

**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

**P4-86-397**

**Б.В.Быковский, В.А.Мещеряков, И.Фурдик**

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
ПИОННОГО ФОРМФАКТОРА**

**1986**

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время известно свыше ста экспериментальных значений модуля электромагнитного формфактора  $F_\pi(t)$  в широком интервале переданных импульсов  $-10 \text{ ГэВ}^2 \leq t \leq 10 \text{ ГэВ}^2$ . Они дают уникальную возможность детального сравнения теории с экспериментом. Отметим в этой связи результаты вычислений  $|F_\pi(t)|$  в интервале  $-1 \text{ ГэВ}^2 < t < 0$  на основе квантовой хромодинамики <sup>/1/</sup>, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными. Однако пока еще все попытки описания  $F_\pi(t)$  на основе полевых теорий ограничиваются пространственно-подобной областью  $t < 0$ . Единственным методом для одновременного описания пространственно- и времени-подобных передач импульсов  $t$  остается метод дисперсионных соотношений. Одной из известных моделей описания пионного формфактора в рамках дисперсионных соотношений является модель, предложенная Гунарисом и Сакураи <sup>/2/</sup>. Эта феноменологическая модель содержит только два параметра ( $m_\rho, \Gamma_\rho$ ) и позволяет предсказывать поведение формфактора вблизи  $\rho$ -мезонного резонанса с весьма высокой точностью. С другой стороны, при описании областей, удаленных от резонанса, возникают значительные трудности, кроме того, фаза формфактора плохо согласуется с фазой  $\rho$ -волны рассеяния в упругой области. Улучшению модели Гунариса - Сакураи посвящен целый ряд работ <sup>/3-6/</sup>, однако вопрос до сих пор остается открытым. Недавно была предложена <sup>/7/</sup> простая формула для описания  $|F_\pi(t)|$  в интервале энергий  $-4 \text{ ГэВ}^2 < t < 7 \text{ ГэВ}^2$ , которая является обобщением формулы Гунариса - Сакураи. Цель настоящей статьи - критический анализ результатов работы <sup>/7/</sup> и установление другой формулы для  $F_\pi(t)$ , содержащей то же число параметров и более удовлетворительно описывающей эксперимент.

## ВЫБОР ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ФОРМФАКТОРА ПИОНА

Определение формфактора пиона и его основные свойства хорошо известны <sup>/11,12/</sup>, поэтому кратко опишем представление для  $F_\pi(t)$ , которое служит основой дальнейшего рассмотрения.

$$F_\pi(t) = \frac{1}{1 + \sum_{p=1}^{n-1} d_p t^p - \frac{t^n}{4m_\pi^2} \int_0^\infty \frac{N(s) ds}{s^n(s-t)}} \quad /1/$$

Здесь  $\{1, d_p\}$  - константы вычитания, а функция  $N(s)$  является числителем так называемого  $N/D$ -представления для парциальной волны  $\pi\pi$ -рассеяния с квантовыми числами  $J = I = 1$ . Главным аргументом работы /7/ в пользу выбора  $n = 3$  служит утверждение о том, что тем самым в формулу для  $F_\pi(t)$  вводится параметр кривизны в точке  $t = 0$ . Действительно, величина  $d_1$  определяет массу  $\rho$ -мезона, а одновременно и кривизну  $F_\pi(t)$  при  $t = 0$ . Ширина  $\rho$ -мезона задается видом функции  $N(s)$ , для которой предлагается простейшее приближение

$$N(s) = N \frac{2q^3}{\sqrt{s}}, \quad /2/$$

где  $N$  - константа. Здесь  $q$  - импульс пиона в системе ЦМ  $q = \sqrt{\frac{s}{4m_\pi^2}} - 1$ , тем самым вид  $F_\pi(t)$  фиксируется тремя параметрами  $d_1, d_2, N$ . По нашему мнению, их лучше рассматривать как независимые величины, определяющие массу и ширину  $\rho$ -мезона, а также такой физической характеристики парциальной волны  $f_1^1$ , как длина рассеяния  $a_1^1 = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\delta_1^1}{q}$ , которую естественно отнести к параметрам  $\rho$ -мезона. Основанием для такого утверждения служит простая оценка по формуле  $\Gamma = a_1^1 q^3$ , приводящая к завышенному значению  $a_1^1 \sim 0,064$ . Поэтому вместо третьего вычитания можно воспользоваться уже имеющейся свободой в выборе функции  $N(s)$  и положить

$$N_1(s) = \frac{2q^3}{\sqrt{s}} (N + kq^2). \quad /3/$$

Теперь параметры  $\{d_1, N, k\}$  будут определять  $\{m_\rho, \Gamma_\rho, a_1^1\}$ . Формулы /2/ и /3/ не отличаются принципиально, так как обе пренебрегают высшими порогами. Другими словами, упругое условие унитарности

$$\text{Im} F_\pi(t) = f_1^{*1}(t) F_\pi(t) \quad /4/$$

считается справедливым для  $4m_\pi^2 \leq t < \infty$ . Это приводит к одинаковой структуре римановой поверхности формфакторов  $F_\pi(t)$ , определенных формулами /1/, /2/ и /3/. Для установления ее вычислим интеграл

$$f(t) = \frac{t^2}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{2q^3(s)}{s^2(s-t)} ds = -m_\pi^2 \frac{t^2}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{2\bar{q}^3(\bar{s})}{\bar{s}^2(\bar{s}-t)} d\bar{s}, \quad /5/$$

где  $\bar{s} = s/m_\pi^2$ ;  $\bar{t} = t/m_\pi^2$ .

Интегрирование легко провести в переменных  $k' = \frac{2\bar{q}(\bar{s})}{\sqrt{\bar{s}}}$ ,  $k = \frac{2\bar{q}(\bar{t})}{\sqrt{\bar{t}}}$ , в результате получаем

$$f(t) = m_\pi^2 \frac{2}{\pi} \left[ 1 - \frac{\bar{t}}{3} - i \frac{2\bar{q}^3(\bar{t})}{\sqrt{\bar{t}}} \left( \frac{\pi}{2} + i \ln \frac{\sqrt{\bar{t}} + \sqrt{\bar{t}-4}}{2} \right) \right], \quad /6/$$

где используется главное значение логарифма. Исследование выражения /6/ упрощается, если ввести новые обозначения

$$x = \sqrt{\frac{\bar{t}}{4}}, \quad y = \arcsin x = \frac{\pi}{2} + i \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \quad /7/$$

Здесь  $x$  есть энергия пиона в системе центра масс в единицах  $m_\pi$ , а импульс его равен

$$q(t) = i \cos y. \quad /8/$$

Теперь формула /6/ принимает вид

$$f(y) = m_\pi^2 \frac{2}{\pi} \left[ 1 - \frac{4 \sin^2 y}{3} - \frac{\cos^3 y}{\sin y} \cdot y \right], \quad /9/$$

откуда следует, что она определяет мероморфную функцию переменной  $y$ . По переменной  $x$  функция  $f$  имеет корневые точки ветвления при  $x = \pm 1$  и логарифмическую точку ветвления на бесконечности. Вследствие выбора главного значения логарифма в /7/ двузначной зависимости  $x$  от  $\bar{t}$  функция  $f(t)$  на первом листе не имеет левого разреза, соответствующего разрезу  $(-\infty, -1)$  в плоскости  $x$  парциальной амплитуды  $f_1^1 \pi\pi$ -рассеяния. Он появляется на других, нефизических листах бесконечнолистной римановой поверхности  $f(t)$ . Вычисление формфактора пиона по формуле /3/ проводится с помощью следующего интеграла:

$$g(t) = -\frac{t^2}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{2q^5(s)}{s^2(s-t)} ds, \quad /10/$$

$$g(\bar{t}) = m_\pi^2 \frac{2}{\pi} \left[ 1 - \frac{7}{3} \bar{t} - i \frac{2\bar{q}^5(\bar{t})}{\sqrt{\bar{t}}} \left( \frac{\pi}{2} + i \ln \frac{\sqrt{\bar{t}} + \sqrt{\bar{t}-4}}{2} \right) \right]. \quad /11/$$

Из условия унитарности /4/ восстанавливается изовекторная парциальная амплитуда  $\rho$ -волнового рассеяния

$$f_1^1(t) = \frac{N(t)}{1 + \sum_{p=1}^{n-1} d_p t^p - \frac{t^n}{\pi} \int \frac{N(s) ds}{s^n(s-t)}}. \quad /12/$$

Для практических расчетов более удобно выражение для тангенса фазового сдвига

$$\operatorname{tg} \delta_1^1 = \frac{N(t)}{1 + \sum_{p=1}^{n-1} d_p t^p - \frac{t^n}{\pi} \int \frac{N(s) ds}{s^n (s-t)}} \quad /13/$$

Формула /12/ справедлива на всей римановой поверхности. Поэтому она может быть продолжена на второй лист, и с ее помощью вычисляется амплитуда  $f_1^1(t)$  на разрезе  $-\infty < t < 0$ . Последнюю можно оценить, исходя из экспериментальных данных по фазовым сдвигам  $\pi\pi$ -рассеяния. Таким образом, описав данные по модулю электромагнитного формфактора пиона  $|F_\pi(t)|$  с помощью формулы /1/, можно получить предсказание об амплитуде  $f_1^1(t)$  и тем самым провести дополнительную проверку исходных предположений.

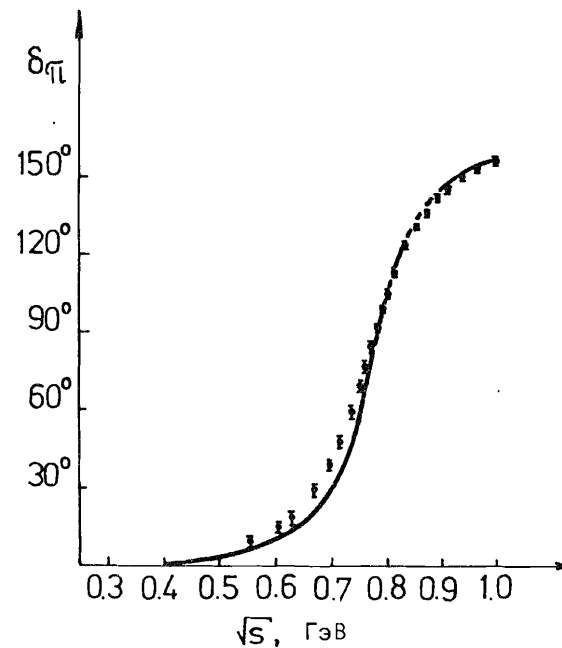
### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Набор экспериментальных данных, использованных для анализа, описан в работе /8/. Результаты представлены в таблице. В первой колонке воспроизведены результаты работы /7/, в которой анализировались 63 экспериментальные точки из интервала  $-4 \text{ ГэВ}^2 < t < 7 \text{ ГэВ}^2$ . Очевидно, что они представляют выборку точек из использованного нами набора, для которого парциальный вклад в  $\chi^2$  равен 1. Видна неустойчивость параметра  $d_2$  относительно различных наборов экспериментальных данных, которая приводит к различному асимптотическому  $F_\pi(t)$  при больших  $t$ .

Таблица

$\chi^2$	73	$5,4 \cdot 10^3$	$1,4 \cdot 10^3$
$m_\pi^2 d_1$	$-3,56 \pm 0,02 / \cdot 10^{-2}$	$-2,99 \pm 0,02 / \cdot 10^{-2}$	$-3,30 \pm 0,02 / \cdot 10^{-2}$
$m_\pi^4 d_2$	$1,05 \pm 0,05 / \cdot 10^{-4}$	$-0,99 \pm 0,05 / \cdot 10^{-4}$	0
$m_\pi^2 N$	$2,61 \pm 0,08 / \cdot 10^{-2}$	$2,63 \pm 0,01 / \cdot 10^{-2}$	$2,06 \pm 0,01 / \cdot 10^{-2}$
$m_\pi^4 k$	0	0	$7,31 \pm 0,01 / \cdot 10^{-4}$
$m_\rho$	$780 \pm 6$	$775 \pm 5$	$780 \pm 6$
$\Gamma_\rho$	$154 \pm 5$	$128 \pm 6$	$143 \pm 5$
$m_\pi^3 a_1^1$	0,031	0,030	0,024
$r_\pi^2 (\text{fm}^2)$	0,430	0,361	0,400

Из второй колонки следует, что существующие данные по  $|F_\pi(t)|$  неудовлетворительно описываются формулой с тремя вычитаниями, хотя значения параметров  $\rho$ -резонанса имеют разумные значения.



Зависимость фазового сдвига  $\delta_1^1$  /13/ от энергии приведена на рисунке. Кривая в целом хорошо согласуется с экспериментальными значениями фазы парциальной  $\rho$ -волны  $\pi\pi$ -рассеяния /10/.

### ПРОДОЛЖЕНИЕ $\rho$ -ВОЛНОВОЙ АМПЛИТУДЫ $\pi\pi$ -РАССЕЯНИЯ НА КРОССИНГ-РАЗРЕЗ

Как уже упоминалось выше, выбор главного значения логарифма при введении унифицирующей переменной  $y$  в /7/ приводит к тому, что функция  $f(t)$  не имеет на первом листе разреза, соответствующего разрезу  $(-\infty, 0)$  в плоскости  $t$ . Разрез появляется на других листах бесконечнолистной римановой поверхности функции  $f(t)$ , поэтому представляется небезынтересным рассмотреть поведение амплитуды на таком разрезе.

Амплитуда рассеяния парциальной  $\rho$ -волны в  $N/D$ -представлении имеет вид /12/. Числитель  $N(t)$  — аналитическая функция с разрезом вдоль отрицательной оси  $t \leq 0$ . На правом разрезе имеет место соотношение

$$e^{2i\delta_1^1(t)} = \frac{D(t^*)}{D(t)}, \quad /14/$$

Экспериментальные значения модуля пионного формфактора содержат в себе большой объем физической информации, на пример, о неупругом пороге и высших резонансах /18/, которые не учитываются в данной модели. Модель в целом правильно описывает поведение пионного формфактора, тем не менее, показатель  $\chi^2$  используется нами скорее как качественная, чем количественная характеристика. В последней колонке приведены результаты анализа по формуле с двумя вычитаниями и двумя параметрами в  $N(s)$ . Значение  $\chi^2$  улучшилось, а параметры  $\rho$ -мезона по-прежнему близки к табличным значениям /14/.

где  $\delta_1^1(t)$  - фаза  $p$ -волны, а  $D(t)$  - знаменатель /12/. Чтобы аналитически продолжить фазу на всю риманову поверхность, удобно рассмотреть ее как функцию униформизирующей переменной  $y$ . Заметим, что на разрезе  $t \geq 4$  выполняется соотношение  $y + y^* = \pi$ , которое позволяет переписать выражение /14/ в виде

$$e^{2i\delta_1^1(y)} = \frac{D(\pi - y)}{D(y)}. \quad /15/$$

Очевидно, что соотношение /15/ является искомым аналитическим продолжением фазы на всю риманову поверхность. Преобразование

$$/7/ \text{ отображает плоскость } t \text{ в полосы } \frac{\pi}{2}k \leq \operatorname{Re} y \leq \frac{\pi}{2}(k+1);$$

$k = 0, \pm 1, \dots$  на комплексной плоскости переменной  $y$ , причем

$$\text{правый разрез переходит в прямые } \operatorname{Re} y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

а ось  $t \leq 0$  в  $\operatorname{Re} y = \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \dots$ . Выбору главного значения логарифма в /7/ соответствует отображение плоскости  $t$  на полосу  $0 \leq \operatorname{Re} y \leq \frac{\pi}{2}$ , ось  $t = 0$  переходит в прямую  $\operatorname{Re} y = 0$ . Поскольку

$$D(y) = 1 + m^2 d_1 \sin^2 y + m^4 d_2 \sin^4 y + \frac{2m^2 N}{\pi} \left[ 1 - \frac{\sin^2 y}{3} - \frac{\cos^3 y}{\sin y} \right] \quad /16/$$

и амплитуда

$$f_1^1(y) = -m^2 N \frac{\cos^2 y}{D(y)}. \quad /17/$$

являются четными функциями, то на прямой  $\operatorname{Re} y = 0$  выполняется равенство  $f_1^1(y^*) = f_1^1(y)$  или  $f_1^1(t^*) = f_1^1(t)$ , ( $t \leq 0$ ), т.е., как и следовало ожидать,  $f_1^1(t)$  не имеет разреза при  $t \leq 0$ . Равенство  $y^* = -y$  имеет место только при  $\operatorname{Re} y = 0$ , следовательно, на всех других листах римановой поверхности амплитуда будет обладать левым разрезом. Аналитическое продолжение  $f(t)$  на второй лист, соответствующий полосе  $\pi/2 \leq \operatorname{Re} y \leq \pi$  осуществляется функцией

$$f_{II}^1(\bar{t}) = m^2 \frac{2}{\pi} \left[ 1 - \frac{\bar{t}}{3} + i \frac{2q^3(\bar{t})}{\sqrt{\bar{t}}} \left( \frac{5\pi}{2} - i \ln \frac{\sqrt{\bar{t}} + \sqrt{\bar{t}-4}}{2} \right) \right]. \quad /18/$$

Нами были проделаны вычисления модуля амплитуды на левом разрезе плоскости  $t$  второго листа римановой поверхности и оценки согласия предсказаний модели с данными эксперимента. Экстраполяция экспериментальных значений в нефизическую область проводилась в рамках дифференциальной модели с использованием матрицы кроссинг-симметрии /9/. Амплитуда  $p$ -волны восстанавливалась в нефизической области по экспериментальным значениям фаз  $s$ -волн в амплитудах с изоспинами 0 и 2 и  $p$ -волны в амплитуде с изоспином 1 /10/. Сравнение показало, что, несмотря на довольно

существенное расхождение, теоретические и экстраполированные экспериментальные значения остаются величинами одного порядка в широком диапазоне изменения энергии. Безусловно, модель в ее настоящем виде мало пригодна для описания поведения амплитуды на левом разрезе, но факт определенного количественного соответствия дает основание надеяться на возможное улучшение согласия теоретических и экспериментальных результатов после усовершенствования исходной модели.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитическая модель формфактора, рассмотренная в настоящей работе, обладает рядом привлекательных свойств и, несмотря на свою простоту, при правильном выборе параметризации удовлетворительно описывает почти все имеющиеся экспериментальные данные. Риманова поверхность формфактора бесконечнолистна, на нефизических листах формфактор имеет левый разрез, который может быть интерпретирован как кроссинг-разрез амплитуды  $p$ -волны  $\pi\pi$ -рассеяния.

Модель не учитывает высших резонансов /13/ и не содержит неупругого порога /8/. На наш взгляд введение дополнительных феноменологических параметров, не изменяющих структуру римановой поверхности формфактора, нецелесообразно, так как при этом возникают трудности, связанные с их физической интерпретацией.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Nesterenko V.A., Radyushkin A.V. JETP Lett., 1984, 39, p.707.
2. Gounaris H.L., Sakurai J.J. Phys.Rev.Lett., 1968, 21, p.244.
3. Deo B., Parida M. Phys.Rev., 1974, 9, p.2068.
4. Ross M. Nucl.Phys., 1975, B97, p.165.
5. Hammer C.L. et al. Phys.Rev., 1977, D15, p.6696.
6. Dubnička S., Dubničková A.Z., Meshcheryakov V.A. Czech.J.Phys., 1979, B29, p.142; Dubnička S., Meshcheryakov V.A., Sararu M. ibid, 1984, B34, p.1282.
7. Erkal C., Olsson M.C. Wisconsin-Madison Report MAD/PH 188, June, 1984.
8. Dubnička S., Meshcheryakov V.A., Milko J. J.Phys.G: Nucl. Phys., 1981, 7, p.605.
9. Ширков Д.В., Серебряков В.В., Мещеряков В.А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. "Наука", М., 1967.
10. Protopopescu S.D. et al. Phys.Rev., 1973, D7, p.1279.
11. Gourdin M. Phys.Rep., 1974, C11, p.29.

12. Perez-y-Jorda J.P., Renard F.M. Phys.Rep., 1977, C31, p.1.
13. Дубничка С. ОИЯИ, P2-85-869, Дубна, 1985.
14. Particle Data Group. Rev.Mod.Phys., 1984, 56.

Быковский В.В., Мещеряков В.А., Фурдик И.  
Аналитические модели пионного формфактора

P4-86-397

Рассмотрена аналитическая модель типа Гунариса - Сакураи с тремя параметрами. Формфактор обладает бесконечнолистной римановой поверхностью с левым разрезом на нефизических листах, который ассоциируется с кроссинг-разрезом  $p$ -волны  $\pi\pi$ -рассеяния. Предложена новая параметризация модели, более удовлетворительно согласующаяся с экспериментом, все параметры имеют явный физический смысл.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод авторов

Bykovskij V.V., Meshcheryakov V.A., Furdik I.  
Analytic Models of Pion Form Factor

P4-86-397

An analytic Gounaris - Sakurai-like model with three parameters is considered. The pion form factor has an infinite-sheeted Riemann surface. The left cut of unphysical sheets is associated with the crossing-cut of  $p$ -wave of  $\pi\pi$  scattering amplitude. A new parametrization of the model is proposed which is in better agreement with the experimental data. All parameters are physically clear.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986

Рукопись поступила в издательский отдел  
20 июня 1986 года.