объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P4-86-53

Г.Н.Афанасьев

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ГАМИЛЬТОНИАНА С КВАДРУПОЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Направлено в журнал "Zeitschrift für Physik A: Atoms and Nuclei"

1986

I. Введение

В настоящее время среди работ, связанных с применением теоретико-групповых методов в ядерной физике, наметилось два основных направления. К первому мы относим феноменологическую (на данном этапе) модель взаимодействующих бозонов IBM (см. превосходную подборку статей в сборнике /1/, а также работы /2-4/). Эта модель (в ее простейшем варианте) обладает нарушенной $SU(6)$ динамической симметрией. Второе направление обязано работам, в которых так или иначе приходят к группе динамической симметрии $Sp(3,R)$ /5-9/. Налицо противоречие между двумя подходами. Оно могло бы быть снято (или, по крайней мере, понято) если бы удалось построить более или менее реалистическую модель ядра, для гамильтониана которой можно было бы указать <u>точную</u>[x)] группу динамической симметрии, а также в явном виде выразить генераторы этой группы (с помощью операторов фермионов). Именно это и является целью настоящей работы. Нам удалось для модели с квадрупольным взаимодействием, но без спаривания идентифицировать <u>точную</u> группу динамической симметрии (она оказалась изоморфной $Sp(3,R)$) и найти фермионную реализацию ее генераторов. В результате оказалось возможным точно отобразить исходное фермионное пространство на модельное бозонное и найти собственные значения гамильтониана для простейшей реализации $Sp(3,R)$ алгебры. Точно так же удается получить собственные значения, если в гамильтониане опустить члены, не сохраняющие числа бозонов. Показано, что к гамильтониану модели можно прийти в результате последовательного нарушения симметрии относительно $Sp(3,R)$ и ее подалгебр. Проанализированы причины хорошего согласия с экспериментом IBM и стандартной полумикроскопической модели /13/.

2. Физические предпосылки и необходимые математические детали

Рассмотрим стандартную полумикроскопическую модель ядра /13/ с квадрупольным взаимодействием между нуклонами. Сделаем следующие упрощающие предположения: а) рассматривается только один тип нуклонов; б) в качестве среднего поля выбираем трехмерный изотропный осциллятор без спин-орбитальных и квадратичных по угловому моменту добавок; в) квадрупольное взаимодействие берется в простейшем варианте, без спин-спиновых сил; г) пренебрегаем спариванием. С учетом этих

x) Попытки нахождения связи между феноменологическими и микроскопическими моделями предпринимались неоднократно /3,10,11,12/, но все они использовали те или иные приближения.

упрощений гамильтониан приобретает вид

$$H = H_0 + H_1 \,, \quad H_0 = \sum \epsilon_{n\ell} a^+_{n\ell m} a_{n\ell m} \,, \quad H_1 = \varkappa \hat{Q}^2. \tag{2.I}$$

Здесь $\epsilon_{n\ell}$ – уровни энергии трехмерного изотропного осциллятора $(= \hbar\omega \cdot (2n + \ell + \frac{3}{2}))$. $\hat{Q}^2 = \hat{Q}_0^2 + 6\hat{Q}_1 \cdot \hat{Q}_{-1} + 12\hat{Q}_2 \hat{Q}_{-2}$; $\hat{Q}_\mu$ – компоненты квадрупольного момента:

$$\hat{Q}_\mu = \sum a^+_\alpha a_\beta \langle\alpha|Q_\mu|\beta\rangle \,, \quad Q_0 = x_0^2 - x_1 \cdot x_{-1} \,, \quad Q_{\pm1} = x_0 \cdot x_{\pm1} \,, \quad Q_{\pm2} = \frac{1}{2} x^2_{\pm1}$$

$$(\alpha \equiv n\ell m \,, \; x_0 = z \,, \; x_{\pm1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm iy)). \tag{2.2}$$

Мы опустили спиновые переменные нуклонов. Строго говоря, следовало бы в (2.I) и (2.2) писать (в зависимости от типа связи):

$$H_0 = \sum \epsilon_{n\ell} a^+_\alpha \cdot a_\alpha \quad , \; \alpha = n\ell m\sigma \tag{2.3}$$

$$H_0 = \sum \epsilon_{n\ell} a^+_\alpha \cdot a_\alpha \quad , \; \alpha = n\ell j m. \tag{2.4}$$

Мы хотим взглянуть на гамильтониан H с алгебраической точки зрения. Непосредственная коммутация весьма трудоемка (из-за появления сложных комбинаций $3j$ и $6j$ символов). Существенное упрощение возникает, если принять во внимание следующий тривиальный факт (который ранее /5/ использовался для перечисления всех замкнутых алгебр, допускающих фермионную реализацию). Именно, пусть f и g – две произвольные функции координат x_i и их производных $\partial_K \equiv \frac{\partial}{\partial x_K}$ $(i, K = 1, 2, 3)$. Пусть коммутатор $[f, g]$ равен некоторой третьей функции $h(x_i, \partial_K)$:

$$[f, g] = h. \tag{2.5}$$

Образуем следующие одночастичные операторы

$$\hat{f} = \sum a^+_\alpha a_\beta \langle\alpha|f|\beta\rangle, \quad \hat{g} = \sum a^+_\alpha a_\beta \langle\alpha|g|\beta\rangle, \quad \hat{h} = \sum a^+_\alpha a_\beta \langle\alpha|h|\beta\rangle. \tag{2.6}$$

Предполагается, что набор одночастичных волновых функций $|\alpha\rangle$ (в пространстве которых действуют f, g, h) – полон $(\sum |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1)$. Конкретный вид этих функций неважен (это могут быть осцилляторные, вудс – саксоновские и т.д.). Существенна только их полнота. Тогда имеет место

$$[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{h}. \tag{2.7}$$

Отсюда следует, что если алгебра коммутаторов функций $f_i(x_K, \partial_\ell)$ замкнута, то замкнута и алгебра операторов $\hat{f}_i = \sum a^+_\alpha a_\beta \langle\alpha|f_i|\beta\rangle$. Эти две алгебры изоморфны. Далее, поскольку операторы Q_μ коммутируют между собой, то это же относится и к $\hat{Q}_\mu$. Равенство нулю коммутаторов $[\hat{Q}_\mu, \hat{Q}_\nu]$ должно выполняться после любого точного канонического преобразования исходных фермионов (например, при переходе к операторам квазичастиц или фононов). В результате приближений коммутационные соотношения (к.с.) могут нарушаться, что в свою очередь может привести к неправильной идентификации исходной алгебры динамической симметрии.

Эта же процедура позволяет построить точные операторы бозонов из фермионов. Именно, образуем из координат и производных операторы рождения и уничтожения:

$$b^+_\mu = \frac{x_\mu - \partial_{-\mu}}{\sqrt{2}} \quad , \quad b_\mu = \frac{x_{-\mu} + \partial_\mu}{\sqrt{2}} \qquad (\mu = 0, \pm1).$$

Строим одночастичные операторы

$$\hat{b}^+_\mu = \sum a^+_\alpha a_\beta \langle\alpha|b^+_\mu|\beta\rangle \quad , \quad \hat{b}_\mu = \sum a^+_\alpha a_\beta \langle\alpha|b_\mu|\beta\rangle$$

Тогда: $[\hat{b}_\mu, \hat{b}^+_\nu] = \delta_{\mu\nu}\hat{1}$, где $\hat{1} = \sum a^+_\alpha a_\alpha$.
В качестве иллюстрации приведем явный вид $\hat{b}_0$ в осцилляторном базисе:

$$\hat{b}_0 = \sum_{n\ell m} \left\{ \left[2\frac{\ell^2 - m^2}{4\ell^2 - 1}(\ell + n + \tfrac{1}{2}) \right]^{1/2} a^+_{n,\ell-1,m} - \left[2\frac{(\ell+1)^2 - m^2}{(2\ell+1)(2\ell+3)} n \right]^{1/2} \cdot a^+_{n-1,\ell+1,m} \right\} \cdot a_{n\ell m}.$$

Коль скоро имеется точная фермионная реализация операторов бозонов, возникает вопрос: что является для них вакуумом? Или точнее: какова фермионная структура состояний $|0\rangle$, для которых выполняется соотношение

$$\hat{b}_\mu |0\rangle = 0. \tag{2.8}$$

Первое, что приходит в голову (и это правильно) – это состояния, для которых полностью заполнены все оболочки с главными квантовыми числами $N (= 2n + \ell)$, меньшими (или равными) некоторого N_0 , а все оболочки с $N > N_0$ – полностью свободны (рис. Iа). Однако существуют и другие состояния, для которых условие (2.8) выполняется. В качестве примера на рис. Iв схематически изображены три таких состояния, для которых уровни с $N > N_0 = 4$ полностью свободны.

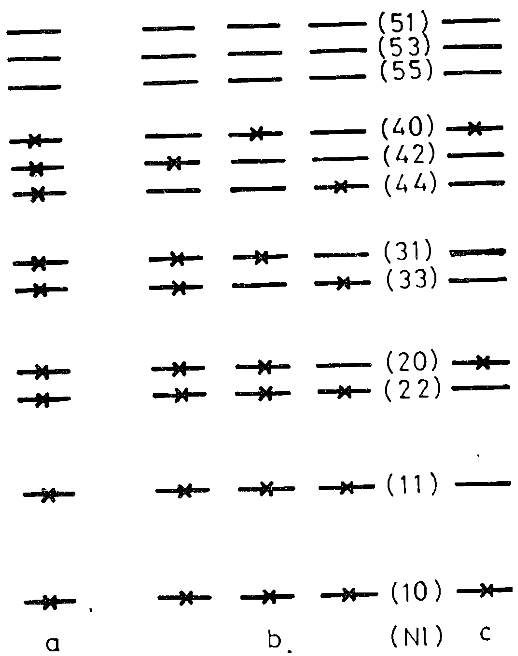

Рис. I.

Фермионная структура состояний, аннигилируемых операторами b_μ – (a, b) и I_- – (c). Цифры в скобках означают главное квантовое число N и орбитальный момент l. Уровни с крестиками полностью заполнены, остальные – полностью свободны.

3. Идентификация алгебры динамической симметрии

Возвращаясь к исходному гамильтониану, заметим, что H_0 можно представить в виде:

$$H_0 = \hbar\omega \sum a^+_{nlm} a_{n'l'm'} \langle nlm | \tfrac{1}{2}(-\Delta+\rho^2) | n'l'm' \rangle .$$

Таким образом, для определения динамической алгебры гамильтониана достаточно прокоммутировать выражения

$$\tfrac{1}{2}(-\Delta+\rho^2) = N_B + \tfrac{3}{2} \quad ,(N_B = b^+_\mu b_\mu) \ , \ Q_\mu . \qquad (3.I)$$

Оказывается, операторы (3.I) следует дополнить еще I5 для получения замкнутой системы к.с. Полученная алгебра изоморфна симплектической алгебре $Sp(3,R)$. Она содержит 2I генератор. В бозонном представлении они выглядят следующим образом:

а) Три оператора углового момента:

$$L_0 = b^+_1 b_1 - b^+_{-1} b_{-1} , \ L_1 = b^+_1 b_0 - b^+_0 b_{-1} , \ L_{-1} = b^+_{-1} b_0 - b^+_0 b_1 ; \qquad (3.2a)$$

б) пять компонент тензора второго ранга, не меняющих числа бозонов:

$$Q^0_0 = 3 b^+_0 b_0 - N_B \ , \ Q^0_{\pm1} = b^+_0 b_{\mp1} + b^+_{\pm1} b_0 , \ Q^0_{\pm2} = b^+_{\pm1} \cdot b_{\mp1} ; \qquad (3.2б)$$

в) пять компонент тензора второго ранга, увеличивающих число бозонов на 2:

$$Q^+_0 = (b^+_0)^2 - b^+_1 b^+_{-1} , \ Q^+_{\pm1} = b^+_0 b^+_{\pm1} , \ Q^+_{\pm2} = \tfrac{1}{2} (b^+_{\pm1})^2 ; \qquad (3.2в)$$

г) пять компонент тензора второго ранга, уменьшающих число бозонов на 2:

$$Q^-_0 = b^2_0 - b_1 \cdot b_{-1} , \ Q^-_{\pm1} = b_0 \cdot b_{\mp1} \ , \ Q_{\pm2} = \tfrac{1}{2} (b_{\mp1})^2 ; \qquad (3.2г)$$

д) три скалярных оператора:

$$I_+ = b^+_1 b^+_{-1} + \tfrac{1}{2} (b^+_0)^2 , \ I_- = b_1 b_{-1} + \tfrac{1}{2} (b_0)^2 , \ I_0 = N_B + \tfrac{3}{2} . \qquad (3.2д)$$

Компоненты физического квадрупольного момента следующим образом выражаются через $Q^{0,\pm}_\mu$:

$$Q_\mu = \tfrac{1}{2} (Q^0_\mu + Q^+_\mu + Q^-_\mu) .$$

Итак, необходимо диагонализовать гамильтониан (2.I), состоящий из генераторов $Sp(3,R)$. Отметим, что операторы (3.2) реализуют весьма частное представление, тогда как операторы $\hat{N}_B$, $\hat{Q}_\mu$, входящие в гамильтониан H, могут реализовать самое общее представление $Sp(3,R)$. Для диагонализации гамильтониана необходимо построить базис $Sp(3,R)$. Это было сделано во многих работах разными способами и в следующем разделе мы их обсудим.

4. Редукция $Sp(3,R)$ на подалгебры

Для построения базиса $Sp(3,R)$ необходимо прежде всего выделить цепочки подалгебр $Sp(3,R)$. Из списка генераторов (3.2) следует, что операторы L_μ, Q^0_μ, не меняющие числа бозонов, образуют алгебру, изоморфную $SU(3)$. Оператор I_0 дополняет эту алгебру до $U(3)$. В результате получается следующая цепочка подалгебр:

$$Sp(3,R) \supset U(3) \supset SU(3) \supset O(3) \supset O(2) . \qquad (4.I)$$

Эта цепочка подалгебр использовалась для построения подалгебр в /6-9/. Вторая цепочка подалгебр получается /9/, если принять во внимание, что операторы $I_0, I_{\pm 1}$ образуют $O(2,1)$ алгебру: $([I_0, I_{\pm 1}] = \pm I_{\pm 1},\ [I_1, I_{-1}] = -I_0,\ I_{-1} = (I_1)^+)$. Они коммутируют с операторами углового момента. Таким образом, получается цепочка подалгебр:

$$Sp(3,R) \supset O(2,1) \otimes O(3). \tag{4.2}$$

Состояния $O(2,1)$ маркируются двумя квантовыми числами. Одно из них является собственным значением I_0:

$$I_0 |\lambda,\mu\rangle = \mu |\lambda,\mu\rangle. \tag{4.3}$$

μ меняется в пределах $\infty > \mu \geqslant \lambda \geqslant 0$. При $\mu = \lambda$ имеем:

$$I_- |\lambda,\lambda\rangle = 0. \tag{4.4}$$

Отсюда и из к.о. между $I_{0,\pm 1}$ сразу следует, что:

$$I_{+1} |\lambda\mu\rangle = \frac{1}{2}[(\lambda+\mu)(\mu-\lambda+2)]^{1/2} |\lambda,\mu+2\rangle,$$

$$I_{-1} |\lambda\mu\rangle = \frac{1}{2}[(\mu-\lambda)(\lambda+\mu-2)]^{1/2} |\lambda,\mu-2\rangle.$$

В фермионной реализации I_μ имеют вид:

$$\hat{I}_0 = \sum_{n\ell m}(2n+\ell+\tfrac{3}{2})\, a^+_{n\ell m} a_{n\ell m},\quad \hat{I}_1 = -\sum [(n+1)(n+\ell+\tfrac{3}{2})]^{1/2} a^+_{n+1,\ell m} \cdot a_{n\ell m},\quad \hat{I}_{-1} = -\sum [n(n+\ell+\tfrac{1}{2})]^{1/2} a^+_{n-1,\ell m} a_{n\ell m}.$$

Состояние, которое аннигилируется $\hat{I}_{-1}$, строится следующим образом: Пусть все состояния, принадлежащие оболочкам $N > N_0$, свободны. Тогда в каждой из оболочек с $N \leq N_0$ полностью заполнены уровни с любым наперед заданным ℓ (если такое ℓ содержится в оболочке N), а уровни с остальными ℓ полностью свободны. Один из таких случаев $(N_0 = 4, \ell = 0)$ показан на рис. Ic. В этом случае

$$\lambda_0 = \sum_{N=0,2}^{N_0} (N + \tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{4}(N_0+2)(N_0+3).$$

Таким образом, состояния (4.4), вообще говоря, отличаются от вакуумных. Тензорные свойства остальных I5 операторов $Q^{0\pm}_\mu$ очевидны: они являются компонентами тензора 2-го ранга относительно $O(3)$ и компонентами тензора I-го ранга относительно $O(2,1)$. В дальнейшем нам понадобится два инварианта относительно $U(3)$ алгебры. Первый из них тривиален и является квадратичным оператором Казимира $SU(3)$ алгебры:

$$C_2 = (\hat{Q}^0_0)^2 + 3(\hat{Q}^0_1, \hat{Q}^0_{-1})_s + 6(\hat{Q}^0_2, \hat{Q}^0_{-2})_s + 3\hat{L}^2. \tag{4.5}$$

Здесь и далее: $(a,b)_s = ab + ba.$

Второй инвариант имеет вид:

$$C_2' = (\hat{Q}^+_0, \hat{Q}^-_0)_s + 3\cdot(\hat{Q}^+_1, \hat{Q}^-_{-1})_s + 3\cdot(\hat{Q}^+_{-1}, \hat{Q}^-_1)_s + 6\cdot(\hat{Q}^+_2, \hat{Q}^-_{-2})_s + 6(\hat{Q}^+_{-2}, \hat{Q}^-_2)_s - \hat{\bar{I}}^2 \qquad (\hat{\bar{I}}^2 = \hat{I}_0^2 - 2(\hat{I}_1, \hat{I}_{-1})_s). \tag{4.6}$$

Их линейная комбинация

$$-\frac{1}{2}C_2 + C_2' = C_0 \tag{4.7}$$

коммутирует со всеми генераторами $Sp(3,R)$. Третья цепочка подалгебр $Sp(3,R)$ проще всего выглядит в координатном представлении. Легко видеть, что операторы углового момента $(L_{ij} = x_i p_j - x_j p_i)$ и пять компонент тензора второго ранга $(Q_{ij} = x_i p_j + x_j p_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}(xp))$ образуют $SL(3,R)$ алгебру. К ее генераторам можно добавить физические квадрупольные операторы $Q_{ij}(x) = x_i x_j - \frac{1}{3}\delta_{ij} x^2$ и монопольный оператор x^2. Полученная неполупростая алгебра носит название $CM(3)$ /8/. К генераторам $CM(3)$ можно присовокупить оператор (xp). В результате получается MQC алгебра /8/. Таким образом, получается цепочка подалгебр

$$Sp(3,R) \supset MQC \supset CM(3) \supset SL(3,R) \supset O(3) \supset O(2).$$

Подалгебра $SL(3,R)$ хорошо приспособлена для описания ротационных свойств ядер /I4,I5/.

5. Конкретная реализация алгебры динамической симметрии

Мы выявили алгебраическую структуру гамильтониана с квадрупольным взаимодействием. Попытаемся получить из этого конкретный результат. Забудем о фермионной структуре генераторов $Sp(3,R)$ алгебры, входящих в гамильтониан. Мы требуем только выполнения правильных к.с. между $Sp(3,R)$ генераторами. Мы понимаем, что если реализация генераторов алгебры слишком проста, то мы ухватим из всех состояний гамильтониана только часть их, то есть энергетический спектр будет беден. Проще всего можно добиться выполнения правильных к.с., если сделать подстановку:

$$\sum (2n+\ell+\tfrac{3}{2})\, a^+_{n\ell m} a_{n\ell m} \to \tfrac{1}{2}(-\hat{\Delta} + \hat{r}^2)$$

$$\sum a^+_\alpha a_\beta \langle \alpha | Q_{ij}(x) | \beta \rangle \to \hat{x}_i \hat{x}_j - \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\hat{x}^2. \qquad (5.\mathrm{I})$$

Подставляя (5.I) в H, мы приходим к необходимости диагонализации следующего выражения:

$$\tfrac{1}{2}\hbar\omega(-\Delta + r^2) + \chi r^4 = \frac{\hbar\omega}{2}(-\Delta + r^2 + \chi_1 r^4), \quad \chi_1 = \frac{2\chi}{\hbar\omega}, \qquad (5.2)$$

то есть получаем изотропный осциллятор с простой ангармоничностью $\sim r^4$. На рис. 2 и 3 представлены собственные значения опе-

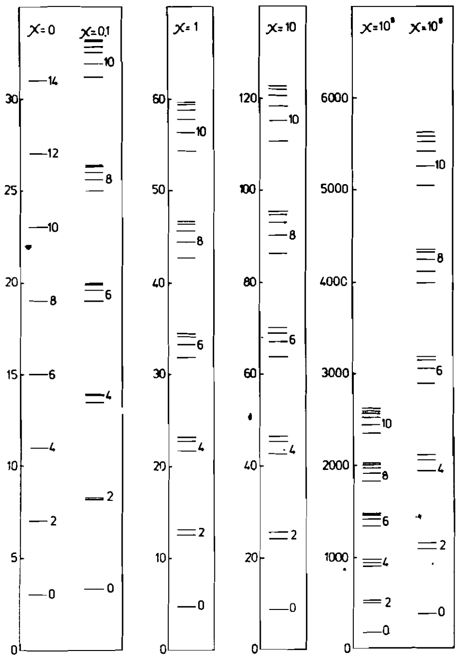

Рис. 2.

Уровни энергии гамильтониана с квадрупольным взаимодействием для четных угловых моментов. Числа, стоящие справа от уровней, означают главное квантовое число N.

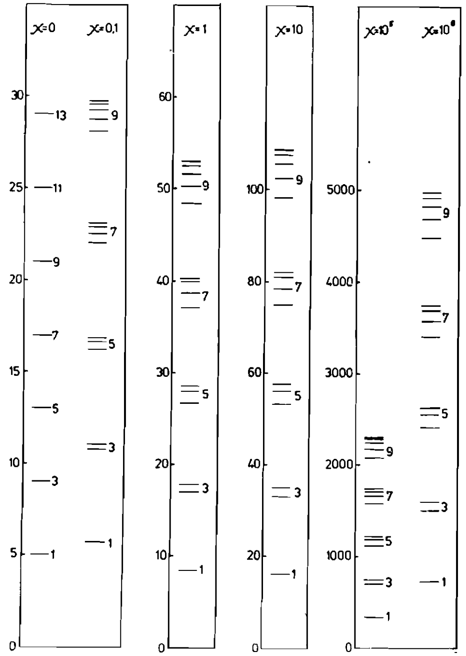

Рис. 3.

То же, что и на рис. 2, но для ℓ нечетных.

ратора $(-\Delta + r^2 + \chi r^4)$ для $N = 2n+\ell$ четных и нечетных соответственно. Значения ℓ внутри мультиплета N не показаны, поскольку энергия уровней при N фиксированном убывает с ростом ℓ (которые принимают значения N, $N-2$, ... $0\ (1)$). Например, мультиплет $N = 8$ содержит следующие значения углового момента (в порядке убывания энергий) $\ell = 0,2,4,6,8$. В предельных случаях слабой и сильной ангармоничности получаются простые выражения для уровней энергии:

$$\chi \ll 1: \quad \epsilon_{N\ell} \simeq (2N+3)\left[1 + \tfrac{3}{8}\chi\,(2N+3)\cdot C_{N\ell}\right],$$

$$\chi \gg 1: \quad \epsilon_{N\ell} \simeq \tfrac{1}{2}\left[3\,(N+\tfrac{3}{2})\right]^{4/3} \cdot \chi^{1/3} \cdot (C_{N\ell})^{1/3},$$

$$C_{N\ell} = 1 - \frac{(\ell+\frac{3}{2})(\ell-\frac{1}{2})}{3\,(N+\frac{3}{2})^2}.$$

Посмотрим, что получится, если из гамильтониана (2.I) выбросить все члены, не сохраняющие числа бозонов. В итоге приходим к выражению с нарушенной $SU(3)$ симметрией:

$$H' = \hbar\omega(\hat N_B + \tfrac{3}{2}) + \tfrac{1}{4}\chi\left[(\hat Q^0, \hat Q^0) + 2(\hat Q^+, \hat Q^-)\right]. \tag{5.3}$$

Здесь $(\hat Q^0, \hat Q^0) = (\hat Q^0_0)^2 + 3\cdot(\hat Q^0_1, \hat Q^0_{-1})_s + 6(\hat Q^0_2, \hat Q^0_{-2})_s$,

$$(\hat Q^+, \hat Q^-) = (\hat Q^+_0, \hat Q^-_0)_s + 3\cdot(\hat Q^+_1, \hat Q^-_{-1}) + 3(\hat Q^+_{-1}, \hat Q^-_1)_s +$$

$$+ 6\cdot(\hat Q^+_2, \hat Q^-_{-2}) + 6(\hat Q^+_{-2}, \hat Q^-_2).$$

С помощью (4.4)-(4.6) выражаем $(\hat Q^0, \hat Q^0)$ и $(\hat Q^+, \hat Q^-)$ через инвариантные операторы:

$$H' = \hbar\omega(\hat N_B + \tfrac{3}{2}) + \frac{\chi}{4}\left[C_0 + \tfrac{3}{2}C_2 - 3\vec{L}^2 + \vec{I}^2\right]. \tag{5.4}$$

Если для генераторов $Sp(3,R)$ выбрать простейшее I-бозонное представление, то

$$H' = \hbar\omega(N_B + \tfrac{3}{2}) + \frac{\chi}{4}\left[N_B(N_B + \tfrac{3}{2}) + \tfrac{63}{4} - 3L(L+1) + I_0(I_0 - 2)\right].$$

Наиболее общие представления $Sp(3,R)$ можно получить, вводя три типа векторных бозонов. Частные представления $Sp(3,R)$ с двумя векторными бозонами строились в работах /9/.

6. Обсуждение и заключение

Мы показали, что гамильтониан (2.I) является квадратичной комбинацией генераторов $Sp(3,R)$ алгебры. При вычислении спектра энергий неявно предполагалось, что определенному ядру соответствует неприводимое представление $Sp(3,R)$ (в принципе это могло бы быть и не так). К гамильтониану (2.I) можно прийти путем последовательного нарушения симметрий относительно $Sp(3,R)$ и ее подалгебр. Считаем, что исходный гамильтониан описывается инвариантной квадратичной формой C_0 (см. (4.7)): $H' \sim C_0$. Поскольку с C_0 коммутируют все генераторы $Sp(3,R)$, то все состояния, входящие в один мультиплет $Sp(3,R)$, имеют одну и ту же энергию (рис. 4).

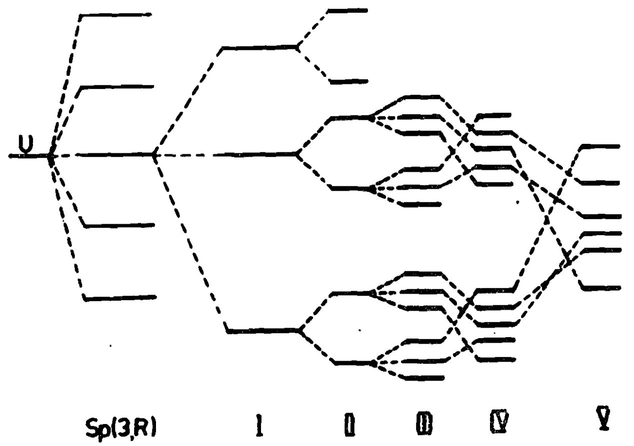

Рис. 4.

Возможная схема нарушения $Sp(3,R)$ симметрии в атомных ядрах. Римские цифры означают нарушение симметрий относительно подгрупп (см. текст).

На первом этапе (I) расщепляем мультиплет $Sp(3,R)$ на мультиплеты $U(3)$: $H'' \sim \hbar\omega(\hat N_B + \frac{3}{2}) + A\cdot C_0$ (A-константа). При этом все мультиплеты $SU(3)$, входящие в $U(3)$, имеют одну и ту же энергию. На втором этапе (II) расщепляем мультиплет $U(3)$ на мультиплеты $SU(3)$:

$$H''' \sim \hbar\omega(\hat N_B + \tfrac{3}{2}) + B\,\hat C_2 + C\cdot\hat C_2'. \tag{6.I}$$

(B,C. – константы). В этом случае состояния, принадлежащие разным мультиплетам $SU(3)$, отличаются по энергии, но состояния внутри мультиплета $SU(3)$ вырождены по энергии. На следующем этапе (III) расщепляем мультиплеты $SU(3)$ на мультиплеты $O(3)$, но сохраняем квантовые числа (λ,μ) $SU(3)$. Этого можно добиться, оставив в $\hat C_2$ (см. (4.5) и (6.I)) только $(\hat Q^0, \hat Q^0)$. В итоге приходим к схеме Эллиота. В энергетическом спектре гамильтониана появляется конечная ротационная полоса. Далее (IУ) требуем, чтобы взаимодействие сохраняло число бозонов, но нарушало квантовые числа (λ,μ). Для этого достаточно в C_2' (см. (4.6)и (6.I)) оставить только $(\hat{Q}^+, \hat{Q}^-)$. Собственные состояния гамильтониана маркируются числом бозонов N_B и квантовыми числами углового момента LM и являются суперпозицией собственных векторов операторов Казимира $SU(3)$. Наконец, (У), добавляя члены, не сохраняющие числа бозонов, приходим к (2.I) при определенном выборе констант.

Далее отметим, что ограничение одним типом нуклонов несущественно. В самом деле, для двух сортов нуклонов (назовем их p и n) гамильтониан, описывающий квадрупольное взаимодействие, имеет вид

$$\hbar\omega_p(N_p+\tfrac{3}{2})+\hbar\omega_n(N_n+\tfrac{3}{2})+\chi_p\vec{Q}(p)\vec{Q}(p)+\chi_n\vec{Q}(n)\vec{Q}(n)+$$
$$+\chi_{np}\vec{Q}(p)\vec{Q}_n. \quad /13/ \qquad (6.2)$$

Здесь $\hat{Q}_\mu(p)$ и $\hat{Q}_\mu(n)$ – генераторы двух коммутирующих алгебр, построенные по тому же принципу, что и генераторы (2.2) для одного типа нуклонов. Таким образом, алгеброй динамической симметрии является прямое произведение $Sp(3,R)_p \otimes Sp(3,R)_n$.

Оператор числа фермионов коммутирует со всеми генераторами $Sp(3,R)$, поскольку последние переводят одни состояния $Sp(3,R)$ в другие. Мы предполагали, что каждому ядру соответствует определенный мультиплет $Sp(3,R)$ (рис. 4). Возникает вопрос: не является ли наличие различных мультиплетов $Sp(3,R)$ следствием нарушения более высокой симметрии? Тогда "истинная" алгебра $\mathcal{U}$ (рис. 4) динамической симметрии должна содержать $Sp(3,R)$ как подалгебру. В этом случае среди генераторов $\mathcal{U}$ должны быть такие, которые переводят состояния одного мультиплета $Sp(3,R)$ в состояния другого мультиплета. Эти генераторы должны менять число фермионов. Следующее обстоятельство показывает, что эти рассуждения не являются праздными. Весьма популярная в настоящее время модель Якелло – Аримы в своем простейшем варианте оперирует со скалярным s и квадрупольным d бозонами. Взаимодействие строится таким образом, чтобы сохранялось полное число s и d бозонов. В работах, посвященных микроскопическому обоснованию этой модели /3,10–12/, скалярный и квадрупольный бозоны строятся (приближенно) из линейных комбинаций операторов $A^+_{2M}=(a^+a^+)_{2M}$, $A^+_0=(a^+a^+)_{00}$ и эрмитово сопряженным к ним. Если это окажется верным (а IBM имеет под собой солидное экспериментальное обоснование /16–18/), то IBM неявно затрагивает и вертикальный аспект рисунка 4 (то есть смешивает представления $Sp(3,R)$). В то же время упомянутые ранее работы,

посвященные обоснованию и применению $Sp(3,R)$ алгебры, имели дело преимущественно с горизонтальным аспектом того же рисунка (то есть с тем или иным расщеплением мультиплета $Sp(3,R)$). Хорошее согласие численных расчетов по стандартной полумикроскопической модели с экспериментом, на наш взгляд, не в последнюю очередь связано с тем, что она существенным образом (хотя и неявно) смешивает неприводимые представления $Sp(3,R)$ – за счет спаривательного взаимодействия.

Литература

1. Progr. in Particle and Nuclear Phys., v.9: Collective bands in nuclei (Ed. by D.Wilkinson), Pergamon Press, Oxford, 1983.
2. Iachello F. Physika, 1985, D15, p.85.
3. Janssen D., Jolos R.V. and Donau F. Nucl.Phys., 1974, A224, p.93.
4. Elliot J.P. Rep.Progr.Phys., 1985, 48, p.173.
5. Афанасьев Г.Н., Райчев П.П. ЭЧАЯ, 1972, т.2, вып.3, с.436; Афанасьев Г.Н., Михайлов И.Н., Райчев П.П. ЯФ, 1971, 21, с.1126.
6. Филиппов Г.Ф., Овчаренко В.И., Смирнов Ю.Ф. Микроскопическая теория коллективных возбуждений ядер. "Наукова думка", Киев,1981; Филиппов Г.Ф., Василевский В.С.,Чоповский Л.Л. ЭЧАЯ,1984,15,в.6, с.1339.
7. Vanagas V. Lecture Notes in Physics, Univ.Toronto Press, Toronto, 1977; Vanagas V., in Group Theory and its Applications in Physics (ed. by T.H.Seligman), A.I.P., New York, 1980; Ванагас В. ЭЧАЯ, 1980, 11, вып.2, с.454.
8. Rowe D.J. Rep.Progr.Phys., 1985, 48, p.1419; Rosensteel G. and Rowe D.J. Ann.Phys. (N.Y.), 1979, 123, p.36; 1980, 126, p.198; 1980, 126, p.343.
9. Moshinsky M. J.Math.Phys., 1984, 25, p.1555; Chacon E., Hess P. and Moshinsky M. J.Math.Phys., 1984, 25, p.1565; Castanos O., Chacon E. and Moshinsky M. J.Math.Phys., 1984, 25, p.2815.
10. Arima A. and Iachello F. Ann.Rev.Nucl.Sci., 1981, 31, p.75; Otzuka T., Arima A. and Iachello F. Nucl. Phys., 1978, A309, p.1.
11. See papers by Talmi (p.27), Arima (p.51), Yang L.M. (p.147), Maglione E. and Vitturi A. (p.87), Ring P. et al. (p.465), Barret B.R. et al. (p.535), Kaup U. (p.561) in /1/.
12. Halse P. Phys.Lett., 1985, B156, p.1.

13. Соловьев В.Г. Теория сложных ядер, "Наука", М., 1971; Соловьев В.Г. ЭЧАЯ, 1978, 9, вып.4, с.580;
Soloviev V.G. At.Energy Rev., 1965, 3, p.117.
Soloviev V.G. JINR, E4-85-706, Dubna, 1985.
14. Weaver L. and Biedenharn L.C Nucl.Phys., 1972, A185, p.1.
15. Невзглядов В.Г. Теория тела однородной деформации и ее применение к атомному ядру, Изд-во ДВГУ, Владивосток, 1970.

16. Bruce A.B. et al. Phys. Lett., 1985, B165, p. 43.
17. See e.g. papers by Casten R.F. and Wagner D.D. (p.311), Lipas (p.511) in /1/.
18. Casten R.F. Physika, 1985, D15, p.99.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 января 1986 года.

Вниманию организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Афанасьев Г.Н.

Р4-86-53

Об алгебраической структуре гамильтониана с квадрупольным взаимодействием

Найдена точная группа динамической симметрии для гамильтониана с квадрупольным взаимодействием (Sp(3, R)). Исходное фермионное пространство удалось точно отобразить на модельное бозонное и отыскать собственные значения для случая простейшей реализации генераторов Sp(3, R). Показано, что к гамильтониану модели можно прийти в результате последовательного нарушения симметрии относительно Sp(3, R) и ее подалгебр. Сделана попытка проанализировать причины хорошего согласия с экспериментом модели взаимодействующих бозонов и стандартной полумикроскопической модели.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Afanasiev G.N.

P4-86-53

On the Algebraic Structure of the Hamiltonian with a Quadrupole Interaction

We found the exact group of dynamical symmetry for the Hamiltonian with a quadrupole interaction (Sp(3, R)). This permitted us to map the initial fermion space into the model boson one and find energy eigenvalues for the simplest realization of the Sp(3, R) generators. We demonstrate that one can arrive at the Hamiltonian of the treated model by the successive symmetry breaking with respect to Sp(3, R) and its subgroups. We give the reasons for the good description of the experiment by the interacting boson model and standard semimicroscopic model.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986