сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-86-485

Н.С.Шавохина

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ БОРНА - ИНФЕЛЬДА В ВИДЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1986

В нелинейной электродинамике Борна - Инфельда [1] в качестве уравнений поля принимают уравнения

$$\partial_\gamma \phi_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \phi_{\beta\gamma} + \partial_\beta \phi_{\gamma\alpha} = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, \dots, N\}, \qquad /1/$$

решениями которых является внешняя производная

$$\phi_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \phi_\beta - \partial_\beta \phi_\alpha \qquad /2/$$

ковекторного поля ϕ_α. Уравнения /1/ совпадают с соответствующей группой уравнений линейной электродинамики Максвелла и для бивектора /2/ выполняются тождественно.

Вторая группа уравнений нелинейной электродинамики Борна - Инфельда [1] совпадает с уравнениями Лагранжа-Эйлера для функционала действия

$$S = \int \sqrt{-g}\, dx^0 dx^1 \dots dx^N, \qquad /3/$$

где

$$g = \det(g_{\alpha\beta}), \qquad g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \phi_{\alpha\beta},$$

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha}), \qquad \phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - g_{\beta\alpha}).$$

В декартовых координатах $\{x^0, x^1, \dots x^N\}$ в плоском пространстве-времени симметричный тензор $h_{\alpha\beta}$ совпадает с тензором Минковского $\eta_{\alpha\beta}$:

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\{-1, 1, \dots, 1\}. \qquad /4/$$

С помощью тензора $h_{\alpha\beta}$ и обратного к нему $h^{\alpha\beta}$ будем опускать и поднимать индексы.
Так,

$$\phi^\alpha{}_\beta = h^{\alpha\gamma} \phi_{\gamma\beta}, \quad \phi^{\mu\nu} = h^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} \phi_{\alpha\beta}. \qquad /5/$$

Варьируя /3/ по переменным $\phi_{\alpha\beta}$ и учитывая /2/, получаем вторую группу уравнений Борна - Инфельда для нелинейной электродинамики [1,5,6]

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{-g}\, \tilde{\phi}^{\alpha\beta}) = 0, \qquad /6/$$

где

$$\tilde\phi^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\tilde g^{\alpha\beta} - \tilde g^{\beta\alpha}), \quad \tilde g^{\beta\alpha} g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma} = g_{\gamma\sigma}\tilde g^{\alpha\sigma}. \qquad /7/$$

Подчеркнем, что $\phi^{\mu\nu} \neq \tilde\phi^{\mu\nu}$. Уравнения /6/ обычно называются уравнениями Борна - Инфельда. Они заменяют в нелинейной электродинамике следующие уравнения Максвелла: $\partial/\partial x^{\gamma} (\phi^{\beta\gamma}) = 0$.

Пусть $x^0,\dots,x^N$ - любая аффинная карта в мире Пуанкаре - Минковского, т.е. карта, в которой все $h_{\alpha\beta}$ не зависят от координат. Далее будем обозначать целые числа от 0 до k буквами a или b, а целые числа от $k+1$ до N - буквами p или q. Выберем такую аффинную карту, в которой $h_{ap} = h_{pa} = 0$, и будем искать решение уравнений электродинамики в виде

$$\phi_a = 0, \quad \phi_p = \phi_p(x^0,\dots,x^k). \qquad /8/$$

В таком случае

$$\phi_{ab} = 0, \quad \phi_{aq} = \partial_a\phi_q, \quad \phi_{pb} = -\partial_b\phi_p, \quad \phi_{pq} = 0.$$

Следовательно, $g_{ab} = h_{ab}$, $g_{aq} = \phi_{aq}$, $g_{pb} = -\phi_{bp}$, $g_{pq} = h_{pq}$.

Подсчитываем определитель матрицы $(g_{\alpha\beta})$. Для этого из каждой строки $g_{\alpha} = (g_{\alpha 0},\dots,g_{\alpha N})$ этой матрицы вычтем комбинацию строк $\phi_{aq}h^{qp}g_p$. При этом определитель g не изменится, а матрица $(g_{\alpha\beta})$ трансформируется следующим образом:

$$g_{ab} \to h_{ab} + \phi_{qa}h^{qp}\phi_{bp}, \quad g_{ap} \to 0,$$

$$g_{pa} \to g_{pa}, \quad g_{pq} \to g_{pq}.$$

Следовательно,

$$g = f\det(g_{pq}), \qquad /9/$$

где f - определитель матрицы (f_{ab}) с элементами

$$f_{ab} = h_{ab} + \phi_{ap}h^{pq}\phi_{bq}. \qquad /10/$$

Эта матрица является матрицей Грамма [2,3] для $(k+1)$ - мерной поверхности в $(N+1)$-мерном мире Пуанкаре - Минковского, задаваемой в виде графика функции [3]

$$x^p = \sum_{q=k+1}^{N} h^{pq}\phi_q(x^0,\dots,x^k) = \phi^p(x^0,\dots,x^k). \qquad /11/$$

Она задает на этой поверхности меру объема

$$\sqrt{-f}\,dx^0\dots dx^k, \qquad /12/$$

сходную с мерой, задаваемой /3/.

Найдем теперь матрицу $\tilde g^{\alpha\beta}$. Для этого возьмем строку (y^{α}) и столбец (s_{α}) чисел y^{α} и s_{α} и в соответствии с определением /7/ решим систему линейных уравнений $y^{\alpha}g_{\alpha\beta} = s_{\beta}$ в виде $y^{\alpha} = \tilde g^{\alpha\beta}s_{\beta}$. Запишем систему подробно:

$$y^a h_{ab} - y^p\phi_{bp} = s_b, \quad y^a\phi_{aq} + y^p h_{pq} = s_q.$$

Из второго уравнения находим

$$y^p = -y^a\phi_{aq}h^{qp} + h^{pq}s_q.$$

Подставляя это в первое уравнение, получаем

$$y^a f_{ab} = s_b + \phi_{bq}h^{qp}s_p.$$

Вводя f^{ab} из условия

$$\sum_{s=0}^{k+1} f^{as}f_{sb} = \delta^a_b, \qquad /13/$$

получаем $y^a = f^{ab}s_b + \psi^{aq}s_q$, где

$$\psi^{ap} = f^{ab}\phi_{bq}h^{qp} = f^{ab}\partial_b\phi^p. \qquad /14/$$

Затем находим

$$y^p = -\psi^{bp}s_b + (h^{pq} - \psi^{ap}f_{ab}\psi^{bq})s_q.$$

Следовательно,

$$\tilde g^{ab} = f^{ab}, \quad \tilde g^{aq} = \psi^{aq}, \quad \tilde g^{pq} = -\psi^{bp}, \qquad /15/$$

$$\tilde g^{pq} = (h^{pq} - \psi^{ap}f_{ab}\psi^{bq}).$$

Отсюда находим

$$\tilde\phi^{ab} = 0, \quad \tilde\phi^{aq} = \psi^{aq}, \quad \tilde h^{ab} = f^{ab}, \quad \tilde h^{aq} = 0,$$

$$\tilde\phi^{pb} = -\psi^{bp}, \quad \tilde\phi^{pq} = 0, \quad \tilde h^{pb} = 0, \quad \tilde h^{pq} = \tilde g^{pq}. \qquad /16/$$

Рассмотрим теперь уравнения Борна - Инфельда /6/. В данном случае они означают

$$\frac{\partial}{\partial x^a}(\sqrt{|f|}\,\psi^{ap}) = 0. \qquad /17/$$

Но нетрудно подсчитать, что выражение /14/ равно

$$\psi^{ap} = \frac{1}{\sqrt{|f|}}\frac{\partial}{\partial\phi_{ab}}\sqrt{|f|}. \qquad /18/$$

Следовательно, мы получили дифференциальные уравнения минимальных относительно меры объема /12/ поверхностей вида /11/. Согласно /1/, /2/ их можно привести к следующему виду:

$$f^{ab}\frac{\partial^2\phi_p}{\partial x^a\partial x^b} = 0, \qquad /19/$$

что означает

$$\frac{1}{\sqrt{|f|}}\frac{\partial}{\partial x^{b}}(\sqrt{|f|}\,f^{ab})=0, \qquad /20/$$

в чем, конечно, можно убедиться и непосредственно.

В силу этого все аффинные координаты являются гармоническими функциями [4] на минимальной поверхности. Все расчеты упрощаются, если положить $h_{\alpha\beta}=\eta_{\theta\beta}$, где $\eta_{\alpha\beta}$ - тензор Минковского /4/.

Решения /8/ уравнений Борна - Инфельда, представимые минимальными поверхностями /11/, удовлетворяют условиям

$$K^{\nu}\phi_{\nu}=0,\quad K^{\nu}K_{\nu}=0, \qquad /21/$$

где у ковекторного поля ϕ_{ν} отличны от нуля компоненты ϕ_p, $p\in\{k+1,\dots N\}$, а у изотропного векторного поля $K^{\nu}-K^{a}, a\in\{0,\dots k\}$. В силу условия /21/ решения уравнений Борна - Инфельда /8/ можно интерпретировать как волновые. Покажем, что среди них есть бегущие волны [5].

Будем искать решение уравнений электродинамики в виде $\phi_{\alpha}=\phi_{\alpha}(\xi)$, где $\xi=h_{\alpha\beta}K^{\alpha}x^{\beta}$, K^{α} - постоянный вектор, что соответствует бегущей волне с волновым вектором K^{α}. Имеем

$$\phi_{\alpha\beta}=K_{\alpha}\dot{\phi}_{\beta}-K_{\beta}\dot{\phi}_{\alpha},$$

где

$$K_{\alpha}=h_{\alpha\beta}K^{\beta},\qquad \dot{\phi}_{\alpha}=\frac{d}{d\xi}\phi_{\alpha}.$$

Затем

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\phi_{\nu\alpha}=K_{\mu}(K_{\nu}\ddot{\phi}_{\alpha}-K_{\alpha}\ddot{\phi}_{\nu}).$$

Уравнения линейной электродинамики будут удовлетворены, если принять условия $K^{\nu}K_{\nu}=0, K^{\nu}\phi_{\nu}=0$, совпадающие с /21/.

Докажем, что при этих условиях будут удовлетворены и уравнения нелинейной электродинамики.

С этой целью найдем скаляр $J=\frac{g}{h}$, $h=\det(h_{\alpha\beta})$ и тензор $\tilde{g}^{\alpha\beta}$. Легко видеть, что в силу условия $K_{\nu}K^{\nu}=0$

$$\delta^{\mu}_{\alpha}-\phi^{\mu}_{\alpha}=\delta^{\mu}_{\alpha}-K_{\alpha}\dot{\phi}^{\mu}+\dot{\phi}_{\alpha}K^{\mu}=(\delta^{\mu}_{\nu}-K_{\nu}\dot{\phi}^{\mu})(\delta^{\nu}_{\alpha}+\dot{\phi}_{\alpha}K^{\nu}),$$

где $\dot{\phi}^{\mu}=h^{\mu\sigma}\dot{\phi}_{\sigma}$. Так как все миноры второго и более высоких порядков матрицы $K_{\nu}\dot{\phi}^{\mu}$ равны нулю, то ее характеристический многочлен равен $\det(\lambda\delta^{\mu}_{\nu}-K_{\nu}\dot{\phi}^{\mu})=\lambda^{n}-\lambda^{n-1}K_{\nu}\dot{\phi}^{\nu}=\lambda^{n}$. Точно так и $\det(\lambda\delta^{\nu}_{\alpha}+\dot{\phi}_{\alpha}K^{\nu})=\lambda$. Следовательно, $J=1$. Далее, так как

$$g_{\sigma\alpha}=h_{\sigma\alpha}+K_{\sigma}\dot{\phi}_{\alpha}-K_{\alpha}\dot{\phi}_{\sigma}=(h_{\nu\sigma}-K_{\nu}\dot{\phi}_{\sigma})(\delta^{\nu}_{\alpha}+\dot{\phi}_{\alpha}K^{\nu}),$$

то

$$\tilde{g}^{\sigma\beta}=(h^{\sigma\mu}+K^{\sigma}\dot{\phi}^{\mu})(\delta^{\beta}_{\mu}-\dot{\phi}_{\mu}K^{\beta})=$$

$$=h^{\sigma\beta}-(\dot{\phi}_{\mu}\dot{\phi}^{\mu})K^{\sigma}K^{\beta}+K^{\sigma}\dot{\phi}^{\beta}-K^{\beta}\dot{\phi}^{\sigma}.$$

Следовательно,

$$\tilde{h}^{\alpha\beta}=h^{\alpha\beta}-(\dot{\phi}_{\mu}\dot{\phi}^{\mu})K^{\alpha}K^{\beta},\quad \tilde{\phi}^{\alpha\beta}=\phi^{\alpha\beta}=K^{\alpha}\dot{\phi}^{\beta}-K^{\beta}\dot{\phi}^{\alpha}. \qquad /22/$$

Далее, при $J=1$ из равенства $g=Jh$ в аффинной карте, где $h=\mathrm{const}$, следует, что $g=\mathrm{const}$. Поэтому уравнения Борна - Инфельда /6/ с учетом /22/ запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\dot{\phi}^{\alpha\beta}=0 \qquad /23/$$

уравнений Максвелла. Следовательно, ковекторные поля

$$\phi_{\alpha}=\phi_{\alpha}(\xi), \qquad /24/$$

где

$$\xi=h_{\alpha\beta}K^{\alpha}x^{\beta},\quad K^{\nu}K^{\mu}\eta_{\nu\mu}=0,\quad K^{\nu}\phi_{\nu}=0, \qquad /25/$$

одновременно удовлетворяют как уравнениям линейной электродинамики, так и уравнениям нелинейной электродинамики.

Решения /8/ уравнений Борна - Инфельда, если положить в них $\phi_{a}=0$, $\phi_{p}=\phi_{p}(\xi)$, где $\xi=h_{ab}K^{a}x^{b}$, $K^{a}K^{b}h_{ab}=0$, в силу сказанного выше представляют бегущие волны [5,6].

Далее рассмотрим решения уравнений Борна - Инфельда /6/ в виде

$$\phi_{a}=\phi_{a}(x^{k+1},\dots,x^{N}),\quad 0<k<N. \qquad /26/$$

Повторяя предыдущие рассуждения от формулы /8/ до /20/, получим, что их можно представить в виде графиков минимальных поверхностей [2,3] вида

$$x^{a}=h^{ab}\phi_{b}=\phi^{a}(x^{k+1},\dots,x^{N}). \qquad /27/$$

Решения /26/ удовлетворяют условию

$$\phi_{\nu}K^{\nu}=0,\quad K^{\nu}K_{\nu}>0. \qquad /28/$$

В силу условия /28/ решения /26/ можно интерпретировать как статические.

Литература

1. Born M., Infeld L. Foundations of the New Field Theory. Proc.Roy Soc. A.144, 1934.
2. Нерден А.П. Теория поверхностей. ГИТТЛ, М., 1956.

3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. "Наука", М., 1979.
4. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, М., 1955.
5. Барбашов Б.М., Черников Н.А. В сб.: "Физика высоких энергий и теория элементарных частиц". "Наукова думка", Киев, 1967, с.733-743.
6. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-81-434, Дубна, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 июля 1986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р.50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Шавохина Н.С. Р4-86-485
Решения уравнений Борна - Инфельда в виде минимальных поверхностей

В пространстве-времени Минковского произвольной размерности найден класс точных решений уравнений Борна - Инфельда, представляемых минимальными поверхностями. Среди них имеются как волновые, так и статические решения.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Shavokhina N.S. P4-86-485
Solutions of the Born-Infeld Equations as Minimal Surfaces

In a Minkowski space-time of arbitrary dimension a class is found of exact solutions to the Born-Infeld equations that can be represented by minimal surfaces. They include both wave and static solutions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986