сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-86-573

В.Б.Беляев, О.И.Картавцев*, В.И.Кочкин

Решение дифференциальных уравнений Фаддеева - Якубовского методом конечномерной аппроксимации для четырех бесспиновых частиц в задаче (1 + 3) - рассеяния

* Ташкентский государственный университет

1986

I. Уравнения Якубовского и другие соотношения в задаче (I+3)-рассеяния

Для четырех тождественных бесспиновых частиц, взаимодействующих в S-волне, дифференциальные уравнения Якубовского имеют вид /I/:

$$\left[\Delta + E - V(x)\left(1 + \hat{L}\right)\right] |\Psi\rangle = 0 . \qquad (\mathrm{I})$$

Здесь использованы обозначения:

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\Psi(x,y,z)$ – двухкомпонентная функция, $V(x)$ – потенциал гауссовского (в нашем расчете) типа,

$$\hat{L} \equiv \begin{pmatrix} \hat{L}^{11} & \hat{L}^{12} \\ \hat{L}^{21} & \hat{L}^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{K}\,(1+\hat{K}_1) \,, & \hat{K}\hat{K}_2 \\ \hat{K}_2\,\hat{P}_{12} \,, & \hat{P}_{12} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где

$$\hat{K}\;\Psi(x,y,z) = \int_{-1}^{1} du\, \frac{xy}{x'\,y'}\,\Psi(x',y',z) \;, \qquad (3)$$

$$\hat{K}_{1,2}\,\Psi(x',y',z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dv\, \frac{y'\,z}{y''_{1,2}\,z''_{1,2}}\,\Psi(x',y''_{1,2}\,,z''_{1,2}), \qquad (4)$$

$$\hat{P}_{12}\;\Psi(x,y,z) = \Psi(y,x,z)\,, \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
x'^2 &= \tfrac{1}{4}\,(x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}\,xy\,u)\,,\\
y'^2 &= \tfrac{1}{4}\,(3x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}\,xy\,u)\,,\\
y''^2_{1,2} &= y'^2\cos^2 a_{1,2} + z^2\sin^2 a_{1,2} + v\,y'z\sin 2a_{1,2}\,,\\
z''^2_{1,2} &= y'^2\sin^2 a_{1,2} + z^2\cos^2 a_{1,2} - v\,y'z\sin 2a_{1,2}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Введем переменные (ρ, β, α), $x = \rho\cos\beta$, $y = \rho\sin\beta\cos\alpha$, $z = \rho\sin\beta\sin\alpha$ с областью изменения

$$0 \le \rho < \infty\,,\quad 0 \le \beta \le \tfrac{\pi}{2}\,,\quad 0 \le \alpha \le \tfrac{\pi}{2}\,. \qquad (7)$$

В качестве базиса по (α, β) выберем функции

$$\varphi_{\ell n}(\beta,\alpha) = 4C_{\ell n} P^{2n}_{2\ell+1}(\cos\beta)\sin 2n\alpha , \tag{8}$$

$\ell \geq n \geq 1$, а $P^m_\ell(x)$ – присоединенные полиномы Лежандра,

$$C^2_{\ell n} = \frac{(4\ell+3)(2\ell-2n+1)!}{\pi\,(2\ell+2n+1)!} . \tag{9}$$

При вычислении матричных элементов операторов, входящих в (2), на базисе $\varphi_{\ell n}$ имеет место соотношение

$$\langle \varphi_{\ell' n'} | \hat{L}^{ij} | \varphi_{\ell n} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \hat{L}^{ij}_{n'n}(\ell) . \tag{10}$$

Произведем перестановку координатных осей x, z и перейдем от координат (β,α) к координатам (θ,φ). Следуя /2/, получим выражение

$$\varphi_{\ell n}(\beta,\alpha) = -\sum_{n'=1}^{\ell} b^{\ell}_{nn'} \varphi_{\ell n'}(\theta,\varphi), \tag{11}$$

где

$$b^{\ell}_{nn'} = (-1)^{n+n'} \cdot 2^{-2\ell} \sqrt{\frac{(2\ell+2n+1)!\,(2\ell-2n+1)!}{(2\ell+2n'+1)!\,(2\ell-2n'+1)!}} \times \sum_k (-1)^k \binom{2\ell+2n'+1}{k} \binom{2\ell-2n'+1}{k+2n-2n'} . \tag{12}$$

Удобные для вычислений явные разложения вышеупомянутых операторов имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{K}\, \varphi_{\ell n}(\theta,\varphi) = \lambda_n\left(\tfrac{\pi}{6}\right) \varphi_{\ell n}(\theta,\varphi) ,\\
&\hat{K}_{1,2}\, \varphi_{\ell n}(\beta,\alpha) = \tfrac{1}{2}\lambda_n(a_{1,2})\, \varphi_{\ell n}(\beta,\alpha) ,\\
&\langle \varphi_{\ell n} | \hat{K}\hat{K}_{1,2} | \varphi_{\ell' n'} \rangle = \tfrac{1}{2}\lambda_{n'}(a_{1,2}) K^{\ell}_{nn'} ,\\
&\langle \varphi_{\ell n} | \hat{P}_{12} | \varphi_{\ell' n'} \rangle = \tfrac{1}{2}(-1)^{n+n'+1} b^{\ell}_{nn'} \lambda_n(a_2)\, \delta_{\ell\ell'} ,\\
&\langle \varphi_{\ell n} | \hat{K}_2 \hat{P}_{12} | \varphi_{\ell' n'} \rangle = \tfrac{1}{2}(-1)^{n+n'+1} b^{\ell}_{nn'} \lambda_n(a_2)\, \delta_{\ell\ell'}
\end{aligned}\right\} , \tag{13}$$

причем

$$K^{\ell}_{nn'} = \sum_{n''=1}^{\ell} b^{\ell}_{nn''} b^{\ell}_{n'n''} \lambda_{n''}\left(\tfrac{\pi}{6}\right) , \tag{14}$$

$b^{\ell}_{nn'} = b^{\ell}_{n'n}$, а остальные величины имеют вид

$$\cos a_1 = \tfrac{1}{3} , \quad \cos a_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \tag{15}$$

и

$$\lambda_n(a) = \frac{2}{n} \frac{\sin 2na}{\sin 2a} . \tag{16}$$

В исходных уравнениях (1) обозначим:

$$E = -k^2 , \quad V(x) = -v(x) , \quad |\Psi_1\rangle = \rho|\Psi\rangle ,$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\hat{M} , \tag{17}$$

$$\hat{M} = \frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta \frac{\partial}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{\sin^2\beta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} , \tag{18}$$

имеем

$$\hat{M}\varphi_{\ell n} = -2(\ell+1)(2\ell+1)\,\varphi_{\ell n} . \tag{19}$$

Уравнение (1) принимает вид

$$[\Delta_1 + v(x)(1+\hat{L}) - k^2]\,|\Psi_1\rangle = 0 . \tag{20}$$

Будем искать длину рассеяния a для процесса 1+3 → 1+3, при этом $k^2 = \varepsilon_3$ (ε_3 – энергия связи 3-частичной мишени). Граничные условия имеют вид

$$\Psi(0,y,z) = \Psi(x,0,z) = \Psi(x,y,0) = 0 \tag{21}$$

и дополняются асимптотическим условием

$$\langle x,y,z | \Psi \rangle \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} \binom{1}{0} \Phi_3(x,y)\cdot(z-a) . \tag{22}$$

Здесь Φ_3 – функция 3-частичного связанного состояния, рассчитанная в работе /7/. Тогда решение уравнения (20) удобно искать в виде

$$\langle \rho,\beta,\alpha | \Psi_1 \rangle = \langle \rho,\beta,\alpha | \Phi \rangle + \binom{1}{0} \rho\, \Phi_3(x,y)[z - a(1-e^{-dz})] . \tag{23}$$

В результате для функции Φ получаем неоднородное уравнение:

$$[\Delta_1 + v(x)(1+\hat{L}) - k^2]\,|\Phi\rangle + |f\rangle = 0 , \tag{24}$$

где

$$\langle \rho,\beta,\alpha | f \rangle = f_1 - a f_2 \tag{25}$$

и

$$
\left.
\begin{aligned}
f_1 &= \rho \begin{pmatrix} \hat{R}\cdot\hat{R}_1 \\ \hat{R}_2\cdot\hat{P}_{12} \end{pmatrix} \Phi_3(x,y)\cdot z\,, \\
f_2 &= \rho\left\{ d^2 e^{-dz}\Phi_3(x,y) - \begin{pmatrix} \hat{R}\cdot\hat{R}_1 \\ \hat{R}_2\cdot\hat{P}_{12} \end{pmatrix} \Phi_3(x,y)(1-e^{-dz}) \right\}.
\end{aligned}
\right\} \quad (26)
$$

Функция Φ, очевидно, удовлетворяет граничным условиям, как и для $|\Psi>$ (2I), и условию $\Phi \underset{\rho\to\infty}{\to} 0$. Выпишем еще выражение для ядра G оператора Δ_1^{-1}:

$$
G_{(\rho,\rho',\beta,\beta',\alpha,\alpha')} = \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\ell} \varphi_{\ell n}(\beta,\alpha)\varphi_{\ell n}(\beta',\alpha') g_\ell(\rho,\rho')\,, \quad (27)
$$

$$
g_\ell(\rho,\rho') = -\frac{1}{4\ell+3}\,\frac{[\min(\rho,\rho')]^{2(\ell+1)}}{[\max(\rho,\rho')]^{2\ell+1}}\,. \quad (28)
$$

2.Конечномерная аппроксимация в расчете систем нескольких частиц

Уравнение (24) решаем с помощью конечномерной аппроксимации оператора Δ_1 (о методе конечномерной аппроксимации см. /3–8/). Суть этого метода состоит в следующем.

Например, рассматривая уравнение вида

$$
(\Delta + W)\,|\Phi> + |f> = 0\,, \quad (29)
$$

задаем оператор $\tilde{\Delta}$ соотношением

$$
\tilde{\Delta}\,\Delta^{-1}\,|\chi_i> = |\chi_i>\,, \quad i=\overline{1,M}. \quad (30)
$$

Решение уравнения (29) ищем в виде

$$
|\Phi> = W^{-1}\left[\sum_{i=0}^{M} C_i\,|\chi_i> + |f>\right]. \quad (31)
$$

При $C_0\,|\chi_0> = -|f>$ имеем

$$
|\Phi> = W^{-1}\sum_{i=1}^{M}|\chi_i>. \quad (32)
$$

Вводим задаваемые нами конкретно пробные функции $|\varphi_i>$: $|\chi_i> = W|\varphi_i>$, тогда

$$
|\Phi> = \sum_{i=1}^{M} C_i\,|\varphi_i>. \quad (33)
$$

Таким образом, задача нахождения решения уравнения (29) сводится при замене дифференциального оператора Δ на $\tilde{\Delta}$ при условии (30) их совпадения на конечномерном базисе функций χ_i к определению коэффициентов C_i $(i=1,\ldots,M)$ в соотношении (33). Для этого в уравнении (29) заменим оператор Δ на $\tilde{\Delta}$ и спроектируем полученное уравнение на $\Delta^{-1}|\chi_i>$, в результате имеем

$$
\sum_{i=1}^{M} <\chi_\ell\,|\Delta^{-1} + W^{-1}|\,\chi_i> C_i + <\chi_\ell\,|\Delta^{-1}|\,f> = 0\,, \quad \ell=\overline{1,M}. \quad (34)
$$

С помощью функций $|\varphi_i>$ получаем соотношения

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{M} A_{\ell i} C_i + u_\ell = 0\,, \quad \ell=\overline{1,M}, \\
&\sum_{i=1}^{M} (u_i^* + <f\,|\,\varphi_i>)C_i + <f\,|\Delta^{-1}|\,f> = 0\,,
\end{aligned}
\right\} \quad (35)
$$

где

$$
A_{\ell i} = <\varphi_\ell\,|\,W\Delta^{-1}W + W\,|\,\varphi_i>\,, \quad (36)
$$

$$
u_\ell = <\varphi_\ell\,|\,W\Delta^{-1}\,|\,f>\,. \quad (37)
$$

Соотношения (35) для уравнения (I) и других подобных уравнений позволяют решать многие актуальные задачи в расчетах систем нескольких частиц, таких, как нахождение энергии связи 2-х, 3-х и более частиц (задача на собственные значения для однородного или неоднородного уравнения (29) имеет место при $|f> = 0$ и при $|f> = q\,|f_1>$, $u_\ell = q\,u_{1\ell}$, где, в частности, можно просто полагать q=I) или определение фазы упругого рассеяния I+2→I+2 ниже порога развала $-\varepsilon_2 < E < 0$ и другие задачи для уравнения (29) при различных граничных условиях. При определении длины рассеяния a:

$$
|f> = |f_1> - a\,|f_2>\,, \quad u_\ell = \beta_\ell - a\gamma_\ell\,,
$$

из (35) следует уравнение для a:

$$
\begin{aligned}
&a^2\left[\sum_{i,\ell=1}^{M}(\gamma_\ell^* + <f_2|\varphi_\ell>)(A^{-1})_{\ell i}\gamma_i - <f_2|\Delta^{-1}|f_2>\right] + \\
&+ a\left\{-\sum_{i,\ell=1}^{M}\left[(\gamma_\ell^* + <f_2|\varphi_\ell>)(A^{-1})_{\ell i}\beta_i + (\beta_\ell^* + <f_1|\varphi_\ell>)(A^{-1})_{\ell i}\gamma_i\right] + \right. \\
&\left. + <f_2|\Delta^{-1}|f_1> + <f_1|\Delta^{-1}|f_2>\right\} + \sum_{i,\ell=1}^{M}(\beta_\ell^* + <f_1|\varphi_\ell>)(A^{-1})_{\ell i}\beta_i - \\
&- <f_1|\Delta^{-1}|f_1> = 0.
\end{aligned} \quad (38)
$$

При конечномерной аппроксимации Δ_1 в (24) выбираем пробные функции $|\varphi_i>$ при представлении решения Φ в (33) так:

$$
<\rho,\beta,\alpha\,|\,\varphi_i> = \begin{pmatrix} \theta\,(M_1 - i + 1/2) \\ \theta\,(i - M_1 - 1/2) \end{pmatrix} \varphi_i(\rho,\beta,\alpha)\,, \quad i=\overline{1,M}, \quad (39)
$$

$$\varphi_i(\rho,\beta,\alpha) = e^{-a_i\rho}\left(1-e^{-a_i\rho}\right)^{2\ell_i+2}\varphi_{\ell_i n_i}(\beta,\alpha) \equiv \Phi_i(\rho)\,\varphi_{\ell_i n_i}(\beta,\alpha). \tag{40}$$

Ошибка аппроксимации Δ оператором $\tilde{\Delta}$ определялась нами с помощью функционалов оценки

$$F_1 = \frac{\langle \Phi | \Delta - \tilde{\Delta} | \Phi \rangle^2}{\langle \Phi | \Delta | \Phi \rangle^2}, \tag{41}$$

$$F_2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{M} \langle \varphi_i | \Delta - \tilde{\Delta} | \Phi \rangle^2}{\sum\limits_{i=1}^{M} \langle \varphi_i | \Delta | \Phi \rangle^2}. \tag{42}$$

Выбирая параметры a_i $(i=\overline{1,M})$ в формуле (40) из области их значений, минимизируем F_1 и F_2, каждый раз подставляя в (41) и (42) найденные для определенного набора a_i решения. Минимум F_1 и F_2 фиксирует наилучшее из найденных решений уравнения (24) и соответствующие этому решению параметры a_i. Выражения, входящие в функционалы (41), (42), имеют вид

$$\langle \Phi | \Delta - \tilde{\Delta} | \Phi \rangle = \sum_{i,\ell=1}^{M} c_i^* c_\ell \langle \varphi_i | \Delta + W | \varphi_\ell \rangle + \sum_{i=1}^{M} c_i^* \langle \varphi_i | f \rangle, \tag{43}$$

$$\langle \varphi_\ell | \tilde{\Delta} | \Phi \rangle = -\sum_{i=1}^{M} \langle \varphi_\ell | W | \varphi_i \rangle c_i - \langle \varphi_\ell | f \rangle, \quad \ell = \overline{1,M}.$$

3. Основные соотношения и расчетные формулы

Для определения длины рассеяния a из уравнения (38) выпишем явный вид величин, входящих в него. Прежде всего заменим $v(x)$ на приближенное $\tilde{v}_N$:

$$v_N \Psi(\rho,\beta,\alpha) = \sum_{\ell,\ell'=1}^{N} \sum_{n=1}^{\min(\ell,\ell')} v^n_{\ell\ell'}(\rho)\,\varphi_{\ell n}(\beta,\alpha) \int d\Omega' \varphi_{\ell' n}(\beta',\alpha')\,\Psi(\rho,\beta',\alpha'), \tag{44}$$

$$v^n_{\ell\ell'}(\rho) = \langle \varphi_{\ell n} | v | \varphi_{\ell' n} \rangle \equiv 4\pi c_{\ell n} c_{\ell' n} \int_0^1 dt\, \mathcal{P}^{2n}_{2\ell+1}(t)\, \mathcal{P}^{2n}_{2\ell'+1}(t)\, v(\rho,t). \tag{45}$$

Введем обозначения:

$$\langle \varphi_{\ell n} | \hat{L}^{ij} | \varphi_{\ell n'} \rangle \equiv L^{ij}_{nn'}(\ell). \tag{46}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} L^{11}_{nn'}(\ell) &= \left(1+\tfrac{1}{2}\lambda_{n'}(a_1)\right)K^{\ell}_{nn'} = \left(1+\tfrac{1}{2}\lambda_{n'}(a_1)\right)\sum_{n''=1}^{\ell} b^{\ell}_{nn''} b^{\ell}_{n'n''} \lambda_{n''}(\pi/6), \\ L^{12}_{nn'}(\ell) &= \tfrac{1}{2}\lambda_{n'}(a_2) \sum_{n''=1}^{\ell} b^{\ell}_{nn''} b^{\ell}_{n'n''} \lambda_{n''}(\pi/6), \\ L^{21}_{nn'}(\ell) &= \tfrac{1}{2}(-1)^{n+n'+1} b^{\ell}_{nn'} \lambda_n(a_2), \\ L^{22}_{nn'}(\ell) &= (-1)^{n+n'+1} b^{\ell}_{nn'}. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Матричные элементы можно записать так:

$$\begin{aligned} A_{ij} = {} & \int_0^\infty d\rho\, \Phi_i(\rho)\Phi_j(\rho)\left[v^n_{\ell_i\ell_j}(\rho)\left(\delta_{n_in_j} + L^{m_im_j}_{n_in_j}(\ell_j)\right) - \kappa^2 \delta_{\ell_i\ell_j}\delta_{n_in_j}\right] + \\ & + \int_0^\infty d\rho \int_0^\infty d\rho'\, \Phi_i(\rho)\Phi_j(\rho') \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{n=1}^{\min(\ell,\ell_i,\ell_j)} \sum_{m=1}^{2} \left[v^n_{\ell\ell_i}(\rho)\left(\delta_{n_in}\delta_{m_im} + \right.\right. \\ & \left.\left. + L^{mm_i}_{nn_i}(\ell_i)\right) - \kappa^2 \delta_{\ell_i\ell}\delta_{n_in}\delta_{m_im}\right] \times g_\ell(\rho,\rho')\left[v^n_{\ell\ell_j}(\rho')\left(\delta_{n_jn}\delta_{m_jm} + \right.\right. \\ & \left.\left. + L^{mm_j}_{nn_j}(\ell_j)\right) - \kappa^2 \delta_{\ell_j\ell}\delta_{n_jn}\delta_{m_jm}\right]; \end{aligned} \tag{48}$$

$$\left.\begin{aligned} t^{1\ell}_{nn'} &= -\frac{1}{2} \sum_{n''=1,\,n'''=1}^{\ell} b^{\ell}_{nn'''} b^{\ell}_{n''n'''} b^{\ell}_{n''n'} \lambda_{n''}(a_1)\lambda_{n'''}(\pi/6), \\ t^{2\ell}_{nn'} &= \delta_{nn'}\lambda_n(a_2). \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

δ с двумя индексами во всех формулах есть символ Кронекера.

$$\langle f_1 | \varphi_i \rangle = \int_0^\infty d\rho\, \Phi_i(\rho) \sum_{n=1}^{\ell_i} t^{m_i\ell_i}_{n_in}\, h^1_{\ell_in}(\rho), \tag{50}$$

$$\langle f_2 | \varphi_i \rangle = -\int_0^\infty d\rho\, \Phi_i(\rho) \sum_{n=1}^{\ell_i} \left[d^2 b^{\ell_i}_{n_in} h^2_{\ell_in}(\rho) + t^{m_i\ell_i}_{n_in} h^3_{\ell_in}(\rho)\right], \tag{51}$$

$$\begin{aligned} \beta_i = {} & \int_0^\infty d\rho \int_0^\infty d\rho' \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{n=1}^{\min(\ell,\ell_i)} \sum_{m=1}^{2} \left[v^n_{\ell_i\ell}(\rho)\left(L^{mm_i}_{nn_i}(\ell_i) + \delta_{n_in}\delta_{m_im}\right) - \right. \\ & \left. - \kappa^2 \delta_{\ell_i\ell}\delta_{n_in}\delta_{m_im}\right] g_\ell(\rho,\rho') \cdot \sum_{n'=1}^{\ell} t^{m\ell}_{nn'}\, h^1_{\ell n'}(\rho'), \end{aligned} \tag{52}$$

$$\gamma_i = -\int_0^\infty d\rho \int_0^\infty d\rho' \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{n=1}^{\min(\ell_i,\ell)} \sum_{m=1}^{2} \Big[v^n_{\ell_i \ell}(\rho) \big(L^{mm_i}_{nn_i}(\ell_i) + \delta_{n_i n}\,\delta_{m_i m}\big) - \kappa^2 \delta_{\ell_i \ell}\,\delta_{n_i n}\,\delta_{m_i m}\Big] g_\ell(\rho,\rho') \times \sum_{n'=1}^{\ell} \Big[d^2 b^\ell_{nn'} h^2_{\ell n'}(\rho') + t^{m\ell}_{nn'} h^3_{\ell n'}(\rho')\Big] . \qquad (53)$$

Другие выражения имеют вид

$$\langle f_1|\Delta^{-1}|f_1\rangle = \int_0^\infty d\rho \int_0^\infty d\rho' \sum_{\ell=1}^{N_1} \sum_{n,n',n''=1}^{\ell} \sum_{m=1}^{2} g_\ell(\rho,\rho') \times h^1_{\ell n'}(\rho)\, h^1_{\ell n''}(\rho')\, t^{m\ell}_{nn'}\, t^{m\ell}_{nn''} , \qquad (54)$$

$$\langle f_2|\Delta^{-1}|f_2\rangle = \int_0^\infty d\rho \int_0^\infty d\rho' \sum_{\ell=1}^{N_1} \sum_{n,n',n''=1}^{\ell} \sum_{m=1}^{2} g_\ell(\rho,\rho') \times \Big[d^2 b^\ell_{nn'} h^2_{\ell n'}(\rho) + t^{m\ell}_{nn'} h^3_{\ell n'}(\rho)\Big]\Big[d^2 b^\ell_{nn''} h^2_{\ell n''}(\rho') + t^{m\ell}_{nn''} h^3_{\ell n''}(\rho')\Big] , \qquad (55)$$

$$\langle f_2|\Delta^{-1}|f_1\rangle = \langle f_1|\Delta^{-1}|f_2\rangle = \int_0^\infty d\rho \int_0^\infty d\rho' \sum_{\ell=1}^{N_1} \sum_{n,n',n''=1}^{\ell} \sum_{m=1}^{2} g_\ell(\rho,\rho') \times h^1_{\ell n'}(\rho)\, t^{m\ell}_{nn'} \cdot \Big[d^2 b^\ell_{nn''} h^2_{\ell n''}(\rho') + t^{m\ell}_{nn''} h^3_{\ell n''}(\rho')\Big] . \qquad (56)$$

$h^{1,2,3}_{\ell n}(\rho)$ являются интегралами вида

$$h^1_{\ell n}(\rho) = \rho^2 \int_0^1 d\cos\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi\; \varphi_{\ell n}(\theta,\varphi)\cdot \Phi_3(x,y)\cos\theta , \qquad (57)$$

$$h^2_{\ell n}(\rho) = \rho \int_0^1 d\cos\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi\; \varphi_{\ell n}(\theta,\varphi)\cdot \Phi_3(x,y)\, e^{-d\rho\cos\theta} , \qquad (58)$$

$$h^3_{\ell n}(\rho) = \rho \int_0^1 d\cos\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi\; \varphi_{\ell n}(\theta,\varphi)\cdot \Phi_3(x,y)\big(1-e^{-d\rho\cos\theta}\big) . \qquad (59)$$

$\Phi_3(x,y)$ в координатах ρ, θ, φ записывается так:

$$\Phi_3(x,y) = \sum_{i=1}^{\tilde M} \tilde c_i\, \eta_i(\varphi)\, e^{-\tilde\alpha_i \rho\sin\theta} \cdot \big(1-e^{-\tilde\alpha_i\rho\sin\theta}\big)^{\tilde n_i} + A \sum_{i=1}^{\tilde{\tilde M}} \tilde{\tilde c}_i\, e^{-\tilde{\tilde\alpha}_i\rho\sin\theta\cos\varphi}\big(1-e^{-\tilde{\tilde\alpha}_i\rho\sin\theta\cos\varphi}\big) \times e^{-\varkappa\rho\sin\theta\sin\varphi}\big(1-e^{-2\varkappa\rho\sin\theta\sin\varphi}\big)\left[1+\frac{(\varphi-\alpha_1)\sqrt{\rho\sin\theta}}{\sqrt{\gamma^2+(\varphi-\alpha_1)^2\rho\sin\theta}}\right] . \qquad (60)$$

Величины $\tilde{\tilde M}$, $\tilde{\tilde c}_i$, $\tilde{\tilde\alpha}_i$ вычисляются при решении задачи двух тел, а остальные параметры из задачи трех тел. Для рассматриваемого нами случая значение выражений в формуле (43) следующее:

$$\langle\varphi_i|W|\varphi_j\rangle = \int_0^\infty d\rho\, \Phi_j(\rho)\,\Phi_i(\rho)\Big[v^{n_i}_{\ell_i\ell_j}(\rho)\big(\delta_{n_in_j} + L^{m_im_j}_{n_in_j}(\ell_j)\big) - \kappa^2\delta_{\ell_i\ell_j}\,\delta_{n_in_j}\Big] , \qquad (61)$$

$$\langle\varphi_i|\Delta_1|\varphi_j\rangle = -\delta_{\ell_i\ell_j}\,\delta_{n_in_j}\int_0^\infty d\rho\Big[\frac{\partial\Phi_i}{\partial\rho}\,\frac{\partial\Phi_j}{\partial\rho} + \frac{2(\ell+1)(2\ell+1)}{\rho^2}\Phi_i(\rho)\,\Phi_j(\rho)\Big] . \qquad (62)$$

4. Результаты расчета на ЭВМ и некоторые выводы

В нижеприведенной таблице содержатся результаты расчета на ЭВМ БЭСМ-6 в мониторной системе "Дубна" по фортран-программе для $M=2$ (две пробные функции вида (40), в формуле (45)-параметр приближения $N=1$ для нашего расчета). Другие параметры следующие:

$$i,j=1,2;\quad \ell_i=\ell_j=n_i=n_j=m_i=m_j=1;\quad 0{,}1\le\alpha_i\le 2{,}0.$$

<u>Таблица</u>

Значение параметров a_1	a_2	Вычисленная по программе длина рассеяния $a_{(4)}$ (фм)	Значение функционала оценки F_1
0,II	I,00	-6,27	0,52
0,I2	0,70	-5,52	0,0I8
0,I3	0,60	-5,88	0,0006
0,I3	0,80	-5,80	0,054

Полученные результаты по длине (I+3)-рассеяния свидетельствуют о том, что предложенная схема аппроксимации дифференциального оператора уже в низших приближениях позволяет получить вполне приемлемые значения функционалов (4I) и (42). Следующим этапом исследования должен стать переход к парным потенциалам, содержащим отталкивание на малых расстояниях.

Авторы выражают благодарность Г.А.Ососкову за инициирование их совместной работы, профессору Н.Н.Говоруну за предоставленную возможность работы по данной тематике, профессору Е.П.Жидкову и И.В.Пузынину за полезные обсуждения на семинарах ОВМ ЛВТА, Н.Ю.Шириковой за помощь при составлении программы на языке Фортран и коллективу операторов, инженеров и математиков за четкое обслуживание при отладке и счете на ЭВМ БЭСМ-6.

Литература

1. Merkuriev S.P.,Yakovlev A.L.,Gignoux G. Nucl. Phys. A , 431(1984), 125-138.
2. Варшалович Д.А., Москалев А.И., Херсонский В.К. Квантовые теории углового момента. "Наука", Ленинград, 1975.
3. Belyaev V.B.,Kartavtsev O.I. Journ. of Comp. Phys., v.59(1985), 493.
4. Belyaev V.B. et al. Proceedings of the X Evropean Simposium on the dynamics of few-body sistems, 3-7 June, 1985, Balatonfüred, pp.152-153
5. Merkuriev S.P., Gignoux G., Laverne A. Ann.Phys., 1976,99,p.30.
6. Беляев В.Б., Картавцев О.И. ОИЯИ, Р4-84-28, Дубна, 1984.
7. Беляев В.Б., Картавцев О.И., Кочкин В.И. ОИЯИ, Р4-84-793, Дубна, 1984.
8. Беляев В.Б., Картавцев О.И., Кочкин В.И. ОИЯИ, Р4-85-816, Дубна, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 августа 1986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Беляев В.Б., Картавцев О.И., Кочкин В.И. Р4-86-573

Решение дифференциальных уравнений Фаддеева-Якубовского методом конечномерной аппроксимации для четырех бесспиновых частиц в задаче (1 + 3)-рассеяния

Методом конечномерной аппроксимации дифференциального оператора в уравнениях Якубовского решается задача нахождения длины (1 + 3)-рассеяния для 4 бесспиновых частиц. В расчетах используется парный потенциал гауссовского типа. Найдено значение длины рассеяния $a_{(4)} = -5{,}88$ фм.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Belyaev V.B., Kartavtsev O.I., Kochkin V.I. P4-86-573

Solution of Faddeev-Yakubovsky Differential Equation by the Finite-Dimensional Approximation Method for Four Spinless Particles in the 1 + 3 Scattering Problem

By means of the method of finite-dimensional approximation of the differential operator in Yakubovsky equations the problem of determining the length of 1 + 3 scattering for four spinless particles is investigated. The pair potential of the Gaussian type was applied in the calculations. The scattering length has been found to be $a_{(4)} = -5.88$ Fm.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986