СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА





Р4 - 8640

Б.Н.Захарьев, Б.В.Рудяк, А.А.Сузько, И.Б.Ушаков



# ПРИМЕР ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПО ПОЛОЖЕНИЯМ РЕЗОНАНСОВ

1975

P4 - 8640

Б.Н.Захарьев, Б.В.Рудяк, А.А.Сузько, И.Б.Ушаков

# ПРИМЕР ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПО ПОЛОЖЕНИЯМ РЕЗОНАНСОВ

Захарьев Б.Н., Рудяк Б.В., Сузько А.А., Ушаков И.Б. Р4 - 8640

Пример восстановления взаимодействия по положениям резонансов

Для симметричного потенциала $v(x)=v(-x)$ набор резонансов R-матрицы $\{E_\lambda\}$ состоит из спектров $\{E_n^I\}$ и $\{E_m^{II}\}$ двух вспомогательных задач на собственные значения для того же уравнения Шредингера. Двух таких спектров достаточно для определения $v(x)$.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1975

Zakhariev B.N., Rudyak B.V., Suzko A.A., Ushakov I.B. P4 - 8640

An Example of the Reconstruction of a Potential Using Resonance Positions only

For the symmetrical potential $v(x)=v(-x)$ the set of R-matrix resonances consists of the spectra $\{E_n^I\}$ and $\{E_m^{II}\}$ of two auxiliary eigenvalue problems for the same Schrödinger equation. Two such spectra are sufficient for determination of $v(x)$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1975

## *1. Введение*

В традиционной постановке обратной задачи Гельфанда и Левитана или Марченко /см. /1/ / для восстановления потенциала взаимодействия необходимо, во-первых, указать расположение точек спектра оператора Шредингера /значения энергий связанных состояний и непрерывный спектр/ и, во-вторых, для каждой такой точки задать определенное число /например, фазу рассеяния для точек непрерывного спектра и некоторые нормировочные константы для связанных состояний/.

Аналогично в случае рассеяния частиц потенциалом конечного радиуса действия в качестве исходной информации для обратной задачи может служить двойной набор параметров $\{E_\lambda, \gamma_\lambda\}$ - положений резонансов $E_\lambda$ /точки спектра/ и их приведенных ширин $\gamma_\lambda$ /соответствующие нормировочные константы/ /2,3/.

В свете сказанного довольно неожиданным явилось указание на факт /4/, что для восстановления формы одномерной симметричной потенциальной ямы $v(x)=v(-x)$ бесконечной глубины достаточно знать лишь положение уровней и не требуется дополнительной информации.

В данной работе показано, что этот результат можно распространить на задачи рассеяния для одномерного движения в поле симметричной потенциальной ямы конечной глубины и ограниченного радиуса действия, используя формализм /2,3/.

Для рассматриваемого круга вопросов существенна теорема "о двух спектрах". Один из ее вариантов изложен в /5/ /для задач рассеяния в R-матричной теории она модифицирована в /3/ /. В этой теореме устанавливается связь спектральных параметров двух задач на собственные значения для одного и того же уравнения /в нашем случае - уравнения Шредингера с двумя разными способами задания краевых условий/. Каждой из задач соответствует свой спектр $\{E_n^{I(II)}\}$ и набор нормировочных констант $\{N_n^{I(II)}\}$. Оказывается, что величины $N_n^{I(II)}$ могут быть выражены через собственные значения $\{E_n^{I}\}$ и $\{E_m^{II}\}$, так что знания двух спектров достаточно для определения потенциала.

В случае симметричного потенциала $v(x)$ реализуется ситуация, когда его спектр представляет собой сочетание <u>двух</u> спектров для уравнения Шредингера с одной из одинаковых "половинок" $v(x)$ на полуоси при $x \geq 0$ или $x \leq 0$/. В следующем разделе показано /4/, что, таким образом, уровни бесконечной симметричной ямы могут служить исходными данными для восстановления ее формы. В разделах 3 - 5 рассматривается задача рассеяния.

## *2. Бесконечно глубокая потенциальная яма*

Волновые функции связанных состояний являются решениями уравнения Шредингера:

$$-\psi''(x) + v(x)\,\psi(x) = E\psi(x)\,, \qquad /1/$$

удовлетворяющими условиям

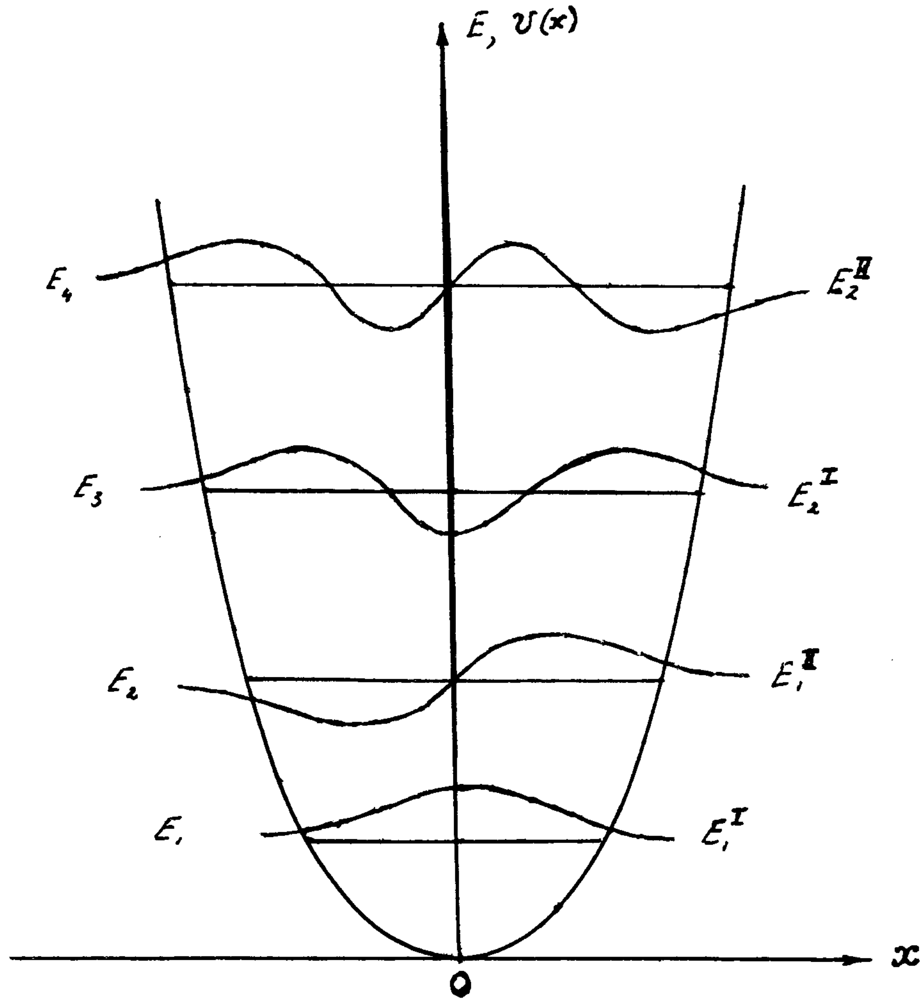
$$\psi(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0\,. \qquad /2/$$

В случае симметричного потенциала $v(x)=v(-x)$ четные уровни задачи /1/, /2/ совпадают с собственными значениями того же уравнения /1/, но соответствующими краевым условиям <u>на полуоси</u> $0 \leq x \leq \infty$ /см. рис. 1/:

$$\psi(0) = 0\,; \quad \psi(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0\,. \qquad /3/$$

При $x \geq 0$ с собственными функциями задачи /1/, /3/ совпадают также четные волновые функции симметричной ямы, т.к. они удовлетворяют тому же уравнению /1/





и одновременно уравнениям /2/ и /3/. Аналогично волновые функции нечетных состояний и соответствующие энергии уровней совпадают с собственными функциями и собственными значениями уравнения /1/ с условиями:

$$\psi'(0) = 0\,; \qquad \psi(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0\,. \qquad /4/$$

Таким образом, спектр бесконечной симметричной ямы складывается из спектров двух вспомогательных задач на собственные значения: /1/, /3/ и /1/, /4/ с тем же потенциалом $v(x)$, только с $x \geq 0$. Следовательно, используя теорему о двух спектрах, можно по уровням симметричной ямы восстановить $v(x)$ при $x \geq 0$, а, благодаря свойству симметрии $v(x) = v(-x)$, и весь потенциал $v(x)$ для $-\infty \leq x \leq \infty$ /4/.

Для сил ограниченного радиуса действия $v(|x| \geq a) = 0$ можно обобщить полученный результат на задачи рассеяния. Но сначала рассмотрим формализм R-матрицы в специальном случае одномерного движения вдоль всей оси $-\infty \leq x \leq \infty$.

### *3. R-матрица для процессов отражения от поля и прохождения через него*

Одномерное движение на всей оси $-\infty \leq x \leq \infty$ представляет собой по существу двухканальную задачу, в отличие от радиального /одноканального/ движения на полуоси $0 \leq x \leq \infty$, к которому сводятся задачи рассеяния сферическим полем $v(|r|)$ в представлении парциальных волн.

Разложим волновую функцию $\psi(E,x)$ по собственным функциям $u(E_\lambda, x)$ уравнения /1/ с однородными граничными условиями при $x = \pm a$ /предполагаем, что $v(|x| \geq a) = 0$/:

$$\frac{u'(E_\lambda, a)}{u(E_\lambda, a)} = B\,; \qquad \frac{u'(E_\lambda, -a)}{u(E_\lambda, -a)} = -B\,; \qquad /5/$$

$$\psi(E,x) = \sum_\lambda A_\lambda\, u(E_\lambda, x)\,; \qquad /6/$$



где

$$A_\lambda = \int_{-a}^{a} \psi(E,x)\, u(E_\lambda, x)\, dx\,. \qquad /7/$$

Умножая уравнение /Шредингера/ для $\psi(E,x)$ на $u(E_\lambda, x)$, а уравнение для $u(E_\lambda, x)$ на $\psi(E,x)$, вычтем полученные равенства и, интегрируя по $x$ от $-a$ до $a$, получим, учитывая /7/,

$$\int_{-a}^{a} (-\psi''(E,x)\, u(E_\lambda, x) + u''(E_\lambda, x)\, \psi(E,x)\, dx = (-\psi'(E,x)\, u(E_\lambda, x) +$$

$$/8/$$

$$+\psi(E,x)\, u'(E_\lambda, x)\Big|_{-a}^{a} = (E - E_\lambda) \int_{-a}^{a} \psi(E,x)\, u(E_\lambda, x)\, dx = (E - E_\lambda) A_\lambda\,.$$

Подставляя $A_\lambda$ из /8/ в /6/, получим при $x = \pm a$, используя /5/,

$$\psi(a) = \sum_\lambda \frac{1}{E - E_\lambda} \{u^2(E_\lambda, a)\,[B\psi(E,a) - \psi'(E,a)] +$$

$$+ u(E_\lambda, -a)\, u(E_\lambda, a)\,[B\psi(E\ \ ,-a) + \psi'(E\ \ ,-a)]\}\,, \qquad /9/$$

$$\psi(-a) = \sum_\lambda \frac{1}{E - E_\lambda} \{u'(E_\lambda, a)\, u(E_\lambda, -a)\,[B\psi(E,a) - \psi'(E,a)] +$$

$$+ u^2(E_\lambda, -a)\,[B\psi(E,-a) + \psi'(E,-a)]\}\,.$$

В многоканальном случае R-матрица определяется следующим образом:

$$\psi_\alpha(E, a_\alpha) = \sum_{\alpha'} R_{\alpha\alpha'}(E)\, \{\psi'_{\alpha'}(E, a_{\alpha'}) - B_{\alpha'}\psi_{\alpha'}(E, a_{\alpha'})\}\,. \qquad /10/$$

Сравнивая /9/ и /10/, можно ввести понятие о 2-канальной R-матрице для одномерного движения на оси $-\infty \leq x \leq \infty$, если рассматривать волны справа и слева от потенциальной ямы $v(x)$ движущимися в двух разных каналах и дифференцировать не по $x$, а по $|x|$. Индексу

$\alpha$ будем приписывать соответственно два значения $\pm$. Таким образом,

$$R_{\alpha\alpha'}(E) = \sum_{\lambda} \frac{u(E_\lambda,\alpha a)\,u(E_\lambda,\alpha' a)}{E_\lambda - E}. \qquad /11/$$

Связь $R$ -матрицы с $S$ -матрицей /коэффициентами прохождения и отражения/ получается, если в /9/ использовать /11/ и подставить асимптотические выражения для $\psi$:

$$\psi^+(E,x>a) = e^{-ikx} + S_{++}(E)\,e^{ikx}\ ;\ \psi^+(E,x<-a) = S_{-+}e^{-ikx} \qquad /12/$$

в случае, когда поток частиц падает справа /и аналогично, если слева/.

По заданным $S_{\alpha\alpha'}(E)$ можно найти значения $E_\lambda$, в которых $R_{\alpha\alpha'}(E)$ обращаются в бесконечность. Как и в разделе 2, набор $\{E_\lambda\}$ определяет два спектра для вспомогательных задач на полуоси. Благодаря теореме о двух спектрах, этой информации достаточно для восстановления $v(x)$.

### *4. Теорема о двух спектрах*

Рассмотрим две системы однородных граничных условий в $x=0$ и $x=a$ для уравнения /1/:

$$\text{I}\quad u_n'(0) = 0\ ,\quad u_n'(a) = B u_n(a)\ , \qquad /13/$$

$$\text{II}\quad u_m(0) = 0\ ,\quad u_m'(a) = B u_m(a)\ , \qquad /13'/$$

которым соответствуют наборы собственных значений, $\{E^{\text{I}}_n\}$ и $\{E^{\text{II}}_m\}$, и вспомогательные решения /1/, отвечающие неоднородным граничным условиям:



$$\phi'(E,0) = 0,\quad \phi(E,0) = 1\ , \qquad /14/$$

$$\chi(E,0) = 0,\quad \chi'(E,0) = 1\ . \qquad /14'/$$

Благодаря совпадению условий при $x=0$ в /13/ и /14/, а также в /13'/ и /14'/, решения $u_n(x)$ и $u_m(x)$ отличаются от $\phi(E,x)$ и $\chi(E,x)$ соответственно при $E=E^{\text{I}}_n$ и $E=E^{\text{II}}_m$ лишь постоянными множителями $u_n(0)$ и $u_m'(0)$:

$$u_n(x) = u_n(0)\,\phi(E^{\text{I}}_n, x)\ , \qquad /15/$$

$$u_m(x) = u_m'(0)\,\chi(E^{\text{II}}_m, x)\ . \qquad /15'/$$

Эти константы определяют нормировки решений $\phi$ и $\chi$ /в силу /15/, /15'/ и нормировки $u_n(x)$ и $u_m(x)$ на 1/2 на интервале $0 \le x \le a$):

$$\int_0^a \phi^2(E^{\text{I}}_n, x)\,dx = \frac{1}{u_n^2(0)} \int_0^a u_n^2(x)\,dx = \frac{1}{2u_n^2(0)}\ ; \qquad /16/$$

$$\int_0^a \chi^2(E^{\text{II}}_m, x)\,dx = \frac{1}{u_m'^2(0)} \int_0^a u_m^2(x)\,dx = \frac{1}{2u_m'^2(0)}\ . \qquad /16'/$$

Небольшая модификация формализма обратной задачи, данного в /2,3/, позволяет по набору параметров $\{E^{\text{I}}_n, u_n(0)\}$ восстановить $v(x)$ при $x \ge 0$, а для симметричного потенциала $v(x)$ - при всех $x$. Ниже будет показано, что набора $\{E_\lambda\}$ достаточно, чтобы определить и $E^{\text{I}}_n$ и $u_n(0)$. Построим еще одно вспомогательное решение уравнения /1/:

$$f(E,x) = \chi(E,x) + m(E)\,\phi(E,x)\ , \qquad /17/$$

и выберем $m(E)$ так, чтобы выполнялось условие при $x=a$:

$$f'(E,a) = Bf(E,a). \qquad /18/$$

Подставляя /17/ в /18/, получим для $m(E)$:

$$m(E) = -\frac{\chi'(E,a) - B\chi(E,a)}{\phi'(E,a) - B\phi(E,a)} \equiv -\frac{\Phi_2}{\Phi_1}. \qquad /19/$$

Согласно /13/ и /15/ $m(E)$ имеет в точках $E_n^I$ полюса.

Рассмотрим интеграл

$$I = (E - E_n^I)\int_0^a f(E,x)\,\phi(E_n^I,x)\,dx. \qquad /20/$$

Поскольку $f$ и $\phi$ удовлетворяют уравнению Шредингера, перепишем 1 в виде

$$I = \int_0^a [-f''(E,x) + v(x)\,f(E,x)]\,\phi(E_n^I,x)\,dx -$$

$$-\int_0^a f(E,x)\,[-\phi''(E_n^I,x) + v\phi(E_n^I,x)]\,dx =$$

$$= \int_0^a [\,f(E,x)\,\phi''(x,E_n^I) - f''(E,x)\,\phi(E_n^I,x)]\,dx = \qquad /21/$$

$$= \int_0^a [\,f(E,x)\,\phi'(E_n^I,x) - f'(E,x)\,\phi(E_n^I,x)]'\,dx =$$

$$= f(E,a)\,\phi'(E_n^I,a) - f'(E,a)\,\phi(E_n^I,a) + f'(E,0),$$

а используя /13/-/15/, имеем

$$I = f'(E,0) = 1. \qquad /22/$$

Если же подставить /17/ в /20/, то в пределе $E \to E_n$, раскрывая неопределенность типа $\frac{0}{0}$ по правилу Лопиталя, согласно /16/ имеем:

$$\frac{1}{2u_n^2(0)} = -\frac{\Phi_1'(E_n^I)}{\Phi_2(E_n^I)}. \qquad /23/$$

По аналогии с [5] имеем:

$$\Phi_1(E) = c_1\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{E}{E_k^I}\right);\quad \Phi_2 = c_2\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{E}{E_k^{II}}\right), \qquad /24/$$

где $c_1$ и $c_2$ - такие константы, что

$$\frac{c_2}{c_1}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{E_k^I}{E_k^{II}} = 1. \qquad /25/$$

Эти соотношения проще получаются в конечно-разностном приближении для уравнения Шредингера /1/ [2,3], когда $\phi(E,a)$, $\chi(E,a)$ являются, как функции от $E$ /вместе с $\Phi_1$, $\Phi_2$/, полиномами степени $N$ /$N$ - число шагов на интервале $0 \le x \le a$ / и индекс $k$ в произведениях пробегает лишь $N$ значений.

В силу /23/, /24/, /25/ имеем

$$u_n^2(0) = \frac{1}{2}(E_n^{II} - E_n^I)\prod_{k=1}^{\infty}{}'\,\frac{(E_k^{II} - E_k^I)}{(E_k^I - E_n^I)}. \qquad /26/$$

Если провести те же рассуждения, что и при выводе /17/-/26/, только заменяя $\chi \to \phi$, получим

$$u_m'^2(0) = -\frac{1}{2}(E_m^I - E_m^{II})\prod_{k=1}^{\infty}{}'\,\frac{(E_k^I - E_m^{II})}{(E_k^{II} - E_m^{II})}. \qquad /26'/$$

## *5. Заключение*

Поскольку условия /13/ , /13'/ автоматически выполняются в задаче на собственные значения /1/, /5/ с симметричным потенциалом /соответственно для четных и нечетных состояний/, набор $\{E_\lambda\}$ оказывается состоящим из чередущихся двух спектров $\{E_n^I\}$ и $\{E_m^{II}\}$. Таким образом, зная $\{E_\lambda\}$, мы имеем оба эти спектра, а согласно /26/, /26'/ и соответствующие нормировки, что достаточно для восстановления $v(x)$.

Пока неясно, распространяются ли полученные результаты на трехмерные задачи, что было бы весьма интересно знать. Физической же реализацией рассмотренного одномерного случая могло бы служить взаимодействие потока частиц с пластинкой /фольгой/, расположенной перпендикулярно к потоку /если считать это взаимодействие потенциальным/. Тогда по резонансам R-матрицы определялась бы форма потенциала, создаваемого фольгой.

Обобщение предложенного формализма на комплексно-значные потенциалы и силы, зависящие от скорости, делается аналогично /2,7/.

### *Литература*


1. *Р.Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц, гл. 20, М., "Мир", 1960.*
2. *Б.Н.Захарьев, С.А.Ниязгулов, А.А.Сузько. ЯФ, 20, 1273 /1974/; Препринт ОИЯИ, Р4-7768, Дубна, 1974.*
3. *В.П.Жигунов, Б.Н.Захарьев, С.А.Ниязгулов, А.А.Сузько. Препринт ОИЯИ, Р4-7815, Дубна, 1974.*
4. *V.Barcilon. Journ. Math.Phys., 15, No.4, 429 (1974).*
5. *Б.М.Левитан, М.Г.Гасымов. УМН, 19, 3 /1964/.*
6. *А.Лейн, Р.Томас. Теория ядерных реакций при низких энергиях, М. ИЛ., 1960.*
7. *Б.Н.Захарьев, А.А.Сузько. Препринт ОИЯИ, Р4-8121, Дубна, 1974; ЯФ, 21, 5, 1975.*



*Рукопись поступила в издательский отдел*
*26 февраля 1975 года.*