

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P4-87-106

Г.Н.Афанасьев

ВЕКТОРНЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ
ТОРОИДАЛЬНОГО СОЛЕНОИДА

Направлено в "Journal of Physics A"

1987

1. Введение

Электростатический потенциал тора, заряд которого равномерно распределен по поверхности, хорошо известен (см., например [1]). Интерес к вычислению векторного магнитного потенциала тороидального соленоида связан с возникшей в последнее время дискуссией по существованию эффекта Ааронова - Бома. При рассеянии заряженных частиц тороидальный соленоид имеет определенные преимущества по сравнению с цилиндрическим соленоидом конечной длины: нет осложнений с обратным потоком [2], с утечками магнитного поля, обусловленными конечной длиной тороидального соленоида.

Мы будем придерживаться следующего плана изложения. В ч. 2-4 получим тремя различными способами вектор-потенциал в кулоновской калибровке и изучим его свойства. В ч. 5 вектор-потенциал найден в некулоновской калибровке. Он отличен от нуля в непосредственной близости от соленоида. Получено градиентное преобразование, связывающее найденные вектор-потенциалы; доказана сингулярность этого преобразования для бесконечно тонкого соленоида.

Эти вектор-потенциалы могут быть полезны при вычислении амплитуды рассеяния заряженных частиц на тороидальном соленоиде.

2. Интегрирование уравнений Пуассона в тороидальных координатах

Для тороидального соленоида $(\rho - a)^2 + z^2 = R^2$ напряженность магнитного поля равна нулю вне соленоида и $H_\rho = H_z = 0$, $H_\varphi = g/\rho$ - внутри. Постоянная g зависит от полного числа витков N и силы тока I : $g = 2\pi NI/c$; c - скорость света.

Цилиндрические координаты ρ , z , φ выражаются через тороидальные (μ, θ, φ) следующим образом:

$$\rho = a \frac{\sinh \mu}{\cosh \mu - \cos \theta}, \quad z = a \frac{\sin \theta}{\cosh \mu - \cos \theta}, \quad \varphi = \varphi \quad (2.1)$$

$$(0 < \mu < \infty, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi).$$

Поверхность отдельного тора получается при $\mu = \text{const}$. Для точек на оси z $\mu = 0$. В плоскости $z = 0$: $\theta = 0$ при $\rho > a$ и $\theta = \pm \pi$ при $\rho < a$ и $z = \pm \epsilon$ ($0 < \epsilon < 1$). Пусть $\mu = \mu_0$ отвечает тору T_0 , совпадающему с соленоидом. Тогда при $\mu > \mu_0$

точка ρ , z , φ , определенная (2.1), находится внутри соленоида, а при $\mu < \mu_0$ - вне его. Для полноты приведем соотношения, связывающие тороидальные координаты μ , θ со сферическими r , θ_s :

$$ctg \mu = \frac{r^2 + a^2}{2ra \sin \theta_s}, \quad ctg \theta = \frac{r^2 - a^2}{2ra \cos \theta_s}$$

$$r = a \cdot \left(\frac{ch \mu + \cos \theta}{ch \mu - \cos \theta} \right)^{1/2}, \quad tg \theta_s = \frac{sh \mu}{\sin \theta}.$$

При $r \rightarrow \infty$ имеем

$$\mu \approx \frac{2a}{r} \sin \theta_s, \quad \theta \approx \frac{2a}{r} \cos \theta_s.$$

В кулоновой калибровке декартовы компоненты вектор-потенциала удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \vec{A} = \frac{g}{a^2} \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{sh \mu_0} (ch \mu_0 - \cos \theta)^2 \cdot \vec{n}_\theta. \quad (2.2)$$

Здесь \vec{n}_θ - единичный вектор в θ направлении (т.е. направление тока в отдельном витке):

$$\vec{n}_\theta = -[(\vec{n}_x \cos \varphi + \vec{n}_y \sin \varphi) \sin \theta \cdot sh \mu_0 + \vec{n}_z \cdot (1 - ch \mu_0 \cos \theta)] \cdot (ch \mu_0 - \cos \theta)^{-1}.$$

Из-за аксиальной симметрии A_z не зависит от φ , тогда как A_x и A_y зависят тривиальным образом: $A_x = A_\rho \cdot \cos \varphi$, $A_y = A_\rho \cdot \sin \varphi$. По той же причине $A_\varphi = A_y \cos \varphi - A_x \sin \varphi = 0$. Непосредственные, хотя и довольно сложные выкладки приводят к следующим выражениям для A_z , A_ρ :

$$A_z = \sqrt{ch \mu - \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} R_n^0(\mu) \cdot \cos n \theta, \quad A_\rho = \sqrt{ch \mu - \cos \theta} \sum_{n=1}^{\infty} R_n^1(\mu) \cdot \sin n \theta \quad (2.3)$$

$$R_n^0 = A_n^0 \cdot \begin{cases} P_{n-\frac{1}{2}}(ch \mu) \cdot Q_{n-\frac{1}{2}}(ch \mu_0) & (\mu < \mu_0) \\ Q_{n-\frac{1}{2}}(ch \mu) \cdot P_{n-\frac{1}{2}}(ch \mu_0) & (\mu > \mu_0) \end{cases}$$

$$R_n^1 = -\tilde{g} \cdot Q_{n-\frac{1}{2}}(ch \mu) \cdot \begin{cases} P_{n-\frac{1}{2}}^1(ch \mu) \cdot [Q_{n+\frac{1}{2}}(ch \mu_0) - Q_{n-\frac{3}{2}}(ch \mu_0)] & (\mu < \mu_0) \\ Q_{n-\frac{1}{2}}^1(ch \mu) \cdot [P_{n+\frac{1}{2}}(ch \mu_0) - P_{n-\frac{3}{2}}(ch \mu_0)] & (\mu > \mu_0) \end{cases}$$

$$A_n^0 = \frac{\tilde{g}}{1 + \delta_{n0}} \cdot [(n + \frac{1}{2}) Q_{n+\frac{1}{2}}(ch \mu_0) - (n - \frac{1}{2}) Q_{n-\frac{3}{2}}(ch \mu_0)], \quad \tilde{g} = \frac{2\sqrt{2}g}{\sqrt{1}}$$

$P_n^1(x)$, $Q_n^1(x)$ - функции Лежандра I-го и 2-го рода соответственно. В дальнейшем мы опускаем аргумент функций Лежандра, если он равен $ch \mu$.

Легко проверить, что $div \vec{A} = 0$. Следующие свойства A_ρ и A_z следуют из (2.1). A_z и A_ρ - четная и нечетная функции z соответственно. На больших расстояниях A_z и A_ρ убывают как z^{-3} :

$$A_z \approx \frac{\pi g a^3}{8} \frac{ch \mu_0}{sh^3 \mu_0} \cdot \frac{1 + 3 \cos 2\theta_s}{z^3}, \quad A_\rho \approx \frac{3\pi g a^3 ch \mu_0}{8 sh^3 \mu_0} \frac{\sin 2\theta_s}{z^3}$$

$$(R = a |sh \mu_0, \quad d = a \cdot e^{ch \mu_0}).$$

В некоторых направлениях A_z и A_ρ убывают быстрее, чем z^{-3} . Например, $A_\rho = 0$ на оси z и в плоскости $z = 0$. Рассмотрим теперь поведение A_z в плоскости $z = 0$. В начале координат:

$$A_z(\rho=0, z=0) = \frac{g}{\sqrt{ch \mu_0}} \cdot Q_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1 + ch^2 \mu_0}{2ch \mu_0}\right).$$

При $\rho = a$

$$A_z(\rho=a, z=0) = g \cdot P_{-\frac{1}{2}}(ch \mu_0) \cdot Q_{\frac{1}{2}}(ch \mu_0).$$

При больших значениях ρ

$$A_z \approx -\frac{\pi g a^3}{4\rho^3} \frac{ch \mu_0}{sh^3 \mu_0} < 0.$$

На оси z

$$A_z(\rho=0, z) = \frac{\sqrt{R} g d}{(d^2 + z^2)^{3/4}} \cdot Q_{\frac{1}{2}}\left(\frac{d^2 + z^2 + R^2}{2R\sqrt{d^2 + z^2}}\right), \quad (2.4)$$

что равно $\frac{\pi g d R^2}{4|z|^3}$ при $|z| \gg d$.

Эти выражения упрощаются для тонкого ($R/d \ll 1$) соленоида. Вектор-потенциал равен

$$A_\rho = \sqrt{2} \pi g \cdot \exp(-2\mu_0) \cdot \sin \theta \cdot \sqrt{ch \mu - \cos \theta} \cdot P_{\frac{1}{2}}^1,$$

$$A_z = \frac{\pi g}{\sqrt{2}} \exp(-2\mu_0) \cdot \sqrt{ch \mu - \cos \theta} \cdot (P_{\frac{1}{2}} - \cos \theta \cdot P_{\frac{1}{2}}) \quad (2.5)$$

вне соленоида T_0 и

$$A_\rho = g \cdot \exp(-\mu) \cdot \sin \theta, \quad A_z = -g \cdot \exp(-\mu) \cdot \cos \theta$$

- внутри его. В плоскости $z = 0$ A_z растет от $\frac{\pi g R^2}{2d^2}$ в начале координат до $\frac{gR}{2d}$ на внутренней ($\rho = d - R$) границе T_0 .

Внутри соленоида A_z меняет знак примерно при $\rho = d$ и становится равным $-\frac{gR}{2a}$ на внешней границе ($\rho = d+R$) соленоида. При больших значениях ρ A_z , оставаясь отрицательной, стремится к нулю: $A_z \sim -\frac{g}{4} \frac{dR^2}{z^3}$. Рассмотрим теперь $A_z(\rho, z)$ как функцию z при фиксированном ρ . На оси z

$$A_z(0, z) = \frac{\pi g}{2} \frac{R^2 d}{(z^2 + d^2)^{3/2}}$$

При фиксированном $\rho < d$ $A_z > 0$ для всех z . При $\rho > d$ $A_z < 0$ при малых z и $A_z > 0$ при больших z . Нули A_z в плоскости (ρ, z) лежат на кривой, которая начинается в точке $(d, 0)$ и имеет асимптотами прямые $z = \pm \rho/\sqrt{2}$.

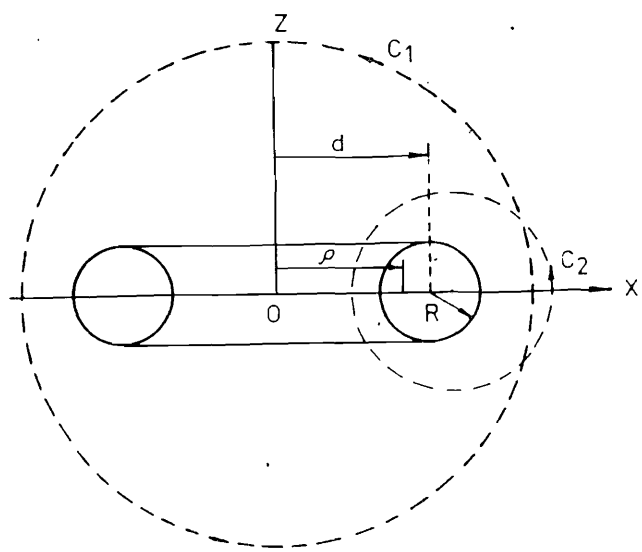


Рис. I.

Сечение соленоида плоскостью $\varphi = \text{const}$. Прерывистыми линиями показаны типичные топологически неэквивалентные контуры C_1 и C_2 .

Рассмотрим теперь интегралы вдоль замкнутых путей. Пусть контур C_2 проходит через отверстие соленоида (рис. I). В качестве C_2 можно выбрать окружность, соответствующую $\lambda = \text{const}$ ($< \mu_0$), $\varphi = \text{const}$. Тогда

$$\oint_{C_2} A_z d\ell = a \int A_\theta \cdot (\text{ch} \mu - \cos \theta)^{-1} d\theta.$$

Здесь A_θ - компонента \vec{A} вдоль C_2

$$A_\theta = - [\text{sh} \mu \sin \theta \cdot A_\rho + (1 - \text{ch} \mu \cos \theta) \cdot A_z] \cdot (\text{ch} \mu - \cos \theta)^{-1}$$

Интегрирование дает

$$\frac{8ga}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(\text{ch} \mu_0) \cdot Q_{n+\frac{1}{2}}(\text{ch} \mu_0). \quad (2.6)$$

Это выражение следует приравнять потоку магнитного поля через поперечное сечение соленоида:

$$\Phi = \iint H_y dS = g \iint \frac{d\rho dz}{\rho} = 2\pi g (d - \sqrt{d^2 - R^2}) = 2\pi g a (\text{cth} \mu_0 - 1). \quad (2.7)$$

Совпадение (2.6) и (2.7) может быть доказано без апелляции к физическим аспектам /4/.

Рассмотрим теперь окружность C_1 с радиусом $R_1 > d+R$ (рис. I). Вдоль этого контура $\oint A_z d\ell = R_1 \int A_{\theta_s} d\theta_s = R_1 \int (A_\rho \cos \theta_s - A_z \sin \theta_s) d\theta_s$. Поскольку подынтегральное выражение - нечетная функция θ_s (следует учесть, что A_z и A_ρ являются соответственно четной и нечетной функциями θ и что $\sin \theta = \text{cth} \theta_s \cdot [(\frac{z^2 + a^2}{2\tau a \sin \theta_s})^2 - 1]^{-1/2}$), то этот интеграл равен нулю.

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_z(\rho=0, z) dz \quad (2.8)$$

также должен быть равен Φ . Это следует из того, что контур интегрирования вдоль оси z может быть замкнут окружностью C_0 достаточно большого радиуса R_0 . Интеграл вдоль C_0 : $R_0 \int A_{\theta_s} d\theta_s$ стремится к нулю как R_0^{-2} при $R_0 \rightarrow \infty$ (в самом деле: $A_{\theta_s} \sim \frac{g d R^2}{4 R_0^3} \sin \theta_s$). Выражение (2.8) можно вычислить либо с помощью интегрирования по θ (на оси z $dz = -\frac{d\theta}{1 - \cos \theta}$), либо подставляя (2.4) в (2.8). В последнем случае имеем:

$$\sqrt{R} d \int_0^{\infty} \frac{dz}{(d^2 + z^2)^{3/4}} Q_{\frac{1}{2}} \left(\frac{d^2 + z^2 + R^2}{2R\sqrt{d^2 + z^2}} \right) = \pi (d - \sqrt{d^2 - R^2})$$

или, переходя к безразмерным переменным /4/:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/4}} Q_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+z^2+x^2}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (1 - \sqrt{1-z^2}) \quad (0 < z < 1)$$

3. Вектор-потенциал как результат суперпозиции потенциалов отдельных витков

На поверхности соленоида Γ_0 удобно ввести координаты φ , Ψ : $x_1 = (d + R \cos \Psi) \cos \varphi$, $y_1 = (d + R \cos \Psi) \sin \varphi$, $z = R \sin \Psi$.
Единичный вектор, касательный к поверхности соленоида и направленный вдоль отдельного витка, равен

$$\vec{n}_\Psi = \vec{n}_z \cdot \cos \Psi - (\vec{n}_x \cos \varphi + \vec{n}_y \sin \varphi) \sin \Psi.$$

Тогда вектор-потенциал соленоида в точке с координатами x , y , z равен

$$\vec{A}(x, y, z) = -\frac{Rg}{4\pi} \iint d\Psi d\varphi \cdot \vec{n}_w \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}. \quad (3.1)$$

После интегрирования по Ψ :

$$A_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot (d - \rho \cos \varphi) \cdot F(\rho, z, \varphi), \quad A_\rho = z \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi F(\rho, z, \varphi)$$

$$F(\rho, z, \varphi) = \frac{\sqrt{Rg}}{2\pi} \frac{1}{[(\rho \cos \varphi - d)^2 + z^2]^{3/4}} \cdot Q_{1/2} \left\{ \frac{\rho^2 - 2d\rho \cos \varphi + d^2 + z^2 + R^2}{2R \sqrt{(\rho \cos \varphi - d)^2 + z^2}} \right\}. \quad (3.2)$$

Очевидно, (3.2) представляет собой суперпозицию вектор-потенциалов отдельных витков, равномерно и непрерывно распределенных по поверхности соленоида.

Для тонкого соленоида ($R/d \ll 1$) в (3.1) можно выполнить разложение по параметру $R \cdot [(x - d \cos \varphi)^2 + (y - d \sin \varphi)^2 + z^2]^{-1/2}$. Это разложение справедливо вне соленоида:

$$A_x = \frac{R^2 z g}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad A_y = \frac{R^2 z g}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

$$A_z = -\frac{R^2 g}{4} \int_0^{2\pi} \frac{(x - x') \cos \varphi + (y - y') \sin \varphi}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\varphi. \quad (3.3)$$

Здесь x' , y' пробегает вдоль нити (в которую соленоид вырождается при $R \rightarrow 0$) радиуса d , лежащую в плоскости $z = 0$:
 $x' = d \cdot \cos \varphi$, $y' = d \cdot \sin \varphi$. Выражения (3.3) могут быть проинтегрированы до конца:

$$A_\rho = \frac{R^2 z g}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(r^2 + d^2 - 2d\rho \cos \varphi)^{3/2}} = -\frac{R^2 z g}{2(d\rho)^{3/2}} Q_{1/2}^1(\text{ch } \mu_1),$$

$$A_z = \frac{R^2 g}{4} \int_0^{2\pi} \frac{d - \rho \cos \varphi}{(r^2 + d^2 - 2d\rho \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi = \frac{R^2 g}{2(d\rho)^{3/2}} [\rho Q_{1/2}^1(\text{ch } \mu_1) - d Q_{1/2}^1(\text{ch } \mu_1)] \quad (3.4)$$

$$r^2 = \rho^2 + z^2, \quad \text{ch } \mu_1 = \frac{r^2 + d^2}{2d\rho}.$$

Хотя эти выражения по форме значительно отличаются от найденных в предыдущем разделе, они фактически совпадают, если принять во внимание соотношение Уиппла между функциями Лежандра $Q_{1/2}^1$.

Вычислим $\int A_z d\tau$ вдоль линии, параллельной оси z . Используя (3.4), получаем

$$\int_{-z_0}^{z_0} A_z d\tau = \frac{R^2 g}{4} \int_0^{2\pi} (d - \rho \cos \varphi) d\varphi \int_{-z_0}^{z_0} d\tau \cdot (b^2 + z^2)^{-3/2} = \frac{R^2 g}{2} \int \frac{d - \rho \cos \varphi}{b^2} \cdot (1 + \frac{z^2}{z_0^2})^{-1/2} dz.$$

Здесь $b^2 = d^2 + \rho^2 - 2d\rho \cos \varphi$. При $z_0 \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_z d\tau = \frac{R^2 g}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d - \rho \cos \varphi}{b^2} d\varphi = \frac{\pi g R^2}{2d} \left(1 - \frac{\rho - d}{|\rho - d|}\right).$$

Как и следовало ожидать, $\int_{-\infty}^{\infty} A_z d\tau$ равен $R^2 \pi g / d$, т.е. потоку магнитного поля, если путь интегрирования проходит через отверстие соленоида к нулю в противном случае.

4. Получение вектор-потенциалов из напряженностей магнитного поля

Эквивалентный способ получения вектор-потенциала состоит в решении уравнений

$$H_\rho = H_z = 0, \quad H_\varphi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{g}{\rho} \mathcal{D} [R - \sqrt{(\rho - d)^2 + z^2}]$$

вместе с калибровочным условием

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0.$$

Последнее условие автоматически выполнено, если

$$A_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad A_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho}.$$

Функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$\Psi_{\rho\rho} - \frac{1}{\rho} \Psi_\rho + \Psi_{zz} = g \mathcal{D} [R - \sqrt{(\rho - d)^2 + z^2}].$$

Переходя к тороидальным координатам и полагая $\Psi = \tilde{\Psi} / (\text{ch } \mu - \cos \theta)$, приходим к следующему уравнению для $\tilde{\Psi}$:

$$\tilde{\Psi}_{\mu\mu} - \text{ctg } \mu \tilde{\Psi}'_\mu + \tilde{\Psi}_{\theta\theta} + \frac{1}{4} \tilde{\Psi} = g \cdot (\text{ch } \mu - \cos \theta)^{-3/2} \cdot \mathcal{D}(\mu - \mu_0).$$

Разлагая $\tilde{\psi}$ в ряд ($\tilde{\psi} = \sum \psi_n(\mu) \cdot \cos n\theta$), получаем уравнение для $\psi_n(\mu)$:

$$\frac{d^2 \psi_n}{d\mu^2} - c h_{\mu} \frac{d\psi_n}{d\mu} + \left(\frac{1}{4} - n^2\right) \psi_n = -2\tilde{g} \frac{1}{sh\mu} \cdot Q_{n-\frac{1}{2}}^1 \cdot \mathcal{D}(\mu - \mu_0) \cdot (1 + \delta_{n0})^{-1}$$

Его решениями являются

$$\psi_n = -\frac{2\tilde{g}}{n^2 - \frac{1}{4}} \frac{sh\mu}{1 + \delta_{n0}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & P_{n-\frac{1}{2}}^1 \int_{\mu_0}^{\infty} \frac{d\mu}{sh\mu} \cdot (Q_{n-\frac{1}{2}}^1)^2 \\ & Q_{n-\frac{1}{2}}^1 \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{sh\mu} P_{n-\frac{1}{2}}^1 Q_{n-\frac{1}{2}}^1 + P_{n-\frac{1}{2}}^1 \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\mu}{sh\mu} (Q_{n-\frac{1}{2}}^1)^2 \end{aligned} \right. \quad (4.1)$$

Полученные таким образом A_p и A_z должны быть приравнены найденным в ч. 2. Это позволяет в явном виде вычислить интегралы, встречающиеся в (4.1).

Совпадение различных по форме решений, найденных в ч. 2-4, следует из того, что они являются всюду непрерывными и конечными решениями одних и тех же уравнений с одними и теми же граничными условиями. Разность любых двух решений одного и того же уравнения Пуассона является гармонической функцией. Она обращается в нуль при $r \rightarrow \infty$ (поскольку A_p и A_z убывают как r^{-3} при $r \rightarrow \infty$). Но гармоническая функция, равная нулю на бесконечности, тождественно равна нулю (см., например, [6]).

5. Вектор-потенциал в некулоновской калибровке

Нахождение вектор-потенциала существенно упрощается, если попытаться удовлетворить только уравнению $\text{rot } \vec{A} = \vec{H}$. Поскольку внутри соленоида $H_z = \frac{\partial A_p}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial p} = \frac{g}{\rho}$, то естественно искать решение в виде:

$$A_z = A_1 + A_2 \ln \rho, \quad A_p = A_3 / \rho,$$

где A_1 , A_2 , A_3 зависят только от z . Отсюда внутри соленоида получаем соотношение: $\frac{\partial A_3}{\partial z} - A_2 = g$. На внешней границе соленоида ($\rho = d + \sqrt{R^2 - z^2}$, $|z| \leq R$) компонента A_p равна $\frac{A_3}{d + \sqrt{R^2 - z^2}}$. Проще всего можно обеспечить непрерывность A_p при переходе из области I (внутренности соленоида, см. рис. 2) в область II (определенную как $\rho > d + \sqrt{R^2 - z^2}$, $|z| \leq R$), если положить A_p в области II не зависящим от ρ и равным своему значению на границе (I, II), т.е. $\frac{A_3}{d + \sqrt{R^2 - z^2}}$. Потребуем исчезновения A_p при $\rho \rightarrow \infty$. Тогда $A_3 = 0$, $A_2 = -g$. Поэтому $A_p = 0$ везде и $A_z = A_1 - g \ln \rho$

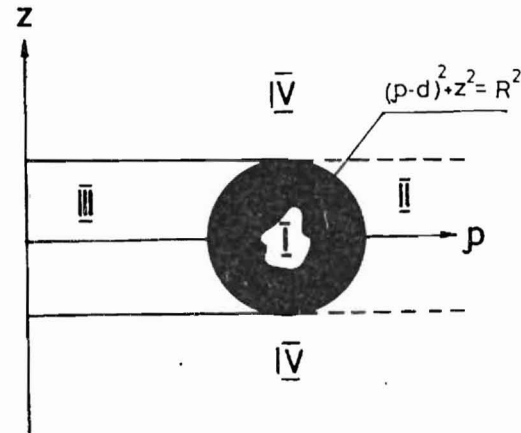


Рис. 2.

Области определения вектор-потенциала в некулоновской калибровке. Соленоид - сплошной кружок (область I). Компоненты $A_p = A_z = 0$ везде. $A_z = g \ln \frac{d + \sqrt{R^2 - z^2}}{\rho}$ в I, $A_z = g \ln \frac{d + \sqrt{R^2 - z^2}}{d - \sqrt{R^2 - z^2}}$ в III и $A_z = 0$ в остальных областях.

внутри соленоида. Применяем аналогичные рассуждения к A_z . Непрерывность A_z на внешней границе и его исчезновение при $\rho \rightarrow \infty$ дает $A_1 = g \ln(d + \sqrt{R^2 - z^2})$, $A_2 = g \ln \frac{d + \sqrt{R^2 - z^2}}{\rho}$ в I и $A_2 = 0$ во II. Непрерывность A_z на внутренней границе (то есть при $\rho = d - \sqrt{R^2 - z^2}$, $|z| \leq R$) получается, если предположить A_p в области III ($\rho < d - \sqrt{R^2 - z^2}$, $|z| \leq R$) не зависящим от ρ и равным своему значению на границе (I, III), т.е. $g \ln \frac{d + \sqrt{R^2 - z^2}}{d - \sqrt{R^2 - z^2}}$. Так как $A_z = 0$ при $|z| = R$, естественно считать $A_2 = 0$ при $|z| > R$. В итоге получаем: $A_p = A_z = 0$ везде; $A_z = g \ln \frac{d + \sqrt{R^2 - z^2}}{\rho}$ внутри соленоида, $A_z = g \ln \frac{d + \sqrt{R^2 - z^2}}{d - \sqrt{R^2 - z^2}}$ в III и $A_z = 0$ в остальных областях.

Покажем, что только что полученный вектор-потенциал может быть получен из вектор-потенциала в кулоновской калибровке с помощью калибровочного преобразования. Условие $\text{div } \vec{A} = 0$ удовлетворяется автоматически, если:

$$A_p = \frac{\partial^2 d}{\partial \rho^2 \partial z}, \quad A_z = -\frac{\partial^2 d}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial d}{\partial \rho}, \quad A_\theta = 0.$$

Условие $H_z = \frac{g}{\rho} \mathcal{D}(R - \sqrt{(p-d)^2 + z^2})$

приводит к следующему уравнению для d :

(5.1)

$$\Delta d = g \cdot \psi(\rho, z),$$

где $\psi = 0$ как при $|z| > R$, так и при $\rho > d + \sqrt{R^2 - z^2}$; $\psi = \ln \frac{\rho}{d + \sqrt{R^2 - z^2}}$ при $d - \sqrt{R^2 - z^2} \leq \rho \leq d + \sqrt{R^2 - z^2}$ и $\psi = \ln \frac{d - \sqrt{R^2 - z^2}}{d + \sqrt{R^2 - z^2}}$ при $0 \leq \rho \leq d - \sqrt{R^2 - z^2}$. Представим \vec{A} в виде:

$$\vec{A} = \vec{A}' + \text{grad} \frac{\partial d}{\partial z} \quad (5.3)$$

($A'_\rho = A'_z = 0$, $A'_z = -\Delta d = -g\psi$). Таким образом, \vec{A} и \vec{A}' связаны калибровочным преобразованием, причем \vec{A}' совпадает с вектор-потенциалом, полученным в начале данного раздела.

Решение уравнения (5.2) можно записать в виде:

$$d = -\frac{g}{2\pi} \int_{-R}^R dz \int_{d - \sqrt{R^2 - z^2}}^{\rho - R} \beta(\rho, z, z_1) \quad (5.4)$$

где $\beta(\rho, z, z_1) = \ln(d - \sqrt{R^2 - z_1^2}) \int_0^{\sqrt{\rho_1}} \rho_1 d\rho_1 Q_{\frac{1}{2}}(x) - \ln(d + \sqrt{R^2 - z_1^2}) \int_0^{\sqrt{\rho_1}} \rho_1 d\rho_1 Q_{-\frac{1}{2}}(x) + \int_{d - \sqrt{R^2 - z_1^2}}^{\rho_1} \sqrt{\rho_1} d\rho_1 \ln \rho_1 Q_{-\frac{1}{2}}(x)$,
 $x = \frac{\rho^2 + \rho_1^2 + (z - z_1)^2}{2\rho\rho_1}$.

Для частного случая тонкого соленоида ($R/d \ll 1$) удобнее стартовать от соотношений (3.3), которые можно представить в следующей форме:

$$A_x = \frac{\partial d}{\partial z}, \quad A_y = \frac{\partial d}{\partial z}, \quad A_z = -\frac{\partial d}{\partial x} - \frac{\partial d}{\partial y} \quad (5.5)$$

$$(d_x = -\oint \frac{dy_1}{|z - z_1|}, \quad d_y = \oint \frac{dx_1}{|z - z_1|}),$$

причем интегрирование выполняется вдоль окружности радиуса d , лежащей в плоскости $z = 0$. Легко убедиться, что

$$d_x = \frac{\partial d}{\partial x}, \quad d_y = \frac{\partial d}{\partial y}, \quad (5.6)$$

где:

$$d = \frac{R^2 g}{4d} \iint_{(\rho, z, z_1=0)} \frac{dx_1 dy_1}{|z - z_1|} = \frac{R^2 g}{4d} \int_0^d \int_0^{2\pi} \frac{\rho_1 d\rho_1 d\varphi}{(\tau^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos\varphi)^{1/2}} = \frac{R^2 g}{4d} \frac{2}{\sqrt{\rho}} \int_0^d \sqrt{x} dx Q_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\tau^2 + x^2}{2\rho x}\right).$$

Подставляем (5.6) в (5.5):

$$A_x = \frac{\partial d}{\partial x \partial z}, \quad A_y = \frac{\partial d}{\partial y \partial z}, \quad A_z = -\frac{\partial d}{\partial x^2} - \frac{\partial d}{\partial y^2}. \quad (5.7)$$

Добавляя и вычитая в A_z $\frac{\partial^2 d}{\partial z^2}$, представим \vec{A} в виде

$$\vec{A} = \vec{A}' + \text{grad} \frac{\partial d}{\partial z}, \quad (5.8a)$$

где $A'_\rho = A'_z = 0$, $A'_z = \varphi \delta(z) \delta(d - \rho)$, $\varphi = \pi R^2 g$. $(5.8b)$

Как и прежде, \vec{A} и \vec{A}' связаны калибровочным преобразованием. Докажем, что это преобразование сингулярно. Для этого мы перепишем d в несколько иной форме. Заметим, что A_ρ в (3.4) представимо в виде:

$$A_\rho = -\frac{R^2 g}{4} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi d\varphi}{(\tau^2 + d^2 - 2d\rho \cos\varphi)^{1/2}}. \quad (5.9)$$

С другой стороны,

$$A_\rho = \frac{\partial d}{\partial \rho \partial z} = -\frac{R^2 g}{4d} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} \int_0^d \frac{\rho_1 d\rho_1 (\rho - \rho_1 \cos\varphi) d\varphi}{(\tau^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos\varphi)^{3/2}}. \quad (5.10)$$

Сравнивая (5.9) и (5.10), заключаем, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi d\varphi}{(\tau^2 + d^2 - 2d\rho \cos\varphi)^{1/2}} = \frac{1}{d} \int_0^d \int_0^{2\pi} \frac{\rho_1 d\rho_1 d\varphi (\rho - \rho_1 \cos\varphi)}{(\tau^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos\varphi)^{3/2}} \quad (5.11)$$

и $\frac{\partial d}{\partial \rho} = -\frac{R^2 g}{4d} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi d\varphi}{(\tau^2 + d^2 - 2d\rho \cos\varphi)^{1/2}} = -\frac{R^2 g}{4d} 2\sqrt{\frac{d}{\rho}} Q_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\tau^2 + d^2}{2d\rho}\right)$.

После интегрирования по ρ

$$d = \frac{R^2 g}{4d} \left[2\pi (\sqrt{z^2 + d^2} - |z|) - 2\sqrt{d} \int_0^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} Q_{\frac{1}{2}} \left(\frac{z^2 + d^2}{2\rho d} \right) \right]. \quad (5.12)$$

Из (5.6) следует, что при $\rho > d$ аргумент $\chi (= \frac{\rho^2 + d^2}{2\rho d})$ функции $Q_{\frac{1}{2}}$ больше 1 для всех значений χ в интервале $(0 \leq \chi \leq d)$. Это означает, что функция d и все её производные являются непрерывными функциями z при $\rho > d$ (поскольку разрез функций Лежандра совпадает с интервалом $(-1, 1)$). При $\rho < d$ χ может достичь значения 1 (при $z = 0, \chi = \rho$). В этом случае d и её производные могут обладать особенностями. Это показывает выражение (5.12). Аргумент $\frac{z^2 + d^2}{2\rho d}$ функции $Q_{\frac{1}{2}}$ всегда больше 1 при $\rho < d$. Это означает, что при $\rho < d$ все сингулярности функции d обязаны первому слагаемому в (5.12), равному

$$\frac{\pi R^2 g}{2d} (\sqrt{z^2 + d^2} - |z|).$$

Первая производная от него по z имеет (при $z = 0$) скачок, равный $-\Phi$, тогда как вторая производная имеет S -образную особенность $-\Phi \delta(z)$. Мы уже знаем, что при $\rho > d$ функция d и её производные особенностей не имеют. Это означает, что при $\rho > d$ сингулярности 1-го и 2-го членов взаимно компенсируются.

Мы заключаем, что для тонкого соленоида калибровочное преобразование (5.8а) является сингулярным. Это вынуждает нас быть весьма осмотрительными при его применении к конкретным физическим проблемам (см., например /7/).

Сравниваем (5.6) и (5.12)

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^{\rho} \sqrt{x} dx Q_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{z^2 + x^2}{2\rho x} \right) = \pi (\sqrt{z^2 + d^2} - |z|) - \sqrt{d} \int_0^{\rho} \frac{dx}{\sqrt{x}} Q_{\frac{1}{2}} \left(\frac{z^2 + z^2 + d^2}{2dx} \right). \quad (5.13)$$

Интегрируем обе части (5.11) по Ψ :

$$\int_0^d dx \frac{Q_{\frac{1}{2}}(\psi)}{\sqrt{\psi^2 - 1}} \left(\frac{\sqrt{x}}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \sqrt{d} Q_{\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho^2 + z^2 + d^2}{2\rho d} \right), \quad \psi = \frac{\rho^2 + z^2 + x^2}{2\rho x}. \quad (5.14)$$

В частных случаях интегралы в (5.13) и (5.14) сводятся к уже известным. Например, полагая $\rho = \infty$ в (5.13), получаем

$$\int_0^{\infty} Q_{\frac{1}{2}} \left(\frac{z^2 + z^2 + d^2}{2dx} \right) \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\pi}{\sqrt{d}} (\sqrt{z^2 + d^2} - |z|).$$

В свою очередь это можно преобразовать в

$$\int_u^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-u}} Q_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{u + \sqrt{u^2 - 1}}.$$

Этот интеграл можно найти в /8/ (но с неправильным знаком).

Отметим, что двойной интеграл, входящий в определение функции d (см. (5.6)), может быть разложен в ряд:

$$\iint_{z'=0, \rho' \leq a} \frac{dx' dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sqrt{ck\mu - \cos\theta} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\mu) \cdot \cos n\theta,$$

$$d_n(\mu) = \frac{4a}{1 + \delta_{n0}} \cdot (-1)^n \left[Q_{n-\frac{1}{2}} \int_0^{\mu} \frac{P_{n-\frac{1}{2}} \delta_{\mu} d\mu'}{(1 + ck\mu')^{3/2}} + P_{n-\frac{1}{2}} \int_{\mu}^{\infty} \frac{Q_{n-\frac{1}{2}} \delta_{\mu} d\mu'}{(1 + ck\mu')^{3/2}} \right]. \quad (5.15)$$

Сравнивая (5.15) с (5.12) и (5.6) для некоторых интегралов, удается получить замкнутые выражения, отсутствующие в математической литературе.

6. Заключение

Мы получили вектор-потенциал тороидального соленоида как в кулоновской, так и в некулоновской калибровке. В первом случае компоненты \vec{A} убывают как r^{-3} при $r \rightarrow \infty$, во втором случае они отличны от нуля в ближайшей окрестности соленоида. Найдено калибровочное преобразование, связывающее эти потенциалы, исследованы его свойства. Полученные потенциалы могут быть использованы при изучении рассеяния заряженных частиц на тороидальном соленоиде.

Автор признателен профессору Я.А. Смородинскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смайт В. Электростатика и электродинамика. ИЛ, М., 1954.
2. Lipkin H.J., Peshkin M. Phys.Lett., 1982, B118, 385;
Liang J.Q. Phys.Rev., 1985, D32, 1014;
Babiker M., Loudon R. J.Phys., 1984, A17, 2973.
3. Roy S.M. Phys.Rev.Lett., 1980, 44, 11;
Horne D., Sengupta S. Am.J.Phys., 1983, 51, 942.
4. Афанасьев Г.Н. Препринт ОИЯИ, P5-85-118, Дубна, 1985;
Afanasyev G.N. J.Comp.Phys., 1987, 69.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Наука, М., 1973, т.1.
6. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, ГИТТЛ, М.-Л., 1951, т.2, с.218.
7. Любошиц В.Л., Смородинский Я.А. ОИЯИ, P2-11189, Дубна, 1978;
ЖЭТФ, 1978, 75, 40;
Афанасьев Г.Н. Препринт ОИЯИ, P4-87-107, Дубна, 1987.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 февраля 1987 года.

Афанасьев Г.Н.

P4-87-106

Векторные магнитные потенциалы
тороидального соленоида

Вектор-потенциалы тороидального соленоида получены как в кулоновской, так и в некулоновской калибровках. Изучены свойства этих потенциалов. В первом случае вектор-потенциал убывает обратно пропорционально кубу расстояния, во втором - он отличен от нуля только вблизи соленоида. Найдено калибровочное преобразование, связывающее эти потенциалы.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Г.Г.Сандуковской

Afanasyev G.N.

P4-87-106

The Vector Magnetic Potentials
of the Toroidal Solenoid

The vector-potentials of the toroidal solenoid are obtained both in the Coulomb and non-Coulomb gauges. Their properties are studied. In the first case it decreases as r^{-3} at large distances, while in the second one it differs from zero in the nearest vicinity of the solenoid. The gauge transformation connecting these potentials is found.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987