86-507

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4-86-507

Р.В.Джолос, С.П.Иванова

SU(6)-СИММЕТРИЯ В МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗОНОВ

Направлено на конференцию по ядерной структуре, симметриям и реакциям, Дубровник, СФРЮ, 1986 г.

1986

I. Введение

Известно, что выражение $\sqrt{1-\frac{1}{N_{max}}\sum_{\mu} d^{+}_{2\mu} d_{2\mu}}$, входящее в коллективный гамильтониан, основанный на $SU(6)$ симметрии (модель взаимодействующих бозонов - МВБ), обусловлено учетом принципа Паули /I/. Можно показать, основываясь на микроскопической модели ядра, что появление квадратного корня - результат приближений, сделанных при расчете нормировочных коэффициентов для многофермионных состояний.

Цель данной работы: развить метод построения коллективного квадрупольного гамильтониана на основе микроскопической модели ядра и показать, что возможность представления коллективного гамильтониана через генераторы динамической группы симметрии $SU(6)$ является результатом приближений, сделанных при расчете нормировочных коэффициентов для многофермионных состояний, принадлежащих коллективному подпространству полного фермионного пространства.

2. Коллективное подпространство в пространстве фермионных состояний

Известно, что коллективная квадрупольная ветвь возбуждения достаточно хорошо отделяется от других степеней свободы в четно-четных сферических, переходных и деформированных ядрах. Эксперимент дает достаточно оснований для того, чтобы описывать низколежащие состояния в четно-четных ядрах, основываясь на гамильтониане, содержащем только коллективные квадрупольные переменные. Но как построить такой гамильтониан?

В феноменологической модели ядра в качестве коллективных переменных используются компоненты тензора квадрупольной деформации. В микроскопическом подходе структура коллективной квадрупольной моды зависит от свойств конкретного ядра: одночастичных энергий и волновых функций, констант парного и квадрупольного взаимодействий. Эта структура определяется решением динамических уравнений в приближении Тамма - Данкова или хаотических фаз. Например, в приближении Тамма - Данкова оператор $A^{+}_{2\mu}$, генерирующий нижайшее 2^{+}-возбуждение, имеет следующую структуру:

$$A^+_{2\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{s,s'} \psi_{ss'} (\alpha^+_s \alpha^+_{s'})_{2\mu} ,$$

$$(\alpha^+_s \alpha^+_{s'})_{2\mu} = \sum_{m,m'} C^{2\mu}_{j_s m\, j_{s'} m'} \alpha^+_{sm} \alpha^+_{s'm'} ,$$

$$\sum_{ss'} \psi^2_{ss'} = 1 ,$$

$$\psi_{ss'} \sim \langle s \| r^2 Y_2 \| s' \rangle (E_s + E_{s'} - \omega)^{-1} .$$

Здесь α^+_{sm} - оператор рождения квазичастицы с квантовыми числами s, m; E_s - энергия квазичастицы; ω - нижайшее решение секулярного уравнения для квадрупольных возбуждений в приближении Тамма - Данкова.

Используя оператор $A^+_{2\mu}$, мы можем сконструировать базис коллективных фермионных состояний аналогично тому, как строится бозонный базис /2/ :

$|0\rangle$ - квазичастичный вакуум $\longleftrightarrow$ $|0)$ вакуум фононов,

$$A^+_{2\mu} |0\rangle \longleftrightarrow d^+_{2\mu} |0) ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (A^+_2 A^+_2)_{IM} |0\rangle \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (d^+_2 d^+_2)_{IM} |0) ,$$

$$\cdots$$

$$(A^+_2 \ldots A^+_2)_{N v \Omega I M} |0\rangle \longleftrightarrow (d^+_2 \ldots d^+_2)_{N v \Omega I M} |0) .$$

Состояния $|0\rangle$, $A^+_{2\mu} |0\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}} (A^+_2 A^+_2)_{IM} |0\rangle, \ldots$ $(A^+_2 \ldots A^+_2)_{N v \Omega I M} |0\rangle$ формируют базис в коллективном подпространстве полного бозонного пространства. Таким образом, коллективное подпространство нами задано.

Итак, проблема построения коллективного квадрупольного гамильтониана сводится к расчету матричных элементов микроскопического гамильтониана между коллективными фермионными состояниями. Обсудим более детально коллективный фермионный базис (КФБ). Амплитуды $\psi_{ss'}$ введены так, что

$$\langle 0 | A_{2\mu} \cdot A^+_{2\mu} | 0 \rangle = 1 .$$

Все другие фермионные состояния, определенные так, что соответствующие многофононные состояния

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (d^+_2 \cdot d^+_2)_{IM} |0) , \quad (d^+_2 \ldots d^+_2)_{N v \Omega I M} |0)$$

нормированы на единицу, имеют норму меньшую, чем 1, вследствие принципа Паули. Например:

$$\langle 0 | (A_2 A_2)_{IM} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (A^+_2 A^+_2)_{IM} | 0 \rangle = 1 - $$
$$ - 50 \sum_{p,q,z,s} \psi_{pq} \psi_{pz} \psi_{qs} \psi_{zs} \begin{Bmatrix} j_p & j_z & 2 \\ j_q & j_s & 2 \\ 2 & 2 & I \end{Bmatrix} .$$

С ростом числа квазичастиц в коллективном фермионном состоянии норма этого состояния убывает. Таким образом, одна из наших задач - это расчет нормировочных коэффициентов для векторов, принадлежащих КФБ, т.е. расчет скалярных произведений:

$$\mathcal{N}_{N v \Omega I} \equiv \langle 0 | (A_2 \ldots A_2)_{N v \Omega I M} (A^+_2 \ldots A^+_2)_{N v \Omega I M} | 0 \rangle . \qquad (1)$$

3. Матричные элементы микроскопического гамильтониана ядра

Получим выражения для матричных элементов микроскопического гамильтониана ядра между состояниями КФБ. Так как микроскопический гамильтониан является суммой слагаемых, линейных и квадратичных по операторам:

$$\alpha^+_s \alpha^+_{s'} , \quad \alpha^+_s \alpha_{s'} , \quad \alpha_{s'} \alpha_s , \qquad (2)$$

то для наших целей достаточно рассчитать матричные элементы операторов (2).

В результате имеем:

$$\langle N v \Omega I M | \alpha_s^+ \alpha_{s'}^+ | N-1, v'\Omega' I' M' \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2N}} (N-1, v'\Omega' I'; 2 |\} N v \Omega I) \sum C^{2\mu}_{j_s m_s\, j_{s'} m_{s'}} \times C^{IM}_{2\mu\, I'M'} \frac{\partial}{\partial \psi_{ss'}} \mathcal{N}_{N v \Omega I} . \tag{3}$$

$$\langle N v \Omega I M | \alpha_s^+ \alpha_{s'} | N v'\Omega' I' M' \rangle = \frac{5}{4} \sqrt{N} \times$$
$$\times \sum (N-1, v''\Omega'' I''; 2 |\} N v \Omega I)(N-1, v''\Omega'' I''; 2 |\} N v'\Omega' I') \times$$
$$\times \sqrt{(2I+1)(2I'+1)} \begin{Bmatrix} l & j_s & j_{s'} \\ j_\eta & 2 & 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l & I & I' \\ I'' & 2 & 2 \end{Bmatrix} (-1)^{M+m_s+I''+j_\eta} \tag{4}$$
$$\times C^{lm}_{IM\, I'-M'} C^{lm}_{j_s m_s\, j_{s'} -m_{s'}} \left(\psi_{\eta s'} \frac{\partial}{\partial \psi_{\eta s}} \mathcal{N}_{N v \Omega I} + \right.$$
$$\left. + \psi_{\eta s} \frac{\partial}{\partial \psi_{\eta s'}} \mathcal{N}_{N v'\Omega' I'} \right).$$

При получении (3) и (4) сделано следующее приближение: были учтены только двухквазичастичные операторы квадрупольного типа, т.е.

$$\alpha_s^+ \alpha_{s'}^+ = \sum_{lm} C^{lm}_{j_s m_s\, j_{s'} m_{s'}} (\alpha_s^+ \alpha_{s'}^+)_{lm} \approx$$
$$\approx C^{2\mu}_{j_s m_s\, j_{s'} m_{s'}} (\alpha_s^+ \alpha_{s'}^+)_{2\mu} .$$

Выражения (3) и (4) могут быть переписаны в другой форме, упрощающей нахождение бозонного представления фермионных операторов:

$$\langle N v \Omega I M | \alpha_s^+ \alpha_{s'}^+ | N-1, v'\Omega' I' M' \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}\, N} (N v \Omega I M | d^+_{2\mu} | N-1, v'\Omega' I' M') \times C^{2\mu}_{j_s m_s\, j_{s'} m_{s'}} \frac{\partial}{\partial \psi_{ss'}} \mathcal{N}_{N v \Omega I} , \tag{5}$$

$$\langle N v \Omega I M | \alpha_s^+ \alpha_{s'} | N v'\Omega' I' M' \rangle = \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum C^{lm}_{j_s m_s\, j_{s'} -m_{s'}} (-1)^{l+\mu+j_\eta+m_s} \begin{Bmatrix} l & j_s & j_{s'} \\ j_\eta & 2 & 2 \end{Bmatrix} \times \tag{6}$$
$$\times (N v \Omega I M | (d_2^+ \bar{d}_2)_{lm} | N v'\Omega' I' M') \times$$
$$\times \left(\psi_{\eta s'} \frac{\partial}{\partial \psi_{\eta s}} \mathcal{N}_{N v \Omega I} + \psi_{\eta s} \frac{\partial}{\partial \psi_{\eta s'}} \mathcal{N}_{N v'\Omega' I'} \right).$$

4. <u>Нормировка коллективных фермионных состояний</u>

Из предыдущих разделов следует, что задача вычисления матричных элементов микроскопического гамильтониана между состояниями КФБ будет решена, если мы найдем нормировочные коэффициенты $\mathcal{N}_{N v \Omega I}$. Приступим к расчету этих коэффициентов. Чтобы сделать изложение более компактным, получим уравнение для нормировочных коэффициентов состояний с максимальным угловым моментом I при заданном числе фононов, т.е. $I = 2N$, $v = N$ и $\mathcal{N}_{N v \Omega I}$ сводится к $\mathcal{N}_N$. В этом случае:

$$\mathcal{N}_N = N \sum_{ss'} \psi^2_{ss'} \mathcal{N}_{N-1} + \frac{1}{2} N(N-1) \sum C^{IM}_{2\mu\, I'M'} \times$$
$$\times C^{IM}_{2\nu\, \tilde{I}\tilde{M}} C^{\tilde{I}\tilde{M}}_{2\nu'\, I''M''} \langle N-1 | [[A_{2\mu}, A^+_{2\nu}], A^+_{2\nu'}] | N-2 \rangle , \tag{7}$$
$$I = 2N , \quad I' = \tilde{I} = 2N-2 , \quad I'' = 2N-4 .$$

Здесь

$$[[A_{2\mu}, A^+_{2\nu}], A^+_{2\nu'}] = -2\sqrt{2}\sum \psi_{st}\psi_{s't}\psi_{s\eta}\times$$

$$\times C^{2\mu}_{j_s m_s j_t m_t}\; C^{2\nu}_{j_{s'} m_{s'} j_t m_t}\; C^{2\nu'}_{j_s m_s j_\eta m_\eta}\; \alpha^+_{s'}\alpha^+_\eta .$$

Если, как и выше, мы сохраним только двухквазичастичные операторы с угловым моментом, равным 2, то

$$[[A_{2\mu}, A^+_{2\nu}], A^+_{2\nu'}] \approx -2\sqrt{2}\sum \psi_{st}\psi_{s't}\psi_{s\eta}\, C^{2\mu}_{j_s m_s j_t m_t}\times$$

$$\times C^{2\nu}_{j_{s'} m_{s'} j_t m_t}\; C^{2\nu'}_{j_s m_s j_\eta m_\eta}\; C^{2\mu'}_{j_{s'} m_{s'} j_\eta m_\eta}\; (\alpha^+_{s'}\alpha^+_\eta)_{2\mu'} =$$

$$= -2\sum C^{2\mu}_{j_s m_s j_t m_t}\; C^{2\nu}_{j_{s'} m_{s'} j_t m_t}\; C^{2\nu'}_{j_s m_s j_\eta m_\eta}\; C^{2\mu'}_{j_{s'} m_{s'} j_\eta m_\eta}\times$$

$$\times \psi_{st}\psi_{s't}\psi_{s\eta}\frac{\partial}{\partial\psi_{s'\eta}} A^+_{2\mu'} .$$

Подставляя этот результат в (7), получаем:

$$\mathcal{N}_N = N\sum\psi^2_{ss'}\mathcal{N}_{N-1} - \frac{1}{2}N\sum(-1)^{j_s-j_{s'}}\langle (j_t j_{s'})2;(j_s j_\eta)2;4\,|$$

$$(j_t j_s)2;(j_{s'} j_\eta)2;4\rangle\, \psi_{st}\psi_{s't}\psi_{s\eta}\frac{\partial}{\partial\psi_{s'\eta}}\mathcal{N}_{N-1}. \qquad (8)$$

Найдем приближенное решение этого уравнения в предположении, что $\mathcal{N}_N$ зависит только от шпура произведения матриц $\psi_{ss'}$ в степени не выше второй. В соответствии с этим полагаем, что

$$\sum(-1)^{j_s-j_{s'}}\langle (j_t j_{s'})2;(j_s j_\eta)2;4\,|\,(j_t j_s)2;(j_{s'} j_\eta)2;4\rangle\times$$

$$\times\psi_{st}\psi_{s't}\psi_{s\eta}\psi_{s'\eta} = \frac{1}{2K}\left(\sum\psi^2_{ss'}\right)^2,$$

где K - константа. Строго говоря, это означает, что модули всех амплитуд $\psi_{ss'}$ равны между собой, а число одночастичных состояний в сумме $\sum\limits_{ss'}$ конечно. В этом случае $\mathcal{N}_N$ можно задать в виде

$$\mathcal{N}_N = N!\left(\sum_{ss'}\psi^2_{ss'}\right)^N\bar{\mathcal{N}}_N ,$$

и уравнение (8) сведется к

$$\bar{\mathcal{N}}_N = \left(1-\frac{N-1}{K}\right)\bar{\mathcal{N}}_{N-1}. \qquad (9)$$

Это хорошо известный результат приближения, основанного на динамической группе симметрии $SU(6)$ с $K = N_{max}$. Отсюда следует, что

$$A^+_{2\mu}\to d^+_{2\mu}\sqrt{1-\frac{1}{K}\sum_\mu d^+_{2\mu}d_{2\mu}} . \qquad (10)$$

Подставив (10) в (1), получим (9). Соотношение (10) означает, что мы можем ввести S -бозон.

Исследуем уравнение для $\mathcal{N}_N$. Для простоты будем рассматривать случай монопольных бозонов. Тогда уравнение (8) примет вид

$$\mathcal{N}_N = N\sum\psi^2_{ss'}\mathcal{N}_{N-1} - \frac{1}{2}N\sum\psi_{st}\psi_{s't}\psi_{s\eta}\frac{\partial}{\partial\psi_{s'\eta}}\mathcal{N}_{N-1}\equiv$$

$$\equiv -N\,Sp\,\psi^2\cdot\mathcal{N}_{N-1} + \frac{1}{2}N\sum(\psi^3)_{s\nu}\frac{\partial}{\partial\psi_{s\nu}}\mathcal{N}_{N-1} .$$

Удобно ввести коэффициенты

$$\bar{\mathcal{N}}_N = \frac{1}{N!}\mathcal{N}_N$$

и генерирующую функцию

$$\bar{\mathcal{N}}(\lambda) = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{\lambda^N}{N!}\bar{\mathcal{N}}_N .$$

Для $\bar{\mathcal{N}}(\lambda)$ получается следующий результат:

$$\bar{\mathcal{N}}(\lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\,Sp\,\ln\,(1-2\lambda\psi^2)\right).$$

Рассмотрим выражения для $Sp\,\psi^{2N}$:

$$Sp\,\psi^2 = \sum_{1,2} \psi_{12}\psi_{21} \equiv \sum_1 \chi_{11},$$

$$Sp\,\psi^4 = \sum_{1,2,3,4} \psi_{12}\psi_{23}\psi_{34}\psi_{41} \approx \sum_{1,2,4} \psi_{12}\psi_{21}\psi_{14}\psi_{41} = \sum_1 \chi_{11}^2,$$

$$Sp\,\psi^{2N} \approx \sum_1 \chi_{11}^N.$$

Здесь мы учли только когерентные слагаемые в выражениях для $Sp\,\psi^{2N}$.
В таком приближении

$$\bar{\mathcal{N}}(\lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_1 \ln(1-2\lambda\chi_{11})\right). \qquad (11)$$

Рассчитаем $\bar{\mathcal{N}}_n$ при различных предположениях о χ_{11}.

I. Если $\chi_{11} = -\frac{1}{2K}$, а число одночастичных состояний в суммах ограничено и равно $2K$, то

$$\bar{\mathcal{N}}(\lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\cdot 2K \ln\left(1+\frac{\lambda}{K}\right)\right) = \exp\left(\ln\left(1+\frac{\lambda}{K}\right)^K\right) =$$

$$= \left(1+\frac{\lambda}{K}\right)^K = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!}\, 1\cdot\left(1-\frac{1}{K}\right)\left(1-\frac{2}{K}\right)\cdots\left(1-\frac{N-1}{K}\right),$$

$$\bar{\mathcal{N}}_N = \left(1-\frac{N-1}{K}\right)\bar{\mathcal{N}}_{N-1}.$$

Это результат приближения, основанного на динамической группе симметрии $SU(6)$.

I. Выражение (11) может быть переписано следующим образом:

$$\bar{\mathcal{N}}(\lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_1 \int_0^{\infty} d\varepsilon \ln(1-2\lambda\chi(\varepsilon))\,\delta(\varepsilon-\varepsilon_1)\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty} d\varepsilon \ln(1-2\lambda\chi(\varepsilon))\cdot g(\varepsilon)\right),$$

где $g(\varepsilon) \equiv \sum_1 \delta(\varepsilon-\varepsilon_1)$.

Полагая $\chi(\varepsilon) = -\chi_0\left(1+\frac{\varepsilon}{\Delta}\right)^{-2}$ и $g(\varepsilon) = const$, мы получим

$$\bar{\mathcal{N}}(\lambda) = \exp\left(\frac{1}{\chi_0}\left(\sqrt{1+2\lambda\chi_0} - 1\right)\right). \qquad (12)$$

Мы рассчитали коэффициенты $\bar{\mathcal{N}}_N$ для случая $\chi_0 = 0{,}1$ и сравнили полученные значения с результатами расчета в приближении, основанном на динамической группе симметрии $SU(6)$, фиксировав N_{max} так, чтобы значения $\bar{\mathcal{N}}_2$ совпали в обоих случаях. Результаты расчета приведены в таблице. Величины во второй колонке получены с помощью соотношения (12). Их можно достаточно хорошо аппроксимировать с помощью соотношения

$$\bar{\mathcal{N}}_N = \frac{\bar{\mathcal{N}}_{N-1}}{\left(1+\frac{N-1}{K}\right)^2}.$$

В третьей колонке приведены результаты расчета на основе рекуррентного соотношения

$$\bar{\mathcal{N}}_N = \left(1-\frac{N-1}{K}\right)\bar{\mathcal{N}}_{N-1}.$$

Основное отличие результатов данной работы от результатов МВБ состоит в том, что коэффициенты $\bar{\mathcal{N}}_N$, найденные с помощью (12), плавно убывают с ростом N, нигде не обращаясь в нуль, что соответствует неограниченному пространству коллективных фермионных состояний. В $SU(6)$ - приближении пространство коллективных состояний конечно.

5. Заключение

Проведенное выше рассмотрение показало, что задача построения коллективного квадрупольного гамильтониана на основе микроскопического гамильтониана ядра может быть сведена к расчету нормировочных коэффициентов для коллективных фермионных состояний, выбранных в качестве базисных.

Исследование полученных в работе уравнений для нормировочных коэффициентов показало, что в общем случае решение не совпадает с результатом $SU(6)$-приближения, пространство коллективных состояний оказывается неограниченным, а S - бозон не может быть введен.

Тем самым, если бозонный образ микроскопического гамильтониана ядра может быть найден и в общем случае, коллективный гамильтониан уже не будет выражаться только в терминах генераторов группы $SU(6)$.

Таким образом, хотя возможность использования методов теории групп существенно облегчает анализ, групповая структура коллективного квадрупольного гамильтониана не имеет глубоких физических оснований.

Таблица

Нормировочные коэффициенты коллективных фермионных состояний

N	$\bar{\mathcal{N}}_N$ $\chi(\varepsilon)=-\frac{1}{10}(1+\frac{\varepsilon}{\Delta})^{-2}$	$\bar{\mathcal{N}}_N$ $SU(6)$
I	I	I
2	0,90	0,90
3	0,73	0,72
4	0,535	0,504
5	0,356	0,302
6	0,2I5	0,I5I
7	0,II9	0,060
8	0,060	0,0I8
9	0,028	0,004
I0	0,0I2	0,0004
II	0,0050	0
I2	0,0019	
I3	0,0007	

Литература

I. Джолос Р.В., Лемберг И.Х., Михайлов В.М. ЭЧАЯ, I985, т.I6, с.280.
2. Jolos R.V., Yansen D. JINR, E4-8692, Dubna, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
2I июля I986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Джолос Р.В., Иванова С.П. Р4-86-507

SU(6)-симметрия в модели взаимодействующих бозонов

Развит метод построения коллективного гамильтониана на основе микроскопического гамильтониана ядра. Показано, что задачу построения коллективного гамильтониана можно свести к расчету норм коллективных фермионных состояний. Получены уравнения для нормировочных коэффициентов. В общем случае решение этих уравнений не совпадает с результатом SU(6)-приближения, а пространство коллективных состояний оказывается неограниченным.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Jolos R.V., Ivanova S.P. P4-86-507

SU(6)-Symmetry in the Interacting Boson Model

The method to construct the collective Hamiltonian basing on microscopical nuclear model is developed. It is shown that the problem is reduced to calculations of scalar products of the collective fermion states. The equations for the normalization factors are obtained. In general case the solution of these equations does not coincide with the results of SU(6) approximation, and the space of the collective states are infinite.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986