

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P4-86-554

Б.Н.Захарьев

ТРЕХЧАСТИЧНАЯ  
ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЙЯНИЯ

Направлено в журнал "Few-Body Systems" и в Оргкомитет Международного совещания по обратным задачам, Франция, декабрь 1986 г.

1986

## I. Введение

Успехи квантовой обратной задачи были до сих пор в основном связаны с одномерным движением частицы во внешнем поле /1/ радиальным относительным движением двух частиц, взаимодействующих с помощью сферически-симметричных потенциалов /. Тенденция последнего времени состоит в переходе к более сложным системам: многомерным /2/, многоканальным /3/, с нелокальными взаимодействиями /3,4/ Первые шаги были сделаны и в многочастичной обратной задаче. Так, в случае гиперсферически-симметричных сил, когда разделяются переменные в уравнении Шредингера, обычные методы восстановления потенциалов применимы к гиперрадиальному движению /3/. К системам с запрещенным перераспределением частиц возможен многоканальный подход /3/. Сочетание адиабатического разложения / метод Борна-Опшнгойма / с использованием искаженных парными силами гиперсферических базисных функций позволило рассмотреть более общий случай реакций подхвата и выбивания /5/.

Чтобы в многочастичных задачах можно было применить технику, развитую для восстановления одномерных потенциалов или матриц взаимодействия, нужно оподить уравнения движения к обыкновенным дифференциальным уравнениям с локальными членами взаимодействия. Самой же распространённой метод описания систем с  $n \geq 3$  телами - с помощью интегрированных уравнений Фаддеевского типа, то есть с эффективной локальностью взаимодействия, связывающего каналы с разным составом фрагментов. Один способ обойти трудности нелокальных связей был рассмотрен в предыдущей работе /5/, где все потенциалы, кроме искомого трехчастичных, включались в базисные функции, а запологие каналовых функций осуществлялось с помощью локальных матричных элементов от искомого трехчастичных  $V_{123}$ , восстанавливаемых по данным рассеяния, и известных матричных элементов оператора кинетической энергии гиперрадиального движения.

В данной работе предлагается новый метод решения задачи о реконструкции сил, действующих в системе трех тел, по амплитудам упругого и неупругого рассеяния, а также реакций с перераспределением частиц.

Для этого используется вариант единой теории реакций, который подробно описан в книге /6/ и оказался особенно удобным именно для обратных задач. Дело в том, что поиск волновой функции трех тел / а вместе с ней и потенциалов / кардинально упрощается, если вычесть из нее "лучи" асимптотик двухфрагментных каналов перераспределения, которые известны из двухчастичных решений с точностью до парциальных амплитуд, которые в обратной задаче задаются заранее как исходные параметры. Для коэффициентов разложения остатка волновой функции получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, как и требуется для обратной задачи. Правда, в отличие от уравнений для процессов без перераспределения частиц, здесь появляются неоднородные члены /известные источники - стоки/, обеспечивающие связь каналов с разным составом частиц. Это мешает написать соответствующие уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко. Тем не менее, оказывается, можно построить точные решения в замкнутой форме для систем уравнений, аппроксимирующих данную / с помощью матриц взаимодействия баргмановского типа /. Точно решаемые трехтельные модели интересны и сами по себе: до сих пор известно крайне мало таких примеров. В то же время они позволяют решить и обратную задачу подбором подходящих параметров баргмановских потенциальных матриц.

По потенциальным матрицам восстанавливаются исходные потенциалы. Из-за необходимости обрыва систем уравнений / ограничение конечным числом  $M$  членов в разложении волновой функции / приводит к появлению в потенциалах нелокальных добавочных членов, которые должны исчезать с увеличением точности решения:  $M \rightarrow \infty$ .

В разделе 2 кратко описан метод решения  $3^x$ -частичной обратной задачи с помощью адиабатического разложения /5/; в разделе 3 обсуждается многоканальная обратная задача для модельной системы трех тел без перераспределения частиц. В четвертом разделе излагается метод обратной задачи с усечением асимптотик волновой функции, отвечающих фрагментам системы с разным составом частиц.

Почти все принципиальные вопросы восстановления трехчастичных сил могут быть рассмотрены на примере простейшей трехчастичной системы: двух одномерных частиц, двигающихся во внешнем поле третьей, зафиксированной в начале координат.

### 2. Обратная трехчастичная задача в подходе Мачека

В 1968г. практически одновременно были опубликованы методы описания реакций с перераспределением частиц, сводящиеся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений /7,8/. Почти через двадцать лет оба подхода оказались удобной основой для определения потенциалов по данным рассеяния. В этом разделе мы используем метод Мачека /7/ см. также /9/.

**Базисные функции.** Пусть частица 1 налетает на мишень, представляющую собой потенциальную яму вблизи начала координат со связанной в ней частицей 2 - см. рис.1. Обе частицы совершают одномерное движение

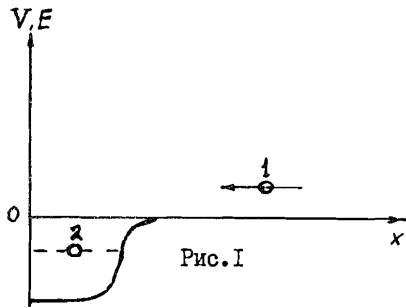


Рис.1

Частица 1 налетает на мишень, представляющую собой частицу 2, связанную с третьей, находящейся в начале координат.

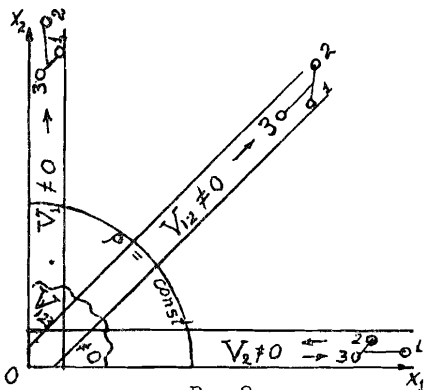


Рис.2

Двумерное конфигурационное пространство одномерного движения двух частиц во внешнем поле третьей, помещенной в начале координат. Области двухчастичного взаимодействия уходят на бесконечность. Трехчастичные силы действуют в области ограниченного радиуса /волнистая линия/. Дуга окружности отвечает постоянному гиперрадиусу  $\rho$ .

$\alpha = \arctg\left(\frac{x_2\sqrt{m_2}}{x_1\sqrt{m_1}}\right)$  переходят при больших значениях гиперрадиуса в полосах разных каналов в соответствующие координаты Якоби.

вдоль полуоси  $x \geq 0$ . Чтобы лучше представить себе взаимодействия в выбранной системе, рассмотрим конфигурационное пространство двух частиц во внешнем поле, представленное на рис. 2. Двухчастичные потенциалы  $V_1, V_2, V_{12}$  отличны от нуля вдоль полос, расходящихся лучами из области вблизи начала координат двумерной плоскости  $x_1, x_2$ .

Если энергетическую ось провести перпендикулярно листу бумаги, то можно представить себе потенциальные желоба-каналы на месте указанных полос. Поперечные сечения этих желобов имеют форму потенциалов  $V_1, V_2, V_{12}$ . Область, где отличен от нуля трехчастичный потенциал, обозначена на рис.2 условной волнистой линией. Предполагается, что  $V_{123}$  имеет конечный радиус действия: стоит одной из частиц удалиться от других, как  $V_{123}$  обращается в нуль. В системе возможны реакции с перераспределением частиц: выбивание частицы 2 с захватом частицы 1 ямой, подхват с вылетом квазидейтона /1,2/. Сложность описания этих реакций состоит в том, что асимптотические условия для каналов с разным составом фрагментов формулируются на языке разных координат Якоби, схематически изображенных в конце полос-желобов.

но замечательно, что гиперсферические координаты:  $\rho = \sqrt{x_1^2 \frac{m_1}{m} + x_2^2 \frac{m_2}{m}}$  и

Разделим движение в системе на два типа: по дуге с фиксированным значением гиперрадиуса  $\rho$  / см. рис.2 / и гиперрадиальное. Разложим полную функцию  $\Psi(x_1, x_2) = \Psi(\rho, \alpha)$  в ряд по базисным функциям  $\Phi_s(\alpha, \rho)$ , описывающим движение по дуге  $\rho = const$  с учетом двухчастичных потенциалов, желоба которых пересекаются дугой:

$$\Psi(\rho, \alpha) = \sum_s \frac{f_s(\rho)}{\rho^{1/2}} \Phi_s(\alpha, \rho), \quad (11)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \frac{d^2}{d\alpha^2} \Phi_s(\alpha, \rho) + [V_1(\alpha, \rho) + V_2(\alpha, \rho) + V_{12}(\alpha, \rho)] \Phi_s(\alpha, \rho) = E_s(\rho) \Phi_s(\alpha, \rho). \quad (12)$$

Коэффициенты  $f_s(\rho)$  представляют собой каналовые функции, описывающие гиперрадиальное движение, переходящее при больших  $\rho$  в движение соответствующих двухфрагментных каналов  $s$ . Разложение /1/- это комбинация метода Борна-Оппенгеймера / адиабатическое разложение/, использующего слабую возбудимость высших состояний гиперуглового движения, и метода К-гармоник. В противоположность последнему, базисные функции  $\Phi_s(\alpha, \rho)$  отвечают не свободному гиперугловому движению, а возмущенному парными силами /  $V_1, V_2, V_{12}$  /. Обычные К-гармоники не способны описать асимптотическое  $\alpha$ -поведение  $\Psi(\rho, \alpha)$ : требуется бесконечное число гармоник, чтобы представить функцию пары частиц в связанном состоянии при  $\rho \rightarrow \infty$  с ее бесконечной угловой скоростью изменения из-за исчезающе малого угла, под которым видна пара на большом расстоянии. В то же время единственная базисная функция  $\Phi_s(\alpha, \rho)$ , учитывающая двухчастичные потенциальные ямы, переходит в соответствующее связанное состояние пары при  $\rho \rightarrow \infty$ . Чтобы пояснить это, рассмотрим профиль сечения потенциалов  $V_1, V_2, V_{12}$  вдоль дуги  $\rho = const$  на рис.3 в частном случае потенциальных ям прямоугольной формы.

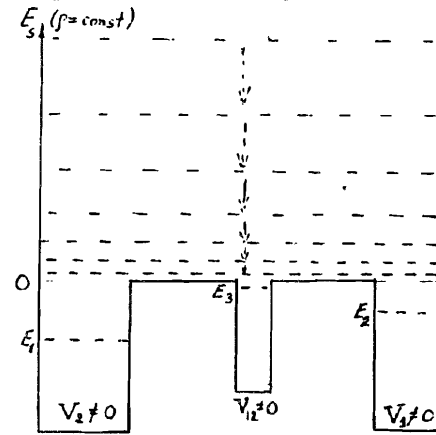


Рис.3

Рельеф дна потенциальной "ямы" вдоль дуги  $\rho = const$ . Трехчастичный потенциал, не учитываемый в  $\Phi_s(\alpha, \rho)$ , не показан. С ростом  $\rho$  двухчастичные ямки расходятся друг от друга, а уровни в них переходят в энергии связанных состояний пар. Уровни же "максимум" с увеличением ее ширины  $\rho/2$  опускаются, сходясь к  $E=0$ , как помечено стрелками. На рис. показан частный случай, когда в парных ямках имеется лишь по одному уровню. Существенно, что состояния с  $E > 0$ , отвечающие развалу системы на три частицы, дискретны, что способствует сходимости разложения /1/.

Угловое движение аналогично осцилляциям в бесконечно-глубокой потенциальной яме с шириной  $\rho\sqrt{2}$ , на дне которой имеются "мини-ямки" парных потенциалов. С ростом  $\rho$  увеличивается длина дуги, мини-ямки удаляются друг от друга, при этом ослабляется взаимное влияние уровней связанных состояний в разных ямках. Уровни выше  $E=0$ , отвечающие развалу на три фрагмента, в отличие от парных энергий  $E<0$ , не стабилизируются с  $\rho \rightarrow \infty$ . Дискретная параметризация гиперуглового распределения трех частиц - преимущество гиперсферических координат, что является обобщением свойства сферических функций  $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$  описывать непрерывное угловое распределение продуктов двухфрагментных реакций набором состояний с целыми квантовыми числами  $\ell, m$ .

**Система многоканальных уравнений.** Подставляя разложение /1/ в уравнение Шредингера для всей системы и интегрируя его по  $\alpha$  с весом различных базисных функций, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для канальных функций  $F_s(\rho)$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\rho^2} F_s(\rho) + \sum_{s'} \hat{\Lambda}_{ss'}^{(1)}(\rho) F_{s'}(\rho) + \sum_{s'} V_{ss'}^{(3)}(\rho) F_{s'}(\rho) + (E_s(\rho) + \frac{1}{4\rho^2}) F_s(\rho) = E F_s(\rho) \quad /3/$$

где  $\hat{\Lambda}_{ss'}^{(1)}(\rho) = \Lambda_{ss'}^{(1)}(\rho) + \Lambda_{ss'}^{(2)}(\rho) \frac{d}{d\rho} = -\int \Phi_s(\alpha, \rho) \frac{d^2}{d\alpha^2} \Phi_{s'}(\alpha, \rho) d\alpha - \int \Phi_s(\alpha, \rho) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\alpha} \Phi_{s'}(\alpha, \rho) \frac{1}{\rho} d\alpha$

$$V_{ss'}^{(3)}(\rho) = \int \Phi_s(\alpha, \rho) V_{123}(\alpha, \rho) \Phi_{s'}(\alpha, \rho) d\alpha \quad /4/$$

Асимптотические условия на  $F_s(\rho)$  формулируются в соответствии с тем, какому физическому состоянию системы отвечает базисная функция с данным значением квантового числа  $s$ : должным образом нормированная падающая волна во входном канале и отсутствие падающих волн в других. Нетрудно убедиться, что использованные гиперсферические координаты устроены так, что в уравнениях /1,2/ при  $\rho \rightarrow \infty$  появляются приведенные массовые множители, отвечающие именно тем координатам Якоби, в которые в данном канале переходят  $\rho, \alpha : (R = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2))$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} \right\} \rightarrow \frac{\hbar^2}{2} \left\{ \frac{1}{m_1} \frac{d^2}{dx_1^2} \quad n \text{ пч} ; \frac{1}{m_2} \frac{d^2}{dx_2^2} \quad n \text{ пч} ; \frac{1}{m_1+m_2} \frac{d^2}{dR^2} \quad n \text{ пч} \right\}$$

$$\frac{d^2}{\rho^2 d\alpha^2} \rightarrow \frac{1}{m_2} \frac{d^2}{dx_2^2} \quad x_2 \text{ конечн.} ; \frac{1}{m_1} \frac{d^2}{dx_1^2} \quad x_1 \text{ конечн.} ; \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} \frac{d^2}{d(x_1 x_2)} \quad \text{Коксан}$$

Функции  $E_s(\rho)$  играют в /3/ роль потенциальных термов, возрастающих с уменьшением  $\rho$  и препятствующих при малых энергиях связи двухфрагментных каналов с каналами трехчастичного развала.

**Решение обратной задачи.** Уравнений типа Гельфанда-Левитана-Марченко, отвечающих системе /3/, еще никто не писал, но можно приближенно восстановить матрицу трехчастичного взаимодействия в модифицированном подходе Гушира-Разави<sup>[5]</sup>. Преобразуем канальные функции с помощью некоторой известной функции  $f_s(\rho, E) : F_s(\rho) = f_s(\rho, E) \chi_s(\rho)$ ,

которая специально выбирается так, чтобы в нужный момент обращать в нуль коэффициент в конечно-разностном приближении к уравнению /3/ при неизвестных значениях функции, которые мешают определять потенциальную матрицу / убрав лишние неизвестные, мы добиваемся соответствия числа искомых параметров числу имеющихся алгебраических уравнений/.

Для функций  $\chi$  получаем систему уравнений, равносильных /3/:

$$-f_s(\rho) \chi_s''(\rho) - 2f_s'(\rho) \chi_s'(\rho) - f_s''(\rho) \chi_s(\rho) + \sum_{s'} \left[ \Lambda_{ss'}^{(1)} f_{s'} \chi_{s'} + \Lambda_{ss'}^{(2)} (f_{s'}' \chi_{s'} + f_{s'} \chi_{s'}') \right] + \sum_{s'} V_{ss'}^{(3)}(\rho) f_{s'}(\rho) \chi_{s'}(\rho) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E_s(\rho) - \frac{1}{4\rho^2} \right] \chi_s(\rho) f_s(\rho) = 0 \quad /5/$$

и их конечно-разностный аналог ( $\rho = n\Delta$ ):

$$\chi_s(n+1) \left[ -f_s'(n) - f_s(n)/\Delta \right] / \Delta + \sum_{s'} \Lambda_{ss'}^{(2)}(n) f_{s'}(n) \chi_{s'}(n) / \Delta + \chi_{s'}(n-1) \left[ f_s' - f_s(n)/\Delta \right] / \Delta + \chi_s(n) \left[ -f_s''(n) + 2f_s'(n)/\Delta + \frac{2m}{\hbar^2} (E_s(n) - \frac{1}{4\Delta^2 n^2}) f_s(n) \right] + \sum_{s'} \Lambda_{ss'}^{(1)}(n) f_{s'}(n) \chi_{s'}(n) + \sum_{s'} \Lambda_{ss'}^{(2)}(n) \left[ f_{s'}'(n) - f_{s'}(n)/\Delta \right] \chi_{s'}(n) + \sum_{s'} V_{ss'}^{(3)}(n) f_{s'}(n) \chi_{s'}(n) = 0 \quad /6/$$

Здесь для разностных производных первого порядка для  $\chi_s'$  использовалось симметричное выражение  $\chi_s(\rho) \sim [\chi_s(n+1) - \chi_s(n-1)] / 2\Delta$ , а для  $\chi_{s'}' / f_s$  под знаком суммы - обычное выражение  $[\chi_s(n+1) - \chi_s(n)] / \Delta$ .

Выберем некоторое значение энергии  $E$ . Стартуя от известных значений матрицы решений  $\|\Phi(n)\|$  при  $n \geq N$  / асимптотика функций в обратной задаче находится по данной матрице рассеяния /, выразим из /6/ значения потенциальной матрицы в последней точке  $n=N$ , где они предполагаются отличными от нуля / хотя бы часть матричных элементов может быть  $\neq 0$  /. А чтобы в выражения для  $V_{ss'}^{(3)}(N)$  не вошли неизвестные еще  $\chi_s(N-1)$ , потребуем, чтобы коэффициенты при них были равны нулю:

$$f_s'(N, E^{(1)}) - f_s(N, E^{(1)}) / \Delta = 0.$$

Этого можно добиться, используя произвол в выборе функции  $f_s(\rho, E^{(1)})$ . Затем для другого значения энергии  $E$  найдем  $V_{ss'}^{(3)}(N)$  в следующей точке  $N-1$ , опираясь на известные уже  $V_{ss'}^{(3)}(N)$ . Для этого нужно обратить в нуль коэффициенты при  $\chi_s(N-2)$  с помощью функции  $f_s(\rho, E^{(2)})$  при новом фиксированном значении энергии  $E^{(2)}$ . Повторяя подобную процедуру, мы пройдем весь интервал взаимодействия, где  $V_{ss'}^{(3)}(n) \neq 0$ , решив тем самым обратную задачу в конечно-разностном приближении.

В качестве одного из возможных способов задания функции  $f_s(n, E^{(p)})$  можно предложить, например  $f_s(n, E^{(p)}) = 2$  при  $n > N - \rho$ ;  $= 1$  при  $n \leq N - \rho$ . Значения энергий  $E^{(p)}$  должны быть не слишком близки друг к другу. Конкретный выбор  $E^{(p)}$  и вида функции  $f_s(n, E)$  может быть уточнен при численных расчетах модельных задач.

3. Модель системы трех тел без перераспределения частиц. Базис-дискретный набор собственных функций мишени.

Пусть теперь частица 2 находится в бесконечно-глубокой потенциальной яме частицы 3, фиксированной в начале координат, так что частица 1 не в состоянии вырвать 2 из мишени. Возможно лишь возбуждение / реальное или виртуальное пары 2,3 /. Выберем в качестве базиса для разложения полной функции системы чисто дискретный набор связанных состояний мишени  $\Phi_\alpha(x)$ :

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_\alpha F_\alpha(x_1) \Phi_\alpha(x_2), \quad /7/$$

где

$$-\frac{\hbar^2}{2m_2} \Phi_\alpha''(x_2) + V_2(x_2) \Phi_\alpha(x_2) = \epsilon_\alpha \Phi_\alpha(x_2). \quad /8/$$

Для каналовых функций  $F_\alpha(x)$ , описывающих движение частицы 1 в поле мишени, находящейся в состоянии  $\alpha$ , имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} F_\alpha''(x_1) + V_1(x_1) + \sum_{\alpha'} V_{\alpha\alpha'}(x_1) F_{\alpha'}(x_1) = (E - \epsilon_\alpha) F_\alpha(x_1), \quad /9/$$

где

$$V_{\alpha\alpha'}(x_1) = \int_0^\infty \Phi_\alpha(x_2) [V_{12}(x_2 - x_1) + V_{13}(x_1, x_2)] \Phi_{\alpha'}(x_2) dx_2. \quad /10/$$

Асимптотическое поведение физических решений системы /9/ определяется матрицей рассеяния  $S_{\alpha\alpha'}$ . По ней может быть восстановлена матрица взаимодействия  $V_{\alpha\alpha'}$  с помощью многоканальных методов обратной задачи /10/. Затем по матричным элементам находим потенциал - см. /3/ /6.51-6.53/, который в общем случае является нелокальным по  $x_2$

$$V(x_1, x_2, x_2') = \sum_{\alpha\alpha'} \Phi_\alpha(x_2) V_{\alpha\alpha'}(x_1) \Phi_{\alpha'}(x_2'). \quad /11/$$

Дело в том, что в реальных расчетах приходится ограничиваться конечным числом членов в разложении /7/, в результате чего система /9/ сводится к  $M$  связанным уравнениям, т.е. в приближенной обратной задаче восстанавливается матрица взаимодействия  $M \times M$ , а остальные ее элементы полагаются равными нулю. Это нарушает жесткие связи, накладываемые локальностью потенциала на его матричные элементы:

$$V_{\alpha\alpha'}(x_1) = \sum_{\beta\beta'} \int_0^\infty \Phi_\alpha(x_2) \Phi_{\beta'}(x_2) \Phi_{\alpha'}(x_2) dx_2 \cdot V_{\beta\beta'}(x_1) \cdot \int_0^\infty \Phi_{\beta'}(x_2') dx_2'. \quad /12/$$

Но при  $M \rightarrow \infty$  нелокальный потенциал /II/ стремится к исходному ло-

$$\text{кальному } V(x_1, x_2) = \sum_{\alpha\beta} \Phi_\alpha(x_2) V_{\alpha\beta}(x_1) \int_0^\infty \Phi_\beta(x_2') dx_2' \quad /13/$$

Среди потенциалов /II/ имеется широкий класс нелокальных по  $x_2$  потенциалов баргмановского типа, допускающих точные решения системы /9/. Если собственные функции мишени тоже имеют замкнутый аналитический вид, то мы получаем точно решаемые трехчастичные модели. Выбирая ядро  $Q_{\alpha\beta}(x_1, x_1')$  уравнения Гельфанда-Левитана в сепарабилизированном по координатам и индексам каналов виде

$$Q_{\alpha\beta}(x_1, x_1') = \sum_\lambda \mathring{F}_{\alpha\alpha}(x_1, \underline{x}_\lambda) \Gamma_\alpha^\lambda \Gamma_\beta^\lambda \mathring{F}_{\beta\beta}(x_1', \underline{x}_\lambda), \quad /14/$$

где  $\Gamma_\alpha^\lambda = \text{const}$ ,  $\mathring{F}$  - решения /9/ с  $V_{\alpha\alpha} = 0$ ,  $\underline{x}_\lambda$  - диагональная матрица комплексных волновых чисел, а  $\lambda$  пробегает и все вырожденные состояния, имеем для ядра оператора обобщенного сдвига  $\mathring{F} \rightarrow F$ :

$$K_{\alpha\beta}(x_1, x_1') = - \sum_{\lambda\lambda'} F_{\alpha\alpha'}(x_1, \underline{x}_\lambda) \Gamma_\alpha^\lambda \Gamma_\beta^\lambda \mathring{F}_{\beta\beta'}(x_1', \underline{x}_\lambda). \quad /15/$$

Для каналовых функций получаем выражение ( $a, b = x, \infty$  или  $0, x$ ).

$$F_{\alpha\alpha'}(x_1, k) = \mathring{F}_{\alpha\alpha'}(x_1, k) \delta_{\alpha\alpha'} - \sum_{\lambda\lambda'} \mathring{F}_{\alpha\alpha}(x_1, \underline{x}_\lambda) \Gamma_\alpha^\lambda P_{\lambda\lambda'}(x_1) \int_a^b \mathring{F}_{\beta\beta'}(t, \underline{x}_\lambda) \Gamma_{\beta'}^{\lambda'} dt. \quad /16/$$

где  $\|F_{\alpha\alpha'}\|$  - матрица регулярных /при  $a, b = 0, x$ / или Йостовских /при  $a, b = \infty$ ) решений,

$$P_{\lambda\lambda'}(x_1) = \delta_{\lambda\lambda'} + \sum_{\lambda''} \int_a^b \mathring{F}_{\beta\beta''}(x_1, \underline{x}_\lambda) \Gamma_{\beta''}^{\lambda''} \Gamma_{\lambda''}^{\lambda'} F_{\lambda''\lambda'}^*(x_1, \underline{x}_\lambda) dx_1,$$

а матрица взаимодействия  $V_{\alpha\alpha'}(x)$  выражается через диагональную часть  $K$ , которую находим из /15/ с  $F_{\alpha\alpha}(x, \underline{x})$  из /16/

$$V_{\alpha\alpha'}^B(x) = + \frac{d}{dx} K_{\alpha\alpha'}(x, x_1). \quad /17/$$

Из /16/ находим функцию Йоста, определяющую матрицу рассеяния  $S_{\alpha\alpha'}^B(k)$ . Точно решаемые модели интересны не только сами по себе, но и как удобный способ решать обратную задачу. Подбирая параметры модельной матрицы рассеяния, чтобы добиться возможно лучшего совпадения с  $S_{\alpha\alpha'}^B(k)$  для искомого взаимодействия  $V_{\alpha\alpha'}(x)$ , мы тем самым получаем для него приближенное выражение /17/. Модельной матрице /17/ отвечает нелокальный потенциал /II/ или приближенный локальный /13/. Кстати, если есть не-

обходимость, можно определить двухчастичные потенциалы  $V_I, V_{I2}$  по данным рассеяния в рассматриваемой трехчастичной модели. Но, как правило, двухчастичные силы естественнее определять из данных рассеяния в системе двух тел, а всю мощь задачи трех тел направлять на восстановление  $V_{I23}$ .

#### 4. Обратная задача трех тел в методе выделения асимптотик

Вернемся к рассмотрению системы двух частиц во внешнем поле, обсуждавшейся в разделе 2 и изображенной на рис. 1 и рис. 2.

Выделим из волновой функции всей системы  $\Psi(x_1, x_2)$  асимптотики каналов с перераспределением частиц / пусть энергия ниже порога развала /

$$\Psi(x_1, x_2) = X(x_1, x_2) - \Phi_{ac}^{\bar{I}}(x_1, x_2) - \Phi_{ac}^{\bar{II}}(x_1, x_2), \quad /18/$$

где  $\Phi_{ac}^{\bar{I}}, \Phi_{ac}^{\bar{II}}$  имеют вид  $/6/ (k_1^2 = (E - \epsilon_{\beta})^2 / 2(m_1 + m_2) / \hbar^2; k_2^2 = (E - \epsilon_{\gamma})^2 / 2m_2 / \hbar^2)$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{ac}^{\bar{I}}(x_1, x_2) &= \sum_{\beta} \int_{\beta \alpha_0} e^{i k_{\beta} (x_1, m_1 + x_2, m_2) / 2(m_1 + m_2)} (1 - e^{-a(m_1 + m_2, x_1)}) \Phi_{\beta}(x_1, x_2); \quad \Phi_{\beta}'' = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_2 - \epsilon_{\beta}') \Phi_{\beta}; \\ \Phi_{ac}^{\bar{II}}(x_1, x_2) &= \sum_{\gamma} \int_{\gamma \alpha_0} e^{i k_{\gamma} x_2} (1 - e^{-a x_2}) \Phi_{\gamma}(x_1); \quad \Phi_{\gamma}''(x_1) = \frac{2m_1}{\hbar^2} (V_1 - \epsilon_{\gamma}) \Phi_{\gamma}(x_1). \end{aligned} \quad /19/$$

В отличие от прямой задачи  $/6/$ , в обратной задаче эти асимптотики полностью известны, поскольку амплитуды рассеяния входят в набор исходных данных.

В качестве базисных функций возьмем какой-либо набор квадратично интегрируемых функций  $\tilde{\Phi}_{\alpha}$  от  $x_2$ . Разложим по ним остаток волновой функции после выделения части асимптотик

$$X(x_1, x_2) = \sum_{\alpha} F_{\alpha}(x_1) \tilde{\Phi}_{\alpha}(x_2). \quad /20/$$

Для коэффициентов разложения получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с источниками

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} F_{\alpha \alpha_0}'(x_1) + \sum_{\alpha'} V_{\alpha \alpha'}(x_1) F_{\alpha' \alpha_0}(x_1) - (E - V_1(x_1) - \epsilon_{\alpha}) F_{\alpha \alpha_0}(x_1) = \sum_{\beta} \int_{\beta \alpha_0} j_{\beta}^{(\omega)} + \sum_{\gamma} \int_{\gamma \alpha_0} j_{\gamma}^{(\omega)}(x_1) \quad /21/$$

$$V_{\alpha \alpha'}(x_1) = \int_0^{\infty} \tilde{\Phi}_{\alpha}(x_2) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{d^2}{dx_2^2} + V_2(x_2) + V_{12}(x_1, x_2) \right] \tilde{\Phi}_{\alpha'}(x_2) dx_2,$$

$$\text{где } \int_{\beta \alpha_0} j_{\beta}^{(\omega)}(x_1) = \int_0^{\infty} \tilde{\Phi}_{\alpha}(x_2) \left[ \frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \frac{\partial^2}{\partial R^2} + E - \epsilon_{\beta} - V_1 - V_2 \right] e^{i k_{\beta} R} (1 - e^{-a R}) \Phi_{\beta}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\int_{\gamma \alpha_0} j_{\gamma}^{(\omega)}(x_1) = \int_0^{\infty} \tilde{\Phi}_{\alpha}(x_2) \left[ \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + E - \epsilon_{\gamma} - V_1 - V_2 \right] e^{i k_{\gamma} x_2} (1 - e^{-a x_2}) \Phi_{\gamma}(x_1) dx_2. \quad /22/$$

Будем предполагать, что базисные функции, учитываемые в разложении  $/20/ \tilde{\Phi}_{\alpha \in M}(x_2)$ , существенно отличны от нуля лишь в области, где сосредоточены волновые функции связанных состояний частицы 2 в яме.

При больших  $x_1$  источники в уравнениях  $/21/$  исчезают, благодаря экспоненциально слабому перекрытию каналов с разным составом фрагментов / см. рис. 2/, а матрица взаимодействия, зацепляющая отдельные уравнения в  $/21/$ , хотя и не обращается в нуль, но стремится к своему постоянному предельному значению

$$V_{\alpha \alpha'}(x_1) \xrightarrow{x_1 \rightarrow \infty} V_{\alpha \alpha'}^{\infty} = \int_0^{\infty} \tilde{\Phi}_{\alpha}(x_2) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{d^2}{dx_2^2} + V_2 \right] \tilde{\Phi}_{\alpha'}(x_2) dx_2 / 23/$$

так что  $/21/$  переходит при  $x_1 \rightarrow \infty$  в систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, имеющую точные решения в замкнутой аналитической форме. Матрица  $V_{\alpha \alpha'}^{\infty}$ , полученная в задаче трех тел, является в то же время матрицей системы алгебраических уравнений на собственные значения пары частиц / частицы 2 в потенциальной яме внешнего поля в  $/6/$  см. стр. 105-109:

$$E_{\alpha} C_{\alpha \beta} + \sum_{\beta'} V_{\beta \beta'}^{\infty} C_{\alpha \beta'} = 0; \quad \Phi_{\alpha}(x_2) = \sum_{\beta} C_{\alpha \beta} \tilde{\Phi}_{\beta}(x_2). \quad /24/$$

Система уравнений  $/21/$  диагонализуется при больших  $x_1$  при преобразовании ее решений с помощью матрицы коэффициентов  $C_{\alpha \beta}$ , являющихся решениями  $/24/$ . Таким образом, линейные комбинации

$$F_{\alpha \alpha_0}(x_1) = \sum_{\beta} C_{\beta \alpha}^* \tilde{F}_{\beta \alpha_0}(x_1) \quad /25/$$

представляют собой функции каналов, соответствующих мишени в канале  $"\alpha"$  / частица 1 в поле частицы 2, сидящей в связанном состоянии  $\alpha$  в яме  $V_2$ /. На эти  $F_{\alpha \alpha_0}(x_1)$  / линейные комбинации из  $\tilde{F}_{\beta \alpha_0}$  / и следует накладывать физические граничные условия.

Уравнений обратной задачи типа уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко для системы  $/21/$  возможно, нельзя написать, но мы обойдем эту трудность, используя технику многоканальных баргмановских потенциальных матриц  $/3, 10/$ . Построим сначала точные решения для системы уравнений, являющихся приближением к однородной системе, получающейся из  $/21/$  отбрасыванием источников - неоднородных членов в правой части.

Построим сначала баргмановское приближение  $V_{\alpha \alpha'}(x_1)$  к матрице взаимодействия  $V_{\alpha \alpha'}(x_1)$ . Выпишем два линейно-независимых матричных решения соответствующей однородной системы уравнений  $\| \tilde{F}_{\alpha \alpha_0}^{(1)}(x_1) \|$  и  $\| \tilde{F}_{\alpha \alpha_0}^{(2)}(x_1) \|$ . С их помощью строим частное решение неоднородной системы с источниками

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\alpha \alpha_0}^{\text{частн.}}(x_1) &= \sum_{\alpha' \beta'} \tilde{F}_{\alpha \alpha_0}^{(1)}(x_1) \int_0^{\infty} \tilde{F}_{\alpha' \alpha_0}^{(2)}(x_1') S_{\beta \alpha_0}^{\alpha'} j_{\beta'}^{\alpha'}(x_1') dx_1' + \\ &+ \sum_{\alpha \gamma} \tilde{F}_{\alpha \alpha_0}^{(2)}(x_1) \int_{x_1}^{\infty} \tilde{F}_{\alpha' \alpha_0}^{(1)}(x_1') S_{\gamma \alpha_0}^{\alpha'} j_{\gamma'}^{\alpha'}(x_1') dx_1' \end{aligned} \quad /26/$$

и общее решение однородной системы с баргмановской матрицей взаимодействия  $V_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'}(x_1)$ :

$$\sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \tilde{F}_{\beta\alpha_c}^{\alpha}(x_1) + \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \tilde{F}_{\beta\alpha_c}^{\alpha(2)}(x_1). \quad /27/$$

Сумма /26/ и /27/ дает общее решение неоднородной системы, аппроксимирующей /21/:

$$\tilde{F}_{\alpha\alpha_c}^{\alpha}(x_1) = A_{\alpha\beta} \tilde{F}_{\beta\alpha_c}^{\alpha(1)}(x_1) + B_{\alpha\beta} \tilde{F}_{\beta\alpha_c}^{\alpha(2)}(x_1) + \tilde{F}_{\alpha\alpha_c}^{\alpha(4, \text{АСТН})}(x_1). \quad /28/$$

С помощью физических граничных условий фиксируем константы  $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}$  в линейной комбинации в /27/. В результате мы получили в компактном виде матрицу решений системы /21/ и соответствующую матрицу рассеяния в "баргмановском" приближении, выраженные через конечное число спектральных параметров. Эти параметры мы определяем, подгоняя полученную  $S^{\beta}$  - матрицу к известной  $S^{\alpha}$  - матрице системы, для которой нам нужно решить обратную задачу. Найденные параметры задают и потенциальную матрицу  $V_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'}(x_1)$ , по которой можно найти искомый трехчастичный потенциал, используя /11/ или /13/. То, что  $S_{\alpha\alpha'}^{\beta}$  и  $V_{\alpha\alpha'}^{\beta}$  в явном виде выражаются через одни и те же наборы параметров  $\{\alpha^{\lambda}, \Gamma_{\alpha}^{\lambda}\}$ , делает описанную процедуру решения обратной задачи намного экономнее, чем путем подгонки  $S_{\alpha\alpha'}$  многократным решением прямой трехчастичной задачи с варьируемым потенциалом  $V_{123}(x_1, x_2)$ .

## Приложение

### Элементарный метод решения многомерной обратной задачи в конечно-разностном приближении

Мы рассмотрели способ восстановления потенциала с помощью сведения многомерной / многочастичной / задачи к системе одномерных - обыкновенных дифференциальных уравнений. Покажем, как просто может быть решена многомерная обратная задача в конечно-разностном приближении непосредственно. Ограничимся, как и раньше, двумерным случаем. Нанесем разностную сетку на плоскость  $x_1, x_2$ . Пусть волновая функция известна нам вне некоторого прямоугольника, что соответствует заданной матрице рассеяния: восстановим потенциал  $V(x_1, x_2)$ , отличный от нуля в прямоугольнике  $(1, 1, M-1, N-1)$  вместе с его границей по значениям функции  $\psi(m, n)$  в узлах разностной сетки на ребрах прямоугольников

$(0, 0, M, N)$  и  $(1, 1, M-1, N-1)$ , - см. рис.4. В простейшем разностном / эйлеровском / приближении оператор кинетической энергии связывает значения волновой функции в пяти соседних точках, - уравнение Шредингера-Эйлера есть система алгебраических уравнений:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu\Delta^2} [\psi(m, n+1, E) + \psi(m, n-1, E) - 4\psi(m, n, E) + \psi(m, n, E) + \psi(m-1, n, E)] + V(m, n) \psi(m, n, E) = E \psi(m, n, E). \quad /29/$$

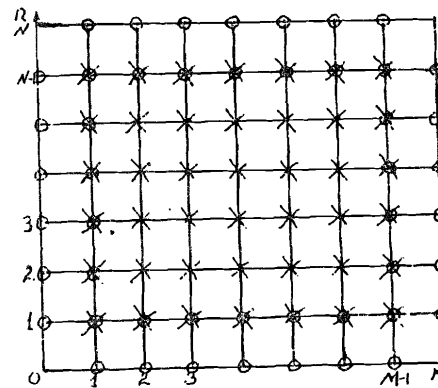


Рис. 4. По функциям в узлах сетки, помеченных кружками, определяется потенциал в узлах с крестиками.

Рассмотрим левый нижний угол области, изображенной на рис.4. В уравнении /29/ при  $m=1, n=1$  все входящие в него значения волновой функции  $\psi(0,1), \psi(1,0), \psi(1,1), \psi(2,1), \psi(1,2)$  известны из данных рассеяния по условиям обратной задачи. Поэтому из /29/ можно найти значения потенциала  $V(1,1)$  через эти значения функции. Потенциал в следующих двух точках  $V(2,1), V(1,2)$  вместе с двумя значениями функции / при двух энергиях  $\psi(2,2, E^{(1)}), \psi(2,2, E^{(2)})$  найдем из четырех алгебраических уравнений, получаемых из /29/ при  $(m, n, E) = \{(2, 1, E^{(1)}), (2, 1, E^{(2)}), (1, 2, E^{(1)}), (1, 2, E^{(2)})\}$ . Затем находим  $V(3,1), V(2,2)$

$V(1,3), \psi(2,3, E^{(1)}), \psi(3,2, E^{(1)}), \psi(2,3, E^{(2)}), \psi(3,2, E^{(2)}), \psi(2,3, E^{(3)}), \psi(3,2, E^{(3)})$  из девяти уравнений /29/ при  $(m, n, E) = \{(3, 1, E^{(1)}), (2, 2, E^{(1)}), (1, 3, E^{(1)}), i=1, 2, 3\}$  и т.д.

Решение двумерной обратной задачи можно проводить, начиная одновременно из четырех углов прямоугольной области.

## Литература

1. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. "Мир", М., 1980.
2. Фаддеев Л.Д. В кн.: Современные проблемы математики. Изд-во ВИНТИ М., 1974, т.3, с. 93.  
Newton R.G. J.Math.Phys. 1982, 23 (4), p. 594.

- Захарьев Б.Н., Функе Х. Краткие сообщения ОИЯИ №12-85. Дубна, 1985 с. 35; Препринт ОИЯИ, P4-86-442, Дубна, 1986.
3. Захарьев Б.Н., Сузько А.А. Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. Энергоатомиздат, М. 1985.
  4. Соколов С.Н. Препринт ИФВЭ ОТФ 79-139, Серпухов, 1979. Музафаров В.М. ТМФ, 1985, №2, с. 208.
  5. Захарьев Б.Н. Препринт ОИЯИ E4-86-99, Дубна, 1986.
  6. Жигунов В.П., Захарьев Б.Н. Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния. Атомиздат, М. 1974.
  7. Масек Н. J. Phys. VI, 1968, p. 841.
  8. Захарьев Б.Н., Пустовалов В.В., Эфрос В.Д. ЯФ, 1968, 8, с. 406. Ефименко Т.Г., Жигунов В.П., Захарьев Б.Н. Ann. Phys. 1968, 47, p. 275. См. подробное изложение в /6/.
  9. Матвеев А.В. J. Phys. 1985, VI8, p. 645. Виницкий С.И., Соловьев Е.А. J. Phys. 1985, VI8, p. 557.
  10. Захарьев Б.Н., Никишов П.Ю., Плеханов Е.Б. ЯФ, 1983, т.38, №1, с.95. Захарьев Б.Н., Плеханов Е.Б., Сузько А.А. Препринт ОИЯИ P2-80-568, Дубна 1980; Ann. der Phys. 1982, 39, p. 313; Препринт ИТМО АН БССР №7, Минск, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел  
13 августа 1986 года.

Захарьев Б.Н.

P4-86-554

Трехчастичная обратная задача рассеяния

Предлагается метод восстановления трех- /а при необходимости/ и двухчастичных потенциалов по данным рассеяния системы трех тел. Используется редукция уравнения Шредингера в частных производных для трех тел к системе обыкновенных дифференциальных /не интегродифференциальных, как принято в прямой задаче/ уравнений. В приложении рассмотрен элементарный способ решения многомерной обратной задачи в конечно-разностном приближении.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Zakhariev B.N.

P4-86-554

Three-Body Inverse Scattering Problem

A method for determining the three-body /and two-body if necessary/ potentials from scattering data on the three-particle systems is suggested. The reduction of the three-body Schrödinger equation to the system of ordinary differential /not integrodifferential as usual in the direct problem/ equations is used. A simple method to solve the multidimensional inverse problem in the finite-difference approximation is considered in the Appendix.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986