демонстрируем такую связь на простом примере, рассмотренном в разделе 5.

При изучении асимптотического поведения геометрических объектов, в частности асимптотик подвижного репера, можно опираться на дифференциальную формулировку уравнений Фаддеева.

4. ЭФФЕКТИВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФАДДЕЕВА

Рассмотрим уравнения Фаддеева для скалярных частиц в дифференциальной формулировке (6) ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$):

$$(-\Delta_{x_\alpha} - \Delta_{y_\alpha} + V_\alpha(x_\alpha) - E) \Phi_\alpha = -V_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \Phi_\beta, \quad (31)$$

где компоненты Фаддеева Φ_α трехчастичной волновой функции $\Psi = \sum \Phi_\alpha$, удовлетворяющей уравнению (8), определяются обычным соотношением:

$$\Phi_\alpha = -R_\alpha(E + i0) V_\alpha \Psi, \quad (32)$$

в котором $R_\alpha(z) = (-\Delta - z)^{-1}$ - свободная резольвента.

Для получения эффективной системы уравнений следует каждую из компонент Φ_α представить в виде формального разложения, аналогичного (7), по подвижному реперу Ψ_α , отвечающему расслоению, ассоциированному с парой частиц α :

$$\Phi_\alpha = \int \langle \Psi_\alpha, \chi_\alpha \rangle. \quad (33)$$

Геометрические объекты, связности, ковариантные производные и т.п. определяются теми же соотношениями, что и для соответствующего уравнения Шредингера, с той лишь разницей, что с каждой парой частиц мы теперь ассоциируем свою базу $\mathcal{B}_\alpha = \mathbb{R}_{x_\alpha}^3$, свой подвижный репер Ψ_α и свое гильбертово расслоение. Обозначив через \mathcal{U}_α операторы эволюции реперов Ψ_α , $\alpha = 1, 2, 3$, и определив операторы

$$A_{\alpha}^{\mu}(x_{\alpha}) = U_{\alpha}^{-1} \partial_{\mu} U_{\alpha},$$

$$D_{\alpha}^{\mu} = \partial_{\mu} + A_{\alpha}^{\mu}(x_{\alpha}),$$

$$a_{\alpha}^{+} a_{\alpha} = (\partial_{\kappa} \circ U_{\alpha})^{+} (\partial_{\kappa} \circ U_{\alpha}),$$

(34)

$$W_{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{R}_x^3} \Phi_{\alpha}^{+}(x_{\alpha}, y_{\alpha}) \Phi_{\beta}(x_{\beta}, y_{\beta}) \cdot dy_{\alpha},$$

где Φ_{α} - вектор, эрмитово сопряженный с Φ_{α}^{+} , получим эффективную систему уравнений Фаддеева для определения коэффициентов X_{α} :

$$(-(\partial_{\alpha}^{\mu})^2 + a_{\alpha}^{+} a_{\alpha} + V_{\alpha}(x_{\alpha}) - E) X_{\alpha} =$$

$$= -V_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} W_{\alpha\beta} X_{\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

(35)

С помощью уравнения (35) и известных асимптотик [6] компонент Фаддеева Φ_{α} , заданных в конфигурационном пространстве, можно изучить предельные значения на бесконечности частей связностей, отвечающих различным ветвям спектра полного гамильтониана, и решить, в частности, вопрос о компактификации базы.

5. ПРИМЕРЫ

А. Проиллюстрируем на простом примере с одномерной базой взаимосвязь спектральных характеристик оператора, действующего в слое, с топологическими инвариантами ассоциированного гильбертова расслоения. Мы покажем, что в рассматриваемом примере нетривиальность связности, ассоциированной с таким расслоением, обусловлена гомотопическим классом непрерывного отображения базы в группу $U(1)$, изоморфную унитарной группе S -матриц при фиксированной энергии, $\pi_1[U(1)] = \mathbb{Z}$.

Рассмотрим в пространстве $L^2(\mathbb{R}_x)$ самосопряженный оператор $h_{\omega} = -d_x^2$ с граничным условием

$$u'/u|_{x=0} = \gamma(\omega), \quad \text{Im } \gamma = 0, \quad \omega \in S'. \quad (36)$$

Требования к функции $\gamma(\omega)$, параметризующей оператор h_{ω} , будут сформулированы ниже.

Собственные функции $\Psi(x, k)$ непрерывного спектра оператора h_{ω} имеют вид

$$\Psi(x, k) = e^{-ikx} + S_{\gamma}(k) e^{ikx}, \quad (37)$$

где

$$S_{\gamma}(k) = \frac{ik + \gamma(\omega)}{ik - \gamma(\omega)} \quad (38)$$

является S -матрицей рассматриваемой задачи.

При $\gamma(\omega) < 0$ оператор h_{ω} имеет дискретный спектр, состоящий из единственного собственного числа $\gamma(\omega)$. Отвечающая этому собственному числу нормированная собственная функция Ψ_{γ} дается формулой

$$\Psi_{\gamma}(x) = \sqrt{2|\gamma|} e^{\gamma(\omega)x}. \quad (39)$$

Потребуем теперь, чтобы функция $\gamma(\omega)$ удовлетворяла следующим условиям:

- 1) на множестве S' функция $\gamma(\omega)$ непрерывно дифференцируема всюду, за исключением конечного числа точек $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, в которых $\gamma(\omega)$ имеет разрывы II рода: $\gamma(\omega) = \frac{1}{\omega - \omega_s} + O(1)$;
- 2) отображение $\omega \mapsto S_{\gamma}(k)$ при каждом фиксированном k , дополненное условием $S_{\gamma}(\omega_s) = -I$, дифференцируемо.

Собственные функции $\Psi_{\gamma}(x)$ и $\Psi(x, k)$ дискретного и непрерывного спектров оператора h_{ω} образуют репер Ψ в соответствующем гильбертовом расслоении, а оператор связности $A = \langle \partial_{\omega} \Psi, \Psi \rangle$ имеет, таким образом, блочный вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_{cc} & A_{cd} \\ A_{dc} & A_{dd} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Вычислим асимптотику ядра $A(k, k')$ оператора A_{cc} , отвечающего переходам из непрерывного спектра в непрерывный:

$$A(k, k') = \langle \partial_{\omega} \Psi(k), \Psi(k') \rangle_{L^2(\mathbb{R}_x)} =$$

$$= \int_0^{\infty} dx \partial_{\omega} S_{\gamma}(k) e^{ikx} (e^{ik'x} + \overline{S_{\gamma}(k')}) e^{-ik'x} = (41)$$

$$= i \left(\partial_{\omega} S_{\gamma}(k) \frac{1}{k+k'+i0} + \partial_{\omega} S_{\gamma}(k) \overline{S_{\gamma}'(k')} \frac{1}{k-k'+i0} \right).$$

В отсутствие дискретного спектра ($\gamma(\omega) > 0$) у оператора h_ω ядро $A(k, k')$ полностью определяет оператор связности A в (40), поскольку блоки, отличные от A_{cc} , — нулевые.

При $\gamma(\omega) < 0$ оператор A_{cd} , отвечающий переходам из дискретного спектра в непрерывный, задается ядром

$$a(k) = \langle \partial_\omega \Psi(k), \Psi_\gamma \rangle = \sqrt{2|\gamma|} \int_0^\infty \partial_\omega S_\gamma(k) e^{ikx} e^{\gamma(\omega)x} = \sqrt{2|\gamma|} \partial_\omega S_\gamma(k) \frac{i}{k-i\gamma(\omega)}. \quad (42)$$

Оператор, отвечающий обратным переходам, задается ядром

$$\langle \partial_\omega \Psi_\gamma, \Psi(k') \rangle = -\overline{a(k')}. \quad (43)$$

Наконец, оператор A_{dd} , отвечающий переходам из дискретного спектра в дискретный, является в рассматриваемом случае оператором умножения на число:

$$A_{dd} = \langle \partial_\omega \Psi_\gamma, \Psi_\gamma \rangle = \int_0^\infty \partial_\omega (\sqrt{2|\gamma|} e^{\gamma(\omega)x}) \sqrt{2|\gamma|} e^{\gamma(\omega)x} dx = 0. \quad (44)$$

Вместе с требованиями 1) и 2) отображение $\omega \mapsto \gamma(\omega)$, в соответствии с (38), задает накрытие единичной окружности $\omega \mapsto S_\gamma(\omega) \in S^1$ при фиксированной энергии. Свяжем степень $n(k)$ этого отображения с интегралом по базе S^1 от оператора связности A . Покажем, в частности, что интеграл по базе от матричного элемента A_{cc} оператора A нетривиален при $n \neq 0$ ($n(k) = -n \cdot \text{sgn } k$).

В самом деле, пользуясь (41), находим, что

$$\int_{S^1} A_{cc} d\omega = -2\pi \int_{S^1} \partial_\omega \ln S_\gamma(k) d\omega \zeta(k-k') + i \int_{S^1} \partial_\omega S_\gamma(k) \left[\frac{1}{k+k'+i0} + \frac{\overline{S_\gamma(k')}}{k-k'-i0} \right] d\omega. \quad (45)$$

Осталось убедиться в том, что каждый из интегралов в (45) нетривиален и нетривиальна их сумма. Для этого достаточно вычислить следующие интегралы:

$$\int_{S^1} \partial_\omega S_\gamma d\omega = \int_0^{2\pi} d\omega \frac{-2ik}{ik+\gamma} \gamma'(\omega) = n(k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2ik d\gamma}{(ik+\gamma)^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} & \int_{S^1} \partial_\omega S_\gamma(k) \overline{S_\gamma(k')} \frac{1}{k-k'-i0} = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2ik}{(ik+\gamma)^2} \frac{(-ik'-\gamma)}{(ik+\gamma)} d\gamma \frac{1}{k-k'-i0} = \\ & = 2\pi i \left(\frac{n(k)+n(k')}{2} \right) \frac{4kk'}{k+k'} \frac{1}{k-k'-i0} = \\ & = 2\pi i \left(\frac{n(k)+n(k')}{2} \right) B(k, k'). \end{aligned} \quad (46)$$

Из (46) видим, что в ситуации общего положения ядро $B(k, k')$ нетривиально и не совпадает с ядром единичного оператора.

С другой стороны,

$$\int_{S^1} \partial_\omega \ln S_\gamma(k) d\omega \zeta(k-k') = 2\pi i n(k) \zeta(k-k'). \quad (47)$$

Таким образом,

$$\int_{S^1} A_{cc} d\omega = 2\pi i \left[-2\pi n(k) \zeta(k-k') + i \left(\frac{n(k)+n(k')}{2} \right) B(k, k') \right]. \quad (48)$$

Приведенный пример, в частности, показывает, что специальная динамика спектральных характеристик оператора h_ω порождает нетривиальную связность A . Именно с условиями 1) и 2) при изменении ω по единичной окружности S^1 значения $\gamma(\omega)$ пробегают вещественную ось \mathbb{R} ; при этом увеличению $\gamma(\omega)$ от $-\infty$ до 0 соответствует эволюция связанного состояния оператора h_ω , а переход $\gamma(\omega)$ от 0 до $+\infty$ превращает это связанное состояние в резонанс. Разрыв функции $\gamma(\omega)$ в точке ω_s также соответствует превращению связанного состояния в резонанс. Число таких превращений, совпадающее с числом точек разрыва ω_s , определяет степень $n(k)$ накрытия отображения единичной окружности S^1 в группу $U(1)$, т.е. $\pi_1[U(1)] = \mathbb{Z}$.

Б. К настоящему моменту накоплен большой опыт работы с фиксированным адиабатическим разложением $\sqrt{10}$ при расчете низкоэнергетических процессов рассеяния мезоатомов на ядрах водорода, например:

$$(p\mu)_{n=1} + p \rightarrow (p\mu)_{n=1} + p.$$

В этих расчетах использовались базисные функции $\Psi(x_1, y_1)$ задачи двух центров (3) как дискретного $E = E_n'(1, x_1) < 0$, так и непрерывного спектров

$E \equiv q^2 > 0$. Наличие параметра малости - отношение массы мюона к приведенной массе ядер $(2\mu)^{-1} \approx m_\mu / M \approx 0,1$ позволяет привести систему уравнений (17) с точностью $O((2\mu)^{-2})$ к диагональному или блочнодиагональному виду.

Для простоты ограничимся случаем проецирования системы (17) с помощью канонического преобразования

$$\chi_{\text{eff}} = e^{iW} \chi, \quad H_{\text{eff}} = e^{iW} H e^{-iW},$$

$$iW_{nn'} = (2\mu)^{-1} (E_n - E_{n'}) (-A_{nn'}^2 - A_{nn'}' - 2A_{nn'} d_R - (E_n - E_{n'})^{-1} 2A_{nn'} E_n') \quad (49)$$

в одно уравнение ($n=1$):

$$\{ d_R m(R) d_R + 2\mu (E - \mathcal{V}_{\text{eff}}) \} \chi = 0. \quad (50)$$

Эффективный потенциал \mathcal{V}_{eff} определен с точностью $O(2\mu)^{-2}$ в работе /II/. Оператор в фигурных скобках является самосопряженным относительно вещественного скалярного произведения

$$\langle \chi_{\text{eff}} | \xi_{\text{eff}} \rangle = \int dR \chi_{\text{eff}} \xi_{\text{eff}}. \quad (51)$$

Каноническое преобразование (49) приводит к появлению коэффициента $m^{-1}(R)$ перед второй производной, который может быть истолкован как локальная метрика. Величина $\mu m(R)$ имеет смысл массы, зависящей от расстояния $R = (2\mu)^{-1/2}$ между ядрами, и выражается через коэффициенты связности

$$m^{-1}(R) = 1 - (2\mu)^{-1} 4 \int A_{nn'} A_{n'n} (E_n - E_{n'})^{-1} + O((2\mu)^{-2}) \quad (52)$$

где $A(R)$ соответствуют связности (18).

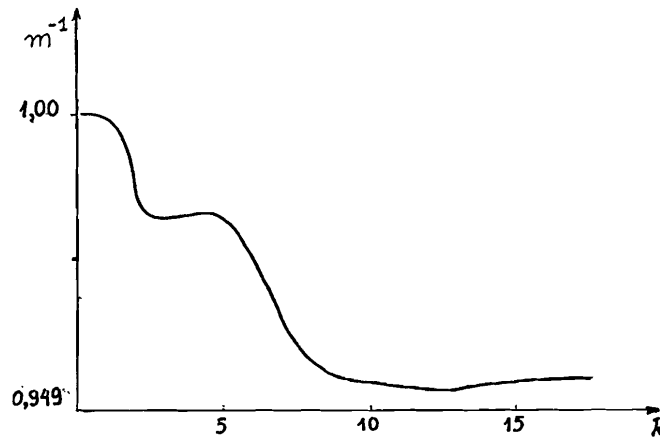
В пределе больших R имеем /I2/

$$4 \int A_{nn'} A_{n'n} (E_n - E_{n'})^{-1} = 1/2 + O(R^{-3})$$

и соответственно $\mu m(\infty)$ превращается в приведенную якобиевскую массу ядра и удаленного мезоатома:

$$\mu m(\infty) = (M_p + m_\mu) M_p / (2M_p + m_\mu).$$

Для конкретной $(pp\mu)^+$ -системы мезомолекулярного иона зависимость эффективной массы $m^{-1}(R)$ от радиуса показана на рисунке.



Зависимости обратной эффективной массы $m^{-1}(R)$ от радиуса $(pp\mu)^+$; $m^{-1}(\infty) = 1 - 1/(4\mu) = 0,9494$.

С другой стороны, стандартная подстановка

$$\chi_{\text{eff}} = \exp \{ 1/2 \ln m(R) \} \psi_{\text{eff}}(R)$$

в уравнение (50) и умножение на $m(R)$ приводят к уравнению без первой производной:

$$\{ d_R^2 + 2\mu m(R) (E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(R)) - 1/2 [m(R) (m^{-1}(R))']' - 1/4 [m(R) (m^{-1}(R))]^2 \} \psi_{\text{eff}}(R) = 0. \quad (53)$$

При этом вещественное скалярное произведение волновых функций (51) принимает вид

$$\langle \psi_{\text{eff}} | \psi_{\text{eff}} \rangle = \int dR \psi_{\text{eff}}(R) m(R) \psi_{\text{eff}}(R). \quad (54)$$

Таким образом, отклонение от стандартного $O(2\mu)^{-1}$ адиабатического приближения в (53) приводит к появлению локальной метрики $m(R)$ в (54), которая соответствует согласно (52) возмущению исходной единичной метрики для системы уравнений (17).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим существенные, по нашему мнению, компоненты предлагаемой конструкции. Одной из них является метод спектрального проектирования, порождающий нетривиальные неабелевы связности.

В рамках того же метода удается проследить связь между спектральными характеристиками S -матрицы и топологическими инвариантами многообразия. В рассматриваемом подходе естественно возникает согласование индуцированной эрмитовой метрики с линейной связностью, наличие которой в конечном счете приводит к определенным классам потенциалов взаимодействия, для которых предложенная конструкция верна.

Мы выражаем благодарность А.А.Сузько за ряд полезных собеседований.

Литература

1. Born M., Nachr.Akad.Wiss.Göttingen, 1951, Bd I, N 6, s.I;
Борн М., Хуанг Кунь. Динамическая теория кристаллических решеток. М., ИЛ, 1958.
2. Dubovik V.M., Markovski B.L., Vinitsky S.I. Preprint JINR, E4-87-743, Dubna, 1987.
3. E.Kiritsis. Commun. Math.Phys., v.III, 1987, p.417.
4. Berry M.V. J.Phys.A, v.18, 1985; Hanny J.H. ibid., p.15.
5. Milnor J.W., Stasheff J.D. Characteristic Classes Princ. 1974.
6. Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М., Наука, 1985.
7. Guchardet A. Ann.Inst.Henri Poincare, v.40, N 3, 1984, p.392.
8. Iwai T. J.Math.Phys., v.28, 1987, p.964.
9. Wells R.O. Differential Analysis on Complex Manifolds, Prentice Hall, N.J., 1973.
10. Виницкий С.И., Пономарев Л.И. ЭЧАЯ, т.13, вып.6, 1982, с.1336.
11. Bunker P.R., Moss R.E. Molec.Phys., v.33, 1977, p.417.
12. Ponomarev L.I., Vinitsky S.I., Vukajlovic F.R. J.Phys. B, v.13, 1980, p.847.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1987 года.

Виницкий С.И. и др.

P4-87-929

Локальное адиабатическое представление задачи рассеяния в квантовой системе нескольких частиц

Адиабатическое приближение в задаче нескольких тел рассматривается в рамках уравнений Шредингера и Фаддеева как локальная реализация глобального адиабатического представления. Геометрическая постановка проблемы сформулирована на языке гильбертовых расслоений. Основные геометрические объекты: связности, кривизна, эрмитова метрика – возникают динамическим образом. Их нетривиальность определяется спектральными проектированиями, применяемыми при сведении к многоканальной эффективной системе. Некоторые простые нетривиальные иллюстративные примеры подтверждают справедливость подхода.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Vinitsky S.I et al.

P4-87-929

A Local Adiabatic Representation in the Few-Body Quantum Scattering Problem

The adiabatic approximation in the few-body problem is considered as a local realisation of the global adiabatic representation for the Schrödinger and Faddeev equations. The problem is formulated in terms of the Hilbert bundles. Basic geometric objects, connections, curvature, hermitian metric, appear in our context as the dynamical ones. Their nontrivial nature depends on the spectral projections applied when reducing to a multichannel effective system. Some simple nontrivial illustrations confirm the validity of the proposed scheme.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987